516.0076
C120N

Th.S NGUYỄN TẤT THU
(Nhóm giáo viên chuyên luyện thi Đại học)

Cẩm nang
LUYỆN THI ĐẠI HỌC
HÌNH HỌC

SÁCH DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

DVL.013508

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

C120N

Th.S NGUYỄN TẤT THU

(Nhóm giáo viên chuyên luyện thi Đại học)

Cẩm nang
LUYỆN THI ĐẠI HỌC
HÌNH HỌC

SÁCH DÀNH CHO HỌC SINH LUYỆN THI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 13508 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh thân mến!

Trong những năm gần đây, đề thi Đại học luôn có 3 câu thuộc về phân môn Hình học sơ cấp. Các bài toán thuộc chủ đề hình học rất đa dạng và sáng tạo trong lời giải đa gây không ít khó khăn cho các thí sinh. Hơn nữa, những chủ đề Hình học sơ cấp các em học sinh được học ở cả ba khối lớp nên luồng kiến thức của các em học sinh cũng bị rời rạc. Với niềm đam mê và nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dành cho bộ môn toán, thầy *Nguyễn Tất Thu* đã dành thời gian và tâm huyết viết tập sách "Cẩm nang luyện thi Đại học Hình học sơ cấp" nhằm khơi dậy niềm yêu thích toán học, rèn luyện kỹ năng tự làm bài, tự ôn tập.

Nội dung của bộ sách được chia làm 3 chương

Chương 1. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Chương 2. Hình học không gian

Chương 3. Phương pháp tọa độ trong không gian

Với lối viết khoa học, sinh động, bộ sách giúp các em tiếp cận môn toán một cách nhẹ nhàng, tự nhiên, khơi nguồn cảm hứng khi tự học.

Kiến thức trọng tâm ngắn gọn, đầy đủ bao gồm lý thuyết, phương pháp giải các dạng bài đi từ cơ bản đến mở rộng và chuyên sâu, qua đó giúp các em hiểu rõ bản chất, phân tích, lập luận nhuần nhuyễn để chủ động tìm ra phương pháp giải quyết bài toán.

Ví dụ minh họa trong từng phần được phân loại, sắp xếp chọn lọc từ dễ đến khó nhằm dẫn dắt các em đến những dạng bài thi Đại học. Lời giải vừa chi tiết vừa gợi mở để các em từng bước vừa phân tích vừa tìm tòi ra cách giải chính xác và thú vị nhất. Lời bình và nhận xét của tác giả sau mỗi bài giải là kinh nghiệm quý báu cho các em.

Làm nhiều bài tập để nâng cao năng lực tư duy, đó là một cách học toán hiệu quả nhất. Các em sẽ hứng thú hơn khi được thử sức với nhiều bài tập khác nhau và tình huống đa dạng có kèm hướng dẫn giải.

Để sử dụng bộ sách hiệu quả và mang lại kết quả cao nhất, các em cần kiên trì tìm hiểu để nắm chắc lý thuyết, chăm chỉ rèn luyện kỹ năng làm bài thông qua các ví dụ, bài tập trình bày trong bộ sách.

Hi vọng, tập sách: " Cẩm nang luyện thi Đại học Hình học sơ cấp" sẽ tiếp tục là nguồn tài liệu bổ ích cho các em học sinh trong kỳ thi Đại học – Cao đẳng tới.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Nguyễn Tất Thu

Lời giới thiệu

Theo cấu trúc đề thi Đại học – Cao đẳng của Bộ Giáo dục thì trong đề thi vào các trường Đại học – Cao đẳng có 3 điểm Hình học được chia thành 3 câu, mỗi câu 1 điểm như sau:

Câu 5. Gồm các vấn đề về hình học không gian tổng hợp

Nôi dung của câu 5 trong đề thi thường gồm hai ý: Tính thể tích khối đa diện (khối chóp và khối lăng trụ) và ý thứ hai thường xoay quanh các vấn đề

+) Chứng minh quan hệ vuông góc, quan hệ song song;

+) Tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau;

+) Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng;

+) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 7a, 7b: Gồm các vấn đề về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Chủ yếu xoay quanh các vấn đề sau

+) Lập phương trình đường thẳng, đường tròn, Elip, Hypebol;

+) Xác định tọa độ của một điểm.

Câu 8a, 8b: Gồm các vấn đề về phương pháp tọa độ trong không gian, chủ yếu xoay quanh các chủ đề

+) Lập phương trình đường thẳng, phương trình mặt phẳng, phương trình mặt cầu;

+) Chứng minh vi trí tương đối giữa đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu;

+) Xác định tọa độ của một điểm thỏa mãn tính chất cho trước.

Sau đây, chúng ta đi phân tích để tìm lời giải các bài toán được trích trong các đề thi Đại học năm 2013.

* **Khối A – 2013**

Câu 5. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$. Tam giác SBC đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến (SAB).

Phân tích: Yêu cầu của bài toán có 2 ý: Tính thể tích khối chóp và tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

+) Tính thể tích khối chóp S.ABC:

Để tính thể tích của khối chóp, trước hết phải xác định được chân đường cao của hình chóp? Theo đề bài, mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy nên đường cao của tam giác SBC kẻ từ S chính là đường cao của hình chóp. Hơn nữa, tam giác SBC đều nên chân đường cao của hình chóp chính là trung điểm BC.

Nên thể tích của khối chóp được tính như sau:

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $AB = BC.\cos B = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = BC.\sin B = \frac{a}{2}$,

suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Do đó, thể tích khối chóp S.ABC là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{16}$.

+) Tính khoảng cách từ C đến (SAB):

Để tính khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (α), ta có các cách sau

Cách 1: Dựng hình chiếu H của M lên (α) và tính MH.

Cách 2: Chuyển tính khoảng cách từ M về tính khoảng cách từ điểm khác bằng cách dựa vào tính chất

Nếu đường thẳng MN cắt (α) tại I thì $d(M,(\alpha)) = \frac{IM}{IN}d(N,(\alpha))$. Điểm I ta thường chọn là chân đường cao của hình chóp.

Cách 3: Sử dụng công thức thể tích: Xét hình chóp M.ABC, khi đó

$$d(M,(ABC)) = \frac{3V_{M.ABC}}{S_{\Delta ABC}}$$

Với bài toán trên, việc dựng hình chiếu của C lên (SAB) tương đối khó, nên ta chuyển về tính khoảng cách từ H đến (SAB). Vì CH cắt (SAB) tại B và H là trung điểm của BC nên $d(C,(SAB)) = 2d(H,(SAB))$. Do đó, ta có thể tính $d(C,(SAB))$ theo cách 1 như sau:

Cách 1: Gọi M là trung điểm của các đoạn AB và K là hình chiếu của H lên SM.

Ta có: $HM // AC \Rightarrow HM \perp AB, HM = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{4}$

Mà $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HK$.

Mặt khác $HK \perp SM$, do đó $HK \perp (SAB)$.

Trong tam giác SHN ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{20}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Ta có: $d(C,(SAB)) = \frac{CB}{HB}d(H,(SAB)) = 2.HK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Cách 2: Ta có $d(C,(SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}$.

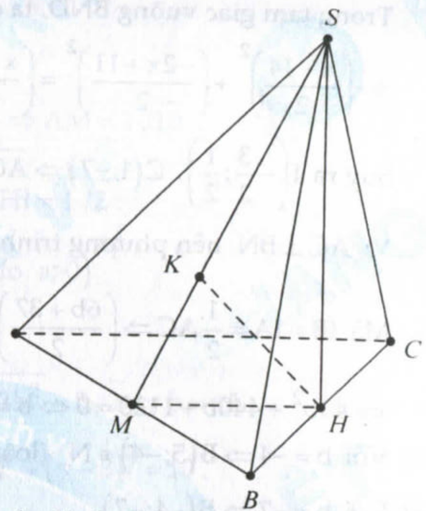
Mà $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}$.

Ta có $SM \perp AB \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SM.AB$,

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

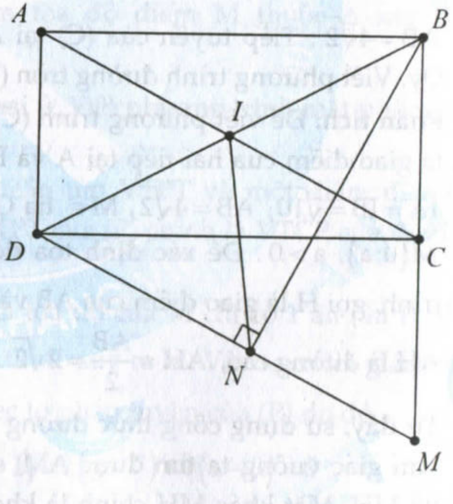
Suy ra $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$.

Vậy $d(C,(SAB)) = \frac{3a}{\sqrt{39}}$.



Câu 7a. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng $N(5;-4)$.

Phân tích: Đây là bài toán xác định tọa độ của một điểm. Về mặt đại số, để xác định tọa độ của một điểm ta cần tìm hai ẩn, tức là cần thiết lập hai phương trình. Trong hai điểm cần tìm B và C thì điểm C thuộc đường thẳng d nên tọa độ của C có dạng $C(x;-2x-5)$. Do đó, để tìm tọa độ điểm C ta chỉ cần tìm 1 ẩn nên cần thiết lập một phương trình. Gọi I là giao điểm của AC và BC, ta có tọa độ điểm $I\left(\frac{x-4}{2};\frac{-2x+3}{2}\right)$.



Trong tam giác vuông BND, ta có $IN = IB = IA$ từ đây ta tìm được x hay tìm được điểm C và I. Khi đó ta lập được phương trình đường thẳng BN (đi qua N và vuông góc với AC). Dựa vào tính chất $IB = IA$ ta tìm được tọa độ điểm B. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Vì $C \in d \Rightarrow C(x;-2x-5)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có I là trung điểm AC nên $I\left(\frac{x-4}{2};\frac{-2x+3}{2}\right)$.

Trong tam giác vuông BND, ta có $IN = IB = IA \Rightarrow IN^2 = IA^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-14}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2x+11}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x+13}{2}\right)^2 . \Leftrightarrow x = 1$$

Suy ra $I\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $C(1;-7) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (5;-15)$.

Vì $AC \perp BN$ nên phương trình $BN: x - 3y - 17 = 0 \Rightarrow B(3b+17;b)$.

Mà $IB = IA = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \left(\frac{6b+37}{2}\right)^2 + \left(\frac{2b-1}{2}\right)^2 = \frac{250}{4}$

$\Leftrightarrow 40b^2 + 440b + 1120 = 0 \Leftrightarrow b = -4, b = -7$

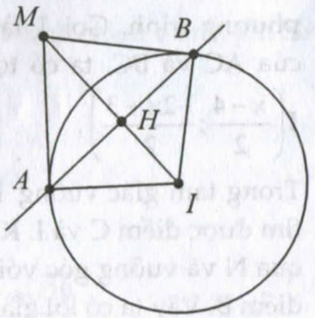
+) Với $b = -4 \Rightarrow B(5;-4) \equiv N$ (loại)

+) Với $b = -7 \Rightarrow B(-4;-7)$.

Vậy $C(1;-7)$, $B(-4;-7)$

Câu 7b. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Phân tích: Để viết phương trình (C) ta cần đi xác định tọa độ tâm I. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tại A và B. Khi đó, giả thiết của bài toán gồm có: $IA = IB = \sqrt{10}$, $AB = 4\sqrt{2}$, $M \in$ tia Oy. Do đó, ta sẽ đi xác định tọa độ điểm $M(0;a)$, $a > 0$. Để xác định tọa độ điểm M ta cần thiết lập một phương trình, gọi H là giao điểm của AB và IM, ta xét tam giác MAI vuông tại A và AH là đường cao, $AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$.



Từ đây, sử dụng công thức đường cao trong tam giác vuông ta tìm được AM, suy ra MI và MH. Mặt khác MH chính là khoảng cách từ M đến AB (tức là đường thẳng d). Từ đây ta tìm được a và tọa độ điểm M, do đó ta có phương trình MI, hơn nữa độ dài MI tính được nên ta tìm được tọa độ điểm I. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Gọi I là tâm của đường tròn cần tìm, H là trung điểm của AB, M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B.

Từ giả thiết ta có $M(0;a), a > 0$.

Trong tam giác vuông MAI, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \Rightarrow AM = 2\sqrt{10} .$$

$$\Rightarrow MI = \sqrt{MA^2 + IA^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow MH = MI - HI = 4\sqrt{2}$$

Hay $d(M,\Delta) = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 8$(do a>0)

Do đó, phương trình IH là: $x + y - 8 = 0$.

Ta có $I \in MH \Rightarrow I(b;8-b)$, $IM = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2b^2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow b = \pm 5$.

+ Với b = 5, phương trình của (C) là $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

+ Với b = −5, phương trình của (C) là $(x+5)^2 + (y-13)^2 = 10$.

Câu 8a. Trong không gian với hệ tọa độ (Oxy), cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1;7;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Phân tích: Nội dung của đề bài gồm hai ý: Viết phương trình mặt phẳng và tìm tọa độ điểm M.

+) Để viết phương trình mặt phẳng, ta cần tìm VTPT và một điểm đi qua: Trong đề bài, điểm đi qua đã có và VTPT của (P) chính là VTCP của đường thẳng Δ.

+) Tìm tọa độ điểm M: Vì M thuộc Δ nên tọa độ của M chỉ có 1 ẩn (ẩn t). Do $AM = 2\sqrt{30}$ nên từ đây ta tìm được t, từ đó suy ra M. Vậy ta có lời giải sau:

Lời giải. Vì $(P) \perp \Delta \Rightarrow n(-3;-2;1)$ là vec tơ pháp tuyến của (P) do đó:

Phương trình mặt phẳng (P) là : $-3(x-1) - 2(y-7) + 1(z-3) = 0$

Hay $3x - 2y - z - 14 = 0$.

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(6-3t;-1-2t;-2+t)$

Ta có $AM = 2\sqrt{30} \Leftrightarrow AM^2 = 120$

$\Leftrightarrow (5-3t)^2 + (-8-2t)^2 + (-5+t)^2 = 120 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{3}{7}$.

Suy ra có hai điểm thỏa mãn là $M(3;-3;-1)$, $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right)$.

Câu 8b. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng:

$(P): 2x+3y+z-11=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-8=0$.

Chứng minh (P) tiếp xúc với (S). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S).

Phân tích:

+) Để chứng minh mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R ta chứng minh $d(I,(P))=R$.

+) Để tìm tọa độ tiếp điểm H của mặt cầu (S) và mp(P) ta viết phương trình IH đi qua I vuông góc với (P). Khi đó, tọa độ H là giao điểm của đường thẳng IH với (P). Ta có lời giải như sau:

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-2;1)$, $R=\sqrt{14}$.

Ta có : $d(I,(P))=\dfrac{|2(1)+3(-2)+1-11|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}=R$.

Vậy (P) tiếp xúc với (S).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) là :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1}$$

Vì $H\in d \Rightarrow H(1+2t;3t-2;1+t)$.

Do $H\in(P)$ nên $2(1+2t)+3(3t-2)+1+t-11=0 \Leftrightarrow t=1$. Vậy $P(3;2;1)$.

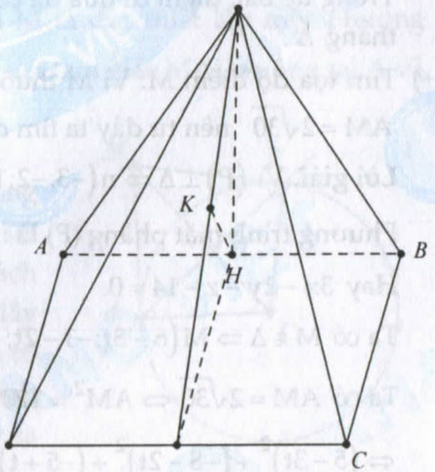
* **Khối B – 2013**

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Phân tích:

+) Để tính thể tích khối chóp, trước hết ta phải đi xác định chân đường cao của hình chóp. Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy nên chân đường cao của hình chóp chính là chân đường cao của tam giác SAB vẽ từ S hay đó chính là trung điểm cạnh AB (do tam giác SAB đều).

+) Ta thấy AH song song với (SCD) nên $d(A,(SCD))=d(H,(SCD))$. Ta có lời giải như sau



Lời giải. Gọi H là trung điểm cạnh AB, suy ra $SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(ABCD)$ và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là: $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Gọi M là trung điểm CD và K là hình chiếu vuông góc của H lên SM. Ta có $CD\perp(SHM)\Rightarrow CD\perp HK$

Do đó $HK\perp(SCD)$.

Mặt khác $AH//(SCD)\Rightarrow d(A,(SCD))=d(H,(SCD))=HK=\dfrac{SH.HM}{\sqrt{SH^2+HM^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 7a. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Phân tích: Gọi I là giao điểm của AC và BD. Từ đề bài, ta thấy AI vuông góc với BD nên H thuộc AI và I là hình chiếu của H lên BD, từ đây ta tìm được điểm I và viết được phương trình AC và BD, khi đó tọa độ của C và D chi có 1 ẩn. Lại có, tam giác IBC vuông cân tại I và tam giác CBH vuông tại B nên ta có $IC=IH=IB$, từ đó ta tìm được tọa độ C, B. Dựa vào $\overrightarrow{ID}=-3\overrightarrow{IB}$ ta xác định được tọa độ điểm D.

Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, ta có AI vuông góc với BD nên H thuộc AI.

Phương trình HI: $2x-y+8=0$.

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-6=0\\2x-y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}\Rightarrow I(-2;4)$.

Ta có Tam giác BIC vuông cân tại I nên góc $\widehat{CBI}=45^0$. Mặt khác, ΔCBH vuông tại H nên BI phân giác của góc $CBH\Rightarrow I$ là trung điểm CH, do đó $IC=IB=IH$.

Vì $C\in IH\Rightarrow C(c;2c+8)\Rightarrow IC=IH\Leftrightarrow(c+2)^2+(2c+4)^2=5\Leftrightarrow c=-1,c=-3$.

Suy ra $C(-1;6)$.

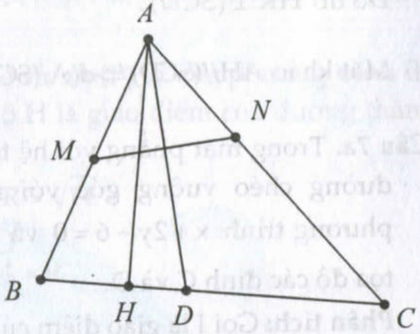
Tương tự $B(6-2b;b)\Rightarrow IB=IH\Leftrightarrow(8-2b)^2+(4-b)^2=5\Leftrightarrow b=5,b=3$.

+) Với $b=3\Rightarrow B(0;3)$. Ta có $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{ID}=-3\overrightarrow{IB}$, suy ra $D(-8;7)$

+) Với $b=5\Rightarrow B(-4;5)$, tương tự ta có $D(4;1)$.

Câu 7b. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là D (5; 3) và trung điểm của cạnh AB là M (0; 1). Tìm tọa độ đỉnh C.

Phân tích: Từ đề bài ta có phương trình BC, suy ra phương trình của AH. Do đó, tọa độ của A chỉ có 1 ẩn, lấy đối xứng qua M ta có tọa độ điểm B. Dựa vào AH vuông góc với BH ta tìm được tọa độ điểm A và B. Lấy đối xứng M qua AD ta được điểm N thuộc đường thẳng AC, từ đó ta viết được phương trình AC. Dựa vào C là giao điểm của BC và AC ta tìm được C. Vậy ta có lời giải như sau:



Lời giải. Ta có, phương trình BC : $2x-y-7=0$; phương trình AH : $x+2y-3=0$

Vì $A\in AH\Rightarrow A(3-2a;a)\Rightarrow B(2a-3;2-a)$.

Vì $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB}=0$ nên ta có $\Rightarrow a=3\Rightarrow A(-3;3),\ B(3;-1)$.

Phương trình AD : $y=3\Rightarrow N\ (0;5)$ là điểm đối xứng của M qua AD $\Rightarrow N\in AC$

$\Rightarrow$ Phương trình AC : $2x-3y+15=0$ và phương trình BC : $2x-y-7=0$

Vậy C (9; 11).

Câu 8a. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A (3; 5; 0) và mặt phẳng (P) : 2x + 3y – z – 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua (P).

Phân tích: Đường thẳng d cần viết phương trình vuông góc với (P) nên nhận VTPT của (P) làm VTCP, từ đó ta viết được phương trình d.

Gọi A′ đối xứng với A qua (P) và H là giao điểm của d và (P), ta có H là trung điểm AA′. Do đó, xác định được H ta sẽ có điểm A′. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Ta có $\vec{n}=(2;3;-1)$ là VTPT của (P). Suy ra đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}$ làm VTCP.

Phương trình $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=5+3t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$.

Gọi H là giao điểm của d với (P) và A′ là điểm đối xứng với A qua (P).

Ta có

$H(3+2t;5+3t;-t)\in(P)\Rightarrow 2(3+2t)+3(5+3t)+t-7=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow H(1;2;1)$

Vì H là trung điểm AA′ nên $A'(-1;-1;2)$.

Câu 8b. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1; –1; 1), B (–1; 2; 3) và đường thẳng $\Delta:\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với hai đường thẳng qua AB và Δ.

Phân tích: Để viết phương trình đường thẳng ta cần tìm một điểm đi qua và một VTCP. Để tìm VTCP, ta thường tìm hai vectơ không cùng phương và cùng vuông góc với đường thẳng đó. Khi đó , tích có hướng của hai vectơ đó là VTCP của đường thẳng.

Trong để bài, đường thẳng d cần viết phương trình vuông góc với AB và Δ nên $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}_{\Delta}$ là VTCP của d. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Gọi d là đường thẳng cần lập phương trình.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3;2)$ và $\vec{u}=(-2;1;3)$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Vì d vuông góc với Δ và AB nên $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=(6;2;4)$ là VTCP của d .

Vậy phương trình $d:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

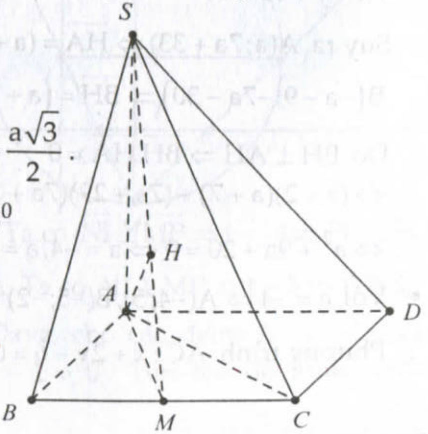
* Khối D – 2013

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD}=120^0$ M là trung điểm cạnh BC và $\widehat{SMA}=45^0$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến (SBC).

Phân tích: Để bài cho SA là đường cao của hình chóp nên ta đi tính SA dựa vào tam giác SAM vuông tại A.

Vì AD//(SCB) nên $d(D,(SBC))=d(A,(SBC))$. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải.



Lời giải. Vì $\widehat{BAD}=120^0\Rightarrow\widehat{ABC}=60^0$

$\Rightarrow\Delta ABC$ đều, suy ra $AM\perp BC$ và $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAM vuông tại M và $\widehat{SMA}=45^0$

$\Rightarrow SA=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là: $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^3}{8}$.

Vì $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d(D,(SBC))=d(A,(SBC))$

Vẽ $AH\perp SM$.

Do $\begin{cases} BC\perp AM \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp AH$

Từ đó suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=AH$.

Mà $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{2}{AM^2}=\frac{2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

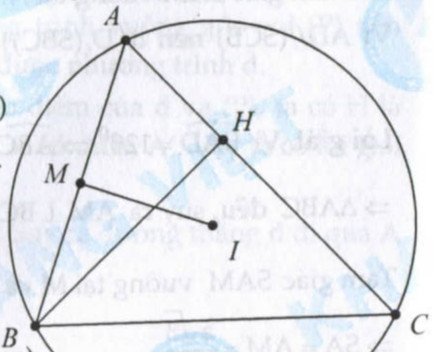
Vậy $d(D,(SBC))=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 7a. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB, điểm $H(-2;4), I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao vẽ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ đỉnh C.

Phân tích: Vì M và I là trung điểm cạnh AB và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên IM vuông góc với AB, từ đây ta có phương trình của AB.

Ta gọi tọa độ của A (chỉ có 1 ẩn) lấy đối xứng qua M ta có tọa độ của B. Dựa vào AH và BH vuông góc ta tìm được tọa độ của A và B.

Có A, H nên ta có phương trình AC. Dựa vào $IA=IC$ ta tìm được tọa độ điểm C.



Lời giải. Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$. Vì $IM\perp AB$ nên phương trình AB: $7x-y+33=0$.

Suy ra $A(a;7a+33)\Rightarrow\overrightarrow{HA}=(a+2;7a+29)$

$B(-a-9;-7a-30)\Rightarrow\overrightarrow{BH}=(a+7;7a+34)$.

Do $BH\perp AH\Rightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HA}=0$

$\Leftrightarrow(a+2)(a+7)+(7a+29)(7a+34)=0$

$\Leftrightarrow a^2+9a+20=0\Leftrightarrow a=-4, a=-5$.

- Với $a=-4\Rightarrow A(-4;5), B(-5;-2)\Rightarrow\overrightarrow{BH}=(3;6)$.

  Phương trình $AC: x+2y-6=0\Rightarrow C(6-2c;c)$.

Ta có: $IC^2=IA^2\Rightarrow(7-2c)^2+(c-1)^2=25\Leftrightarrow c^2-6c+5=0\Leftrightarrow c=1, c=5$

Suy ra $C(4;1)$.

- Với $a=-5\Rightarrow A(-5;-2), B(-4;5)\Rightarrow\overrightarrow{BH}=(2;-1)$

  Phương trình $AC: 2x-y+8=0\Rightarrow C(c;2c+8)$.

  Ta có: $IC^2=IB^2\Rightarrow(c+1)^2+(2c+7)^2=25\Leftrightarrow c^2+6c+5=0\Leftrightarrow c=-1, c=-5$

  Suy ra $C(-1;6)$.

  Vậy $C(4;1)$ hoặc $C(-1;6)$.

Câu 7b. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

Phân tích: Ta thấy (C) và Δ tiếp xúc với nhau tại T, mà tâm I là trực tâm nên M là giao của TI với (C).

Gọi J là trung điểm MN, suy ra IJ là đường trung bình nên IJ song song với Δ và J thuộc (C) nên ta tìm được tọa độ điểm J, lấy đối xứng ta có điểm N.

Vì P thuộc Δ nên tọa độ của P chỉ có 1 ẩn, dựa vào NI vuông góc với MP ta tìm được P. Vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), R = 2.

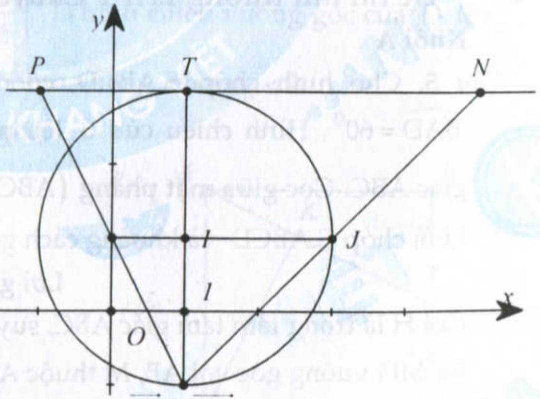
Ta có $d(I,\Delta)=R$ nên suy ra Δ tiếp xúc (C) tại T.

Do I là trực tâm tam giác PMN nên MI vuông góc Δ, suy ra $x_M=x_I=1$.

Mà M thuộc (C) nên $M(1;-1)$

Gọi J là trung điểm MN suy ra IJ là đường trung bình của tam giác MTN, suy ra $y_J=y_I=1$

Mà J thuộc (C) nên J(3; 1) hay J(-1; 1).



+) Với J(3; 1) thì N(5; 3). Gọi P(t; 3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}\Rightarrow t=-1\Rightarrow P(-1;3)$.

+) Với J(−1; 1) thì N(−3; 3). Gọi P(t; 3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}\Rightarrow t=3\Rightarrow P(3;3)$.

Câu 8a. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(−1; −1; −2), B(0; 1; 1) và mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P).

Phân tích: Để lập phương trình mặt phẳng ta cần tìm một điểm đi qua và VTPT. Để tìm VTPT ta thường tìm hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng đó. Với bài toán trên, mặt phẳng cần viết đi qua A,B và vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{AB} \wedge n_P$ là VTPT. Vậy ta có lời giải sau:

Lời giải. Gọi (α) là mặt phẳng cần lập. Ta có $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTPT của (P).

Vì (α) đi qua A, B và vuông góc với (P) nên $\vec{n'} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = (-1;2;-1)$ là VTPT của (α).

Phương trình (α) là: $x - 2y + z - 1 = 0$.

Câu 8b. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(–1; 3; –2) và mặt phẳng (P): x – 2y – 2z + 5 = 0. Tính khoảng cách từ A đến (P). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với (P).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d(A,(P)) = \frac{|-1-6+4+5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}$

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

(Q) đi qua A và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-2;-2)$

$\Rightarrow$ (Q): x – 2y – 2z +3 = 0.

Đề thi thử trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh năm 2014.

* Khối A

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^0$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.

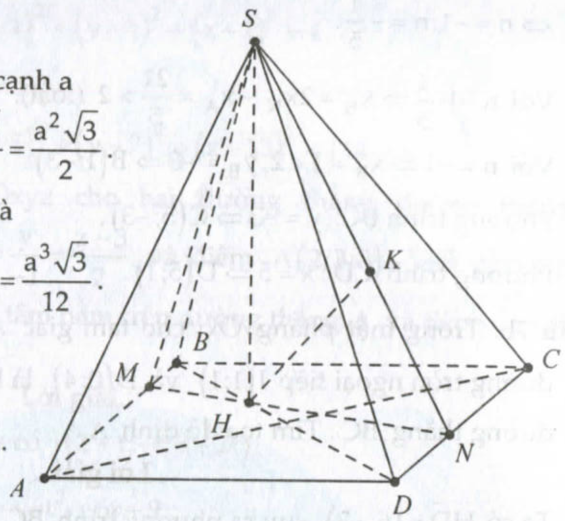
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ MH vuông góc với AB, M thuộc AB.

Ta có $\widehat{SMH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$, do đó $\widehat{SMH} = 60^0$.

Vì $\frac{HB}{DB} = \frac{1}{3}$ nên $MH = \frac{1}{3}d(D,AB) = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

suy ra $SH = MH.\tan 60^0 = \frac{a}{2}$.



Mặt khác tam giác ABD đều cạnh a

nên $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Ta có AB//(SCD)

$$\Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(B,(SCD)) = \frac{3}{2}d(H,(SCD)).$$

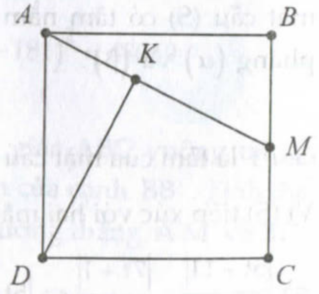
Gọi N, K theo thứ tự là hình chiếu của H lên CD và SN, khi đó $d(H,(SCD)) = HK$.

Vì $HN = \frac{2}{3}d(B,CD) = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2+HN^2}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d(AB,SC) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Câu 7a. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có $A(1;1)$, $AB = 4$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, $K\left(\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của D lên AM. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông, biết $x_B < 2$.

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của DK và AB.

Khi đó $\Delta DAN = \Delta ABM \Rightarrow AN = BM$

$\Rightarrow$ N là trung điểm cạnh AB.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \left(\frac{4}{5};-\frac{8}{5}\right)$ phương trình

AM: $2x + y - 3 = 0$, DK: $x - 2y - 3 = 0$.

Vì $N \in DK \Rightarrow N(2n+3;n) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (2n+2;n-1)$.

Mà $AN = \frac{1}{2}AB = 2 \Rightarrow AN^2 = 4 \Leftrightarrow (2n+2)^2 + (n-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 5n^2 + 6n + 1 = 0$

$\Leftrightarrow n=-1, n=-\frac{1}{5}$.

+) Với $n=-\frac{1}{5} \Rightarrow x_B = 2x_N - x_A = \frac{21}{5} > 2$ (loại).

+) Với $n=-1 \Rightarrow x_B = 1 < 2, y_B = -3 \Rightarrow B(1;-3)$.

Phương trình BC: $y=-3 \Rightarrow C(5;-3)$.

Phương trình CD: $x=5 \Rightarrow D(5;1)$.

Câu 7b. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-6;7)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;1)$ và $D(0;4)$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC. Tìm tọa độ đỉnh A.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{HD}=(6;-3)$, suy ra phương trình $BC: 2x-y+4=0$.

Phương trình $DH: x+2y-8=0$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có $IM = d(I,BC) = \sqrt{5}$.

Kẻ đường kính BB', khi đó AHB'C là hình bình hành nên $AH = B'C = 2IM = 2\sqrt{5}$.

Vì $A \in DH \Rightarrow A(8-2a;a) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2a-14;7-a)$.

Suy ra $(2a-14)^2 + (a-7)^2 = 20 \Rightarrow (a-7)^2 = 4 \Rightarrow a=9, a=5$.

Vậy $A(2;5)$ hoặc $A(-10;9)$.

Câu 8a. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ và hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z+1=0$, $(\beta): 2x-y-2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng d và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), $I \in d$ nên $I(-t;2+t;3+2t)$.

Vì (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên $d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta))$

$\Leftrightarrow \frac{|5t+11|}{3} = \frac{|7t+1|}{3} \Leftrightarrow |5t+11| = |7t+1| \Leftrightarrow t=5, t=-1$.

+) Với $t=-1 \Rightarrow I(1;1;1)$, $R=2$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

+) Với $t=5 \Rightarrow I(-5;7;13)$, $R=12$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x+5)^2+(y-7)^2+(z-13)^2=144$.

Câu 8b. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$, $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2}$ và điểm $A(2;3;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A, có tâm nằm trên đường thẳng Δ và tiếp xúc với đường thẳng d.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S), ta có $I(2+t;-t;3+2t)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI} = (t;-t-3;2t) \Rightarrow IA = \sqrt{6t^2+6t+9}$.

Đường thẳng d đi qua $B(-1;-1;0)$ và có $\vec{u} = (-2;1;2)$ là VTCP.

$\overrightarrow{BI} = (t+3;-t+1;2t+3) \Rightarrow \overrightarrow{BI} \wedge \vec{u} = (-4t-1;-6t-12;-t+5)$

Do đó $d(I,d) = \frac{\left|\overrightarrow{BI} \wedge \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{(4t+1)^2+(6t+12)^2+(t-5)^2}}{3} = \frac{\sqrt{53t^2+142t+170}}{3}$.

Theo đề bài, ta có $d(I,d) = IA \Leftrightarrow 53t^2+142t+170 = 54t^2+54t+81$

$\Leftrightarrow t^2-88t-89=0 \Leftrightarrow t=-1, t=89$.

+) Với $t=-1 \Rightarrow I(1;1;1)$, $R = IA = 3$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

+) Với $t=89 \Rightarrow I(91;-89;181)$, $R = IA = \sqrt{48069}$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x-91)^2+(y+89)^2+(z-181)^2=48069$.

* **Khối D**

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$ và $AA'=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Tính thể tích khối chóp BMCA' và cô sin của góc giữa hai đường thẳng A'M và BC.

Lời giải.

Vẽ đường cao A'H của tam giác A'B'C'.

Ta có $A'H \perp (BMC)$ và $A'H = \frac{A'B'.A'C'}{B'C'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

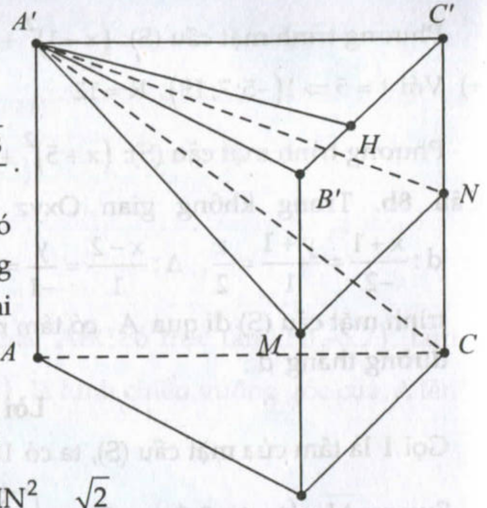
THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Mà $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}BC.BM = \frac{1}{2}.2a.a = a^2$.

Thể tích khối tứ diện $BMCA'$ là:

$V = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta MBC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Gọi N là trung điểm CC', ta có $MN//BC$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và MN.



Ta có $A'M^2 = A'B'^2 + B'M^2 = 2a^2$,

$A'N^2 = C'N^2 + A'C'^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

Suy ra $\cos\widehat{MA'N} = \frac{A'N^2 + A'M^2 - MN^2}{2A'N.A'M} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy cô sin của góc giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7a. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$, đường trung trực của đoạn DC có phương trình là $\Delta_1: 2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta_2: 5x + y - 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CD, $I \in \Delta_1$ nên $I(3a-1;-2a-5)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{DI} = 0$ trong đó $\overrightarrow{DI}(3a+5;-2a+1)$ và $\overrightarrow{u_1}(-3;2)$ là vectơ chỉ phương của Δ_1 suy ra $a = -1$.

Vậy $I(-4;-3) \Rightarrow C(-2;0)$.

Vì $A \in \Delta_2$ nên tọa độ điểm A có dạng $A(a;3-5a)$.

Mặt khác ABCD là hình bình hành tương đương với $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = 4 \\ y_B - 3 + 5a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a + 4 \\ y_B = 9 - 5a \end{cases} \Rightarrow B(a+4;9-5a)$.

$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\frac{a+6}{4} \neq \frac{9-5a}{6} \Leftrightarrow a \neq 0$

Đường thẳng Δ_2 là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vecto $\overrightarrow{u_2} = (-1;5)$ làm vec tơ chỉ phương nên

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u_2}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{u_2}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

$\Leftrightarrow \frac{26}{\sqrt{52}} = \frac{26a-13}{\sqrt{(2+a)^2 + (5a-3)^2}} \Leftrightarrow a = 1$ (thỏa mãn).

Vậy tọa độ điểm $A(1;-2)$, $B(5;4)$.

Câu 7b. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 4x + y - 9 = 0$, $d_2: 2x - y + 6 = 0$, $d_3: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết hình thoi ABCD có diện tích bằng 15, các đỉnh A,C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

Lời giải.

Vì $BD \perp AC$ nên phương trình $BD: y = -x + m$.

$B = BD \cap d_1$, suy ra $B\begin{cases} y = -x + m \\ 4x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{9-m}{3};\frac{4m-9}{3}\right)$.

Tương tự $D = BD \cap d_2 \Rightarrow D\left(\frac{m-6}{3};\frac{2m+6}{3}\right)$.

Suy ra tọa độ trung điểm của BD là $I\left(\frac{1}{2};\frac{2m-1}{2}\right)$.

Vì $I \in AC \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2m-1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Suy ra $B(2;1), D(-1;4), I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{15}{2} \Rightarrow AI = \frac{15}{BD} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow AI^2 = \frac{25}{2}$.

Mà $A \in d_3 \Rightarrow A(a;a+2) \Rightarrow AI^2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ nên ta có:

$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow a = 3, a = -2$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi là:
$A(3;5), B(2;1), C(-2;0), D(-1;4)$ hoặc $A(-2;0), B(2;1), C(3;5), D(-1;4)$.

Câu 8a. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{3}$, mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 2 = 0$ và hai điểm $A(0;-1;-2)$, $B(2;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua hai điểm A, B và cắt đường thẳng d tại C sao cho C cách mặt phẳng (α) một khoảng bằng 2.

Lời giải.

Vì $C\in d$ nên $C(5+2t;-2-t;5+3t)$.

Theo đề bài $d(C,(\alpha))=2\Rightarrow \frac{|3t|}{3}=2\Leftrightarrow t=\pm 2$

+) $t=2\Rightarrow C(9;-4;11)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4;3),\overrightarrow{AC}=(9;-3;14)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(65;-1;-42)$

Suy ra $\vec{n}=(65;-1;-42)$ là VTPT của (β).

Phương trình $(\beta): 65x-y-42z-85=0$.

+) $t=-2\Rightarrow C(1;0;-1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4;3),\overrightarrow{AC}=(1;1;1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1;1;-2)$

Suy ra $\vec{n}=(1;1;-2)$ là VTPT của (β).

Phương trình $(\beta): x+y-2z-3=0$.

Câu 8b. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{2}$ và hai điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B và cắt đường thẳng Δ tại C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $C\in\Delta\Rightarrow C(-3-t;4+2t;3+2t)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;-2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-t-3;2t+3;2t+1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-4t-2;-2t-1;-3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{20t^2+20t+14}$.

Mà $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{3\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow 20t^2+20t+14=54$

$\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow t=1, t=-2$.

+) Với $t=1\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-6;-3;-3)\Rightarrow\vec{n}=(2;1;1)$ là VTPT của (α).

Phương trình $(\alpha): 2x+y+z-3=0$.

+) Với $t=-2\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(6;3;-3)\Rightarrow\vec{n}=(2;1;-1)$ là VTPT của (α).

Phương trình $(\alpha): 2x+y-z+1=0$.

CHƯƠNG 1.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Tọa độ trong mặt phẳng.

- Cho $\vec{u}(x_1,y_1)$; $\vec{v}(x_2;y_2)$ và $k\in R$. Khi đó:

1) $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$ 2) $\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$

3) $k\vec{u}=(kx_1;ky_1)$ 4) $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 5) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$

6) $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

- Hai véc tơ $\vec{u}(x_1,y_1)$; $\vec{v}(x_2;y_2)$ cùng phương với nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=kx_2\\y_1=ky_2\end{cases}$
- Góc giữa hai véc tơ $\vec{u}(x_1,y_1)$; $\vec{v}(x_2;y_2)$: $\cos(u,v)=\frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|x_1x_2+y_1y_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.
- Cho $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$. Khi đó:

1) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$ 2) $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3) $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\[2mm]y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$ trong đó I là trung điểm của AB.

- $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.
- Cho tam giác ABC với $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Khi đó trọng tâm $G(x_G;y_G)$ của tam giác ABC là: $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\[2mm]y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$.

II. Phương trình đường thẳng

1. Phương trình đường thẳng

1.1. Véc tơ chỉ phương (VTCP), véc tơ pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng:

Cho đường thẳng d.

- $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của d nếu giá của nó vuông với d.
- $\vec{u}=(u_1;u_2)\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương của d nếu giá của nó trùng hoặc song song với đường thẳng d.

Một đường thẳng có vô số VTPT và vô số VTCP (Các véc tơ này luôn cùng phương với nhau)

- Mối quan hệ giữa VTPT và VTCP: $\vec{n}.\vec{u}=0$.
- Nếu $\vec{n}=(a;b)$ là một VTPT của đường thẳng d thì $\vec{u}=(b;-a)$ là một VTCP của đường thẳng d.
- Đường thẳng AB có $\overrightarrow{AB}$ là VTCP.

1.2. Phương trình đường thẳng

1.2.1. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT, khi đó phương trình tổng quát của d có dạng: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

1.2.2. Phương trình tham số của đường thẳng :

Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có $\vec{u}=(a;b)$ là VTCP, khi đó phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Khi đó vị trí tương đối giữa chúng phụ thuộc vào số nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu (I) vô nghiệm thì $d_1 // d_2$.
- Nếu (I) vô số nghiệm thì $d_1 \equiv d_2$
- Nếu (I) có nghiệm duy nhất thì d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

3. Góc giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có : $\cos\alpha=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.

Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và điểm $M(x_0;y_0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến Δ được tính bởi công thức: $d(M,(\Delta))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

Phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng là:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

III. Phương trình đường tròn.

1. Phương trình đường tròn :

Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R, khi đó phương trình của (C) là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Ngoài ra phương trình: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ cũng là phương trình của đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến :

Cho đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

- Tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM .
- Đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$
- Đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có hai tiếp tuyến cùng phương với Oy là $x=a\pm R$. Ngoài hai tiếp tuyến này các tiếp tuyến còn lại đều có dạng : $y=kx+m$.

IV. E líp

1. **Định nghĩa:** Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1, F_2 có $F_1F_2=2c$. Tập hợp các điểm M của mặt phẳng sao cho $MF_1+MF_2=2a$ ($2a$ không đổi và $a>c>0$) là một đường elíp.

- F_1, F_2 : là hai tiêu điểm và $2c$ là tiêu cự của elíp.
- MF_1, MF_2 : là các bán kính qua tiêu.

2. Phương trình chính tắc của elíp:

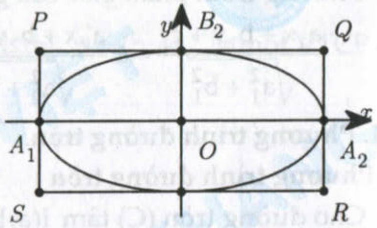
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ với } b^2=a^2-c^2.$$

Vậy điểm $M(x_0;y_0)\in(E)\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ và $|x_0|\le a$; $|y_0|\le b$.

3. **Tính chất và hình dạng của elíp:** Cho (E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.

- Trục đối xứng Ox, Oy . Tâm đối xứng O .

- Đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$ và $B_2(0;b)$. $A_1A_2=2a$ gọi là độ dài trục lớn, $B_1B_2=2b$ gọi là độ dài trục bé.
- Tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở PQRS có kích thước 2a và 2b với $b^2=a^2-c^2$.



- Tâm sai: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$.
- Hai đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$
- $M(x_0;y_0)\in(E)$: $MF_1=a+ex_0$ và $MF_2=a-ex_0$.

V. Hypebol

1. **Định nghĩa**: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm F_1,F_2 có $F_1F_2=2c$. Tập hợp các điểm M của mặt phẳng sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$ (2a không đổi và $c>a>0$) là một Hypebol.

- F_1, F_2 : là 2 tiêu điểm và $F_1F_2=2c$ là tiêu cự.
- MF_1,MF_2 : là các bán kính qua tiêu.

2. **Phương trình chính tắc của hypebol:** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$.

3. **Tính chất và hình dạng của hypebol (H):**

- Trục đối xứng Ox (trục thực), Oy (trục ảo). Tâm đối xứng O.
- Đỉnh: $A_1(-a;0),A_2(a;0)$. Độ dài trục thực: 2a và độ dài trục ảo: 2b.
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Hai tiệm cận: $y=\pm\frac{b}{a}x$.
- Hình chữ nhật cơ sở PQRS có kích thước 2a, 2b với $b^2=c^2-a^2$.
- Tâm sai: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.
- Hai đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$.
- Độ dài các bán kính qua tiêu của $M(x_0;y_0)\in(H)$:

  +) $MF_1=ex_0+a$ và $MF_2=ex_0-a$ khi $x_0>0$.

  +) $MF_1=-ex_0-a$ và $MF_2=-ex_0+a$ khi $x_0<0$.

- $M(x_0;y_0)\in(E)$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ và ta luôn có $|x_0|\ge a$.

VI. Parabol

1. **Định nghĩa:** Parabol là tập hợp các điểm M của mặt phẳng cách đều một đường thẳng Δ cố định và một điểm F cố định không thuộc Δ.

   Δ : đường chuẩn; F : tiêu điểm và $d(F,\Delta)=p>0$ là tham số tiêu.

2. **Phương trình chính tắc của Parabol:** $y^2=2px$

3. **Hình dạng của Parabol (P) :**

- Trục Ox là trục đối xứng, đỉnh O. Tiêu điểm $F(\frac{p}{2};0)$.
- Đường chuẩn $\Delta: x=-\frac{p}{2}$.
- $M(x;y)\in(P)$: $MF=x+\frac{p}{2}$ với $x\ge0$.

§1. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. **Phương pháp chung.**

   Để lập phương trình đường thẳng Δ ta thường dùng các cách sau

- Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ mà Δ đi qua và một VTPT $\vec{n}=(a;b)$. Khi đó phương trình đường thẳng cần lập là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.
- Giả sử đường thẳng cần lập $\Delta: ax+by+c=0$. Dựa vào điều kiện bài toán ta tìm được $a=mb, c=nb$. Khi đó phương trình $\Delta: mx+y+n=0$. Phương pháp này ta thường áp dụng đối với bài toán liên quan đến khoảng cách và góc
- Phương pháp quỹ tích: $M(x_0;y_0)\in\Delta: ax+by+c=0\Leftrightarrow ax_0+by_0+c=0$.

Chú ý: 1) Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$

- Nếu $\Delta_1//\Delta$ thì $\Delta_1: ax+by+c_1=0,\ c_1\ne c$
- Nếu $\Delta_2\perp\Delta$ thì $\Delta_2: bx-ay+c_2=0$.

2) Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$; $ab\ne0$ có phương trình:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

2. **Các dạng toán thường gặp.**

Dạng toán 1: Viết phương trình đường thẳng khi biết điểm đi qua và phương của đường thẳng

Phương pháp giải.

* Nếu đường thẳng đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là VTCP.

* Hai đường thẳng song song thì chúng có cùng VTCP và cùng VTPT.

Ví dụ 1.1.1. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(2;2)$, $B(1;-5)$, $C(8;-4)$.

1) Chứng minh rằng A,B,C là ba đỉnh của một tam giác.
2) Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.
3) Viết phương trình đường trung trực cạnh AB.
4) Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài góc A.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-7)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-6)$

Vì $\frac{-1}{6}\neq\frac{-7}{-6}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, hay A,B,C là ba đỉnh của một tam giác.

2) Vì M là trung điểm cạnh BC nên $M\left(\frac{9}{2};-\frac{9}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{2};-\frac{13}{2}\right)$ nên $\vec{n}=(13;5)$ là VTPT của đường thẳng AM.

Vậy phương trình AM là: $13(x-2)+5(y-2)=0$ hay $13x+5y-36=0$.

3) Gọi N là trung điểm AB, ta có $N\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-7)$ là VTPT của đường trung trực cạnh AB nên phương trình đường trung trực cạnh AB là: $x+7y+16=0$.

4) Gọi AD là đường phân giác trong góc A. Để lập phương trình AD ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $AB=5\sqrt{2}$, $AC=6\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BC}=(7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2}$

Suy ra $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{5}{11}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\frac{5}{11}\overrightarrow{BC}$.

Hay $\begin{cases}x_D-1=\frac{35}{11}\\ y_D+5=\frac{5}{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=\frac{46}{11}\\ y_D=-\frac{50}{11}\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{46}{11};-\frac{50}{11}\right)$.

Do đó $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{24}{11};-\frac{72}{11}\right)\Rightarrow\vec{n}=(3;1)$ là VTPT của AD.

Phương trình $AD: 3x+y-8=0$.

Cách 2: Đặt $\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}=\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}};-\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Khi đó $\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=\left(\frac{4}{5\sqrt{2}};-\frac{12}{5\sqrt{2}}\right)$ là VTCP của AD, nên $\vec{n}=(3;1)$ là VTPT của AD.

Phương trình $AD: 3x+y-8=0$.

Cách 3: Xét $E(x;y)\in AD$, ta có $d(E,AB)=d(E,AC)$

Mà phương trình $AC: 7x-y-12=0$, $AB: x+y-4=0$

Nên $\frac{|7x-y-12|}{5\sqrt{2}}=\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-y-12=5x+5y-20\\ 7x-y-12=-5x-5y+20\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3y+4=0\\ 3x+y-8=0\end{array}\right.$.

Với mỗi điểm $F(x;y)$, ta kí hiệu $f(F)=x-3y+4$.

Ta có $f(B)=20, f(C)=24\Rightarrow f(B).f(C)>0$ do đó B và C nằm cùng phía so với đường thẳng $x-3y+4=0$. Vậy phương trình $AD: 3x+y-8=0$.

Dạng toán 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và liên quan đến khoảng cách và góc.

Phương pháp giải.

Đường thẳng đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ nên phương trình có dạng

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ với } a^2+b^2>0.$$

Ví dụ 1.1.2. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(1;2)$, $B(3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ biết:

2) Đường thẳng Δ đi qua A và cách B một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3) Đường thẳng Δ đi qua $C(1;0)$ và khoảng cách từ A đến Δ gấp 2 lần khoảng cách từ B đến Δ.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3)$ là VTPT của đường thẳng Δ.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ là:

$2(x-1)-3(y-2)=0\Leftrightarrow 2x-3y+4=0$.

2) Vì Δ đi qua A nên phương trình Δ có dạng

$a(x-1)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-a-2b=0$ (*) với $a^2+b^2>0$.

Theo đề bài $d(B,\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên ta có:

$$\frac{|3a-b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2(2a-3b)^2=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow 7a^2-24ab+17b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(7a-17b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\\ a=\frac{17}{7}b\end{array}\right..$$

- $a=b$, ta chọn $a=b=1$ thay vào (*) ta có $x+y-3=0$
- $a=\frac{17}{7}b$, ta chọn $a=17, b=7$ thay vào (*) ta có $17x+7y-31=0$.

3) Vì Δ đi qua $C(1;0)$ nên phương trình Δ có dạng

$ax+by-a=0$ (**) với $a^2+b^2>0$.

Mặt khác $d(A,\Delta)=2d(B,\Delta)$ nên ta có

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |a+b|=|2a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=2a-b\\ a+b=-2a+b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b\\ a=0\end{array}\right.$$

- Khi $a=2b$, ta chọn $a=2, b=1$ thay vào (**) ta được $2x+y-2=0$
- Khi $a=0$, thay vào (**) ta có $y=0$.

Ví dụ 1.1.3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $E(2;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua E và cắt hai tia Ox, Oy tại A, B sao cho:

1) $OA=2OB$
2) Tam giác AOB có diện tích bằng 8
3) Tam giác AOB có chu vi nhỏ nhất 7
4) Khoảng cách từ O đến d lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a,b>0$. Phương trình d có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Vì $E\in d$ nên $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$ (1).

1) Ta có $OA=2OB \Leftrightarrow a=2b$, thay vào (1) ta được $\frac{1}{b}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow b=3, a=6$

Phương trình đường thẳng d: $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+2y-6=0$.

2) Ta có diện tích tam giác OAB: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}ab=8 \Rightarrow ab=16$ hay $a=\frac{16}{b}$.

Thay vào (1) ta được: $\frac{b}{8}+\frac{2}{b}=1 \Leftrightarrow b^2-8b+16=0 \Leftrightarrow b=4 \Rightarrow a=4$.

Phương trình $d:\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow x+y-4=0$.

3) Ta có chu vi tam giác OAB là:

$$P=OA+OB+AB=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq a+b+\frac{a+b}{\sqrt{2}}=(a+b)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Mặt khác, từ (1) ta có $1=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{8}{a+b}\Rightarrow a+b\geq 8$.

Suy ra $P\geq 8\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=8+4\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=4$.

Phương trình $d:\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow x+y-4=0$.

4) Ta có $d(O,d)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$.

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{8}$ nên $d(O,d)\leq 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=4$.

Suy ra phương trình $d:\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow x+y-4=0$.

Ví dụ 1.1.4. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $P(1;7)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x-y+1=0$; $d_2: x-2y-1=0$.

1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua P và cắt d_1, d_2 tại hai điểm A,B sao cho tam giác AIB cân tại I với $I=d_1\cap d_2$.
2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(-3;4)$ cắt d_1, d_2 lần lượt tại E,F sao cho $MF=2ME$.
3. Viết phương trình đường thẳng Δ_1 đi qua P và tạo với d_1 một góc α thỏa $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. Xét hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+1=0\\ x-2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$, suy ra $d_1\cap d_2=I(-1;-1)$.

Gọi d′ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2. Phương trình của d′:

$$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-2y-1|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y+1=x-2y-1\\ 2x-y+1=-x+2y+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+2=0\\ x-y=0\end{array}\right..$$

Vì ΔAIB cân tại I nên $\Delta \perp d'$. Do đó, phương trình Δ là:

$x-y+6=0$ hoặc $x+y-8=0$.

2. Gọi $E(m;2m+1)$, $F(2n+1;n)$,

Suy ra $\overrightarrow{ME}=(m+3;2m-3)$, $\overrightarrow{MF}=(2n+4;n-4)$

Vì M,E,F thẳng hàng và $MF=2ME$ nên ta có các trường hợp sau

- $\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{ME}\Leftrightarrow\begin{cases}2n+4=2(m+3)\\n-4=2(2m-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n-m=1\\n-4m=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$

  Suy ra $\overrightarrow{ME}=(4;-1)\Rightarrow\vec{n}=(1;4)$ là VTPT của d.

  Phương trình $d: x+4y-13=0$.

- $\overrightarrow{MF}=-2\overrightarrow{ME}\Leftrightarrow\begin{cases}2n+4=-2(m+3)\\n-4=-2(2m-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+m=-5\\n+4m=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=-10\end{cases}$

  Suy ra $\overrightarrow{ME}=(8;7)\Rightarrow\vec{n}=(7;-8)$ là VTPT của d.

  Phương trình $d: 7x-8y+43=0$.

3. Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1}=(2;-1)$ là VTCP. Gọi $\vec{u}=(a;b)$ là VTCP của Δ_1.

Theo đề bài ta có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\vec{u}\right)\right|=\frac{|\overrightarrow{u_1}.\vec{u}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\vec{u}|}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow|2a-b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(2a-b)^2=4\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3b^2+4ab=0\Leftrightarrow b=0, a=-\frac{3}{4}b.$$

- Với $b=0\Rightarrow\vec{u}=(a;0)=a(1;0)$. Phương trình $\Delta_1: x=1$
- Với $a=-\frac{3}{4}b$, suy ra $\vec{u}=\left(-\frac{3}{4}b;b\right)=-\frac{b}{4}(3;-4)$.

Phương trình Δ_1: $3x-4y+25=0$.

Ví dụ 1.1.5. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $P(-7;8)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x+5y+3=0$, $d_2: 5x-2y-7=0$ cắt nhau tại A. Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua P tạo với d_1,d_2 thành tam giác cân tại A và có diện tích bằng 14,5.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+5y+3=0\\5x-2y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow A(1;-1)$.

Phương trình phân giác của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng d_1,d_2 là:

$$|2x+5y+3|=|5x-2y-7|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_1: 3x-7y-10\\\Delta_2: 7x+3y+4=0\end{array}\right.$$

Vì $d_1\perp d_2$ và d_3 tạo với d_1,d_2 một tam giác vuông cân nên d_3 vuông góc với Δ_1 hoặc Δ_2.

Do đó, phương trình d_3 có dạng: $3x-7y+c=0$ hoặc $7x+3y+c'=0$.

Vì d_3 đi qua $P(-7;8)$ nên ta có $c=77, c'=25$.

Suy ra $d_3: 3x-7y+77=0$ hoặc $d_3: 7x+3y+25=0$.

Mặt khác $S=\frac{29}{2}$ nên $d(A,d_3)=\frac{\sqrt{58}}{2}$.

Từ đó, ta tìm được $d_3: 7x+3y+25=0$.

Ví dụ 1.1.6. Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng: $2x-5y+1=0$, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng : $12x-y-23=0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm (3;1).

Lời giải.

Đường thẳng AC đi qua điểm (3; 1) nên có phương trình:

$a(x-3)+b(y-1)=0$ $(a^2+b^2\neq0)$.

Góc của nó tạo với BC bằng góc của AB tạo với BC nên:

$$\frac{|2a-5b|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2.12+5.1|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{12^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\quad\Leftrightarrow 5(2a-5b)^2=29\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+100ab-96b^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-12b\\a=\frac{8}{9}b\end{array}\right.$$

Nghiệm $a=-12b$ cho ta đường thẳng song song với AB (vì điểm (3; 1) không thuộc AB) nên không phải là cạnh tam giác .

Vậy còn lại : $9a=8b$ hay $a=8$ và $b=9$.

Phương trình cần tìm là: $8x+9y-33=0$.

Ví dụ 1.1.7. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

(C_1): $(x-5)^2+(y+12)^2=225$ và (C_2): $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(5;-12)$ bán kính $R_1=15$, Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(1;2)$ bán kính $R_1=5$. Nếu đường thẳng $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq0)$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) thì khoảng cách từ I_1 và I_2 đến đường thẳng đó lần lượt bằng R_1 và R_2, tức là:

$$\begin{cases}\dfrac{|5A-12B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=15 & (1)\\[2mm] \dfrac{|A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=5 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $|5A-12B+C|=3|A+2B+C|$

Hay $5A-12B+C=\pm3(A+2B+C)$.

TH1 : $5A-12B+C=3(A+2B+C) \Rightarrow C=A-9B$ thay vào (2) :

$|2A-7B|=5\sqrt{A^2+B^2} \Rightarrow 21A^2+28AB-24B^2=0 \Rightarrow A=\dfrac{-14\pm10\sqrt{7}}{21}B$

Nếu ta chọn B= 21 thì sẽ được $A=-14\pm10\sqrt{7}$, $C=-203\pm10\sqrt{7}$.

Vậy có hai tiếp tuyến: $(-14\pm10\sqrt{7})x+21y-203\pm10\sqrt{7}=0$.

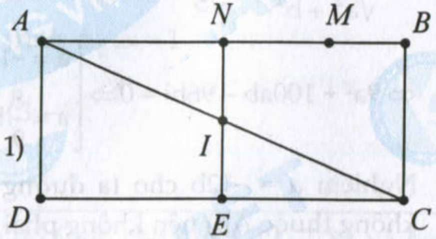
TH2 : $5A-12B+C=-3(A+2B+C) \Rightarrow C=-\dfrac{4A+3B}{2}$, thay vào (2) ta được:

$96A^2+28AB+51B^2=0$. Phương trình này vô nghiệm.

Ví dụ 1.1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d:x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Vì $E\in d \Rightarrow E(a;5-a) \Rightarrow \overrightarrow{IE}=(a-6;3-a)$.



Gọi N là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của EN nên :

$$N:\begin{cases}x_N=2x_I-x_E=12-a\\ y_N=2y_I-y_E=a-1\end{cases} \Rightarrow N(12-a;a-1)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(11-a;a-6)$.

Vì $E\perp MN \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE}=0 \Leftrightarrow (11-a)(a-6)+(a-6)(3-a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=6\\ a=7\end{array}\right.$.

- Với $a=6 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(5;0)$, suy ra phương trình $AB:y-5=0$.
- Với $a=7 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(4;1)$, suy ra phương trình $AB:x-4y+19=0$.

Ví dụ 1.1.9. Viết phương trình cạnh AB của hình chữ nhật ABCD, biết AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(-3;4)$, $N(6;-9)$, $P(8;2)$, $Q(-2;-3)$ và $S_{ABCD}=50$.

Lời giải.

Vì AB đi qua M nên phương trình có dạng: $a(x+3)+b(y-4)=0$

Phương trình $BC:b(x-6)-a(y+9)=0$.

Mặt khác:

$$S_{ABCD}=d(Q,BC).d(P,AB)=\frac{|8b+6a|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|11a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2|(3a+4b)(11a-2b)|}{a^2+b^2}$$

Theo đề bài $S_{ABCD}=50$ nên ta có phương trình

$$|33a^2+38ab-8b^2|=25(a^2+b^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8a^2+38ab-33b^2=0\\ 58a^2+38ab+17b^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}\\[2mm] \dfrac{a}{b}=-\dfrac{11}{2}\end{array}\right..$$

- $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$ ta chọn $a=3,b=4$. Phương trình AB: $3x+4y-7=0$.
- $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{11}{2}$ ta chọn $a=11,b=-2$. Phương trình AB: $11x-2y+41=0$.

Ví dụ 1.1.10. Trong mặt phẳng Oxy cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=20$. Điểm B nằm trên đường thẳng $d:2x-y-5=0$ và $x_B>0$. Viết phương trình cạnh AB của hình thoi, biết $AC=2BD$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Đặt $IB=x,x>0$. Do $AC=2BD \Rightarrow IA=2IB=2x$.

Kẻ $IH\perp AB \Rightarrow IH=R=2\sqrt{5}$.

Trong tam giác AIB, ta có:

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2} \Rightarrow \frac{1}{20}=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x=5 \text{ hay } IB=5.$$

Mặt khác $B\in d \Rightarrow B(b;2b-5) \Rightarrow \overrightarrow{IB}=(b-1;2b-4)$ nên

$$IB=5 \Leftrightarrow (b-1)^2+(2b-4)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=4\\ b=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right..$$

Do $x_B>0$ nên ta có $b=4 \Rightarrow B(4;3)$.

Phương trình AB có dạng: $a(x-4)+b(y-3)=0$

Ta có: $d(I,AB)=IH=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|3a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3a+4b)^2=20(a^2+b^2)$

$$\Leftrightarrow 11a^2-24ab+4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=\dfrac{2}{11}b \end{array}\right.$$

- $a=2b$ ta có phương trình $AB: 2x+y-11=0$
- $a=\dfrac{2}{11}b$ ta có phương trình $AB: 2x+11y-41=0$.

Ví dụ 1.1.11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình : $x-y=0$ và điểm $M(2;1)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt trục hoành tại A cắt đường thẳng (d) tại B sao cho tam giác AMB vuông cân tại M.

Lời giải.

Vì A nằm trên Ox nên $A(a;0)$, B nằm trên đường thẳng $x-y=0$ nên $B(b;b)$

Do $M(2;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA}=(a-2;-1), \overrightarrow{MB}=(b-2;b-1)$

Tam giác ABM vuông cân tại M nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \\ MA=MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(b-2)-(b-1)=0 \\ \sqrt{(a-2)^2+1}=\sqrt{(b-2)^2+(b-1)^2} \end{cases},$$

Do $b=2$ không thỏa mãn, vậy

$$\begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2}, b\neq 2 \\ (a-2)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2}, b\neq 2 \\ \left(\dfrac{b-1}{b-2}\right)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2}, b\neq 2 \\ \left[(b-2)^2+(b-1)^2\right].\left[\dfrac{1}{(b-2)^2}-1\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

+ Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ đường thẳng Δ qua AB có phương trình $x+y-2=0$

+ Với $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ đường thẳng Δ qua AB có phương trình $3x+y-12=0$.

Ví dụ 1.1.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-4)^2+y^2=25$ và điểm $M(1;-1)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B sao cho $MA=3MB$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$ và có bán kính $R=5$; $M(1;-1)$

$MI=\sqrt{10}<5=R$ nên M nằm bên trong đường tròn (C)

$$MA=3MB \Rightarrow \overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_A=4x_M-3x_B=4-3x_B \\ y_A=4y_M-3y_B=-4-3y_B \end{cases}$$

$$A,B\in(C) \text{ nên } \begin{cases} (x_A-4)^2+{y_A}^2=25 \\ (x_B-4)^2+{y_B}^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9{x_B}^2+(4+3y_B)^2=25 \\ (x_B-4)^2+{y_B}^2=25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_B=-3x_B-3 \\ {x_B}^2+x_B=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_B=0; y_B=-3 \\ x_B=-1; y_B=0 \end{array}\right.$$

Đường thẳng cần tìm đi qua B, M vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán: $\Delta_1: 2x-y+3=0$ và $\Delta_2: x+2y+1=0$.

Ví dụ 1.1.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ tâm I và điểm $A(1+\sqrt{3};2)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua A đều cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt (C) tại hai $3x+y-4\sqrt{10}-1=0$ điểm B, C sao cho tam giác IBC nhọn và có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: Đường tròn (C) tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2$

Ta có: $IA=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}<4$, suy ra điểm A nằm trong (C).

Mà $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{BIC}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.4.4.\sin\widehat{BIC}=4\sqrt{3} \Rightarrow \sin\widehat{BIC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BIC}=60^0 \Rightarrow d(I;BC)=2\sqrt{3}$.

Đường thẳng d đi qua A, nhận $\overrightarrow{n}(a;b)\ (a^2+b^2\neq 0)$ có phương trình $a(x-1-\sqrt{3})+b(y-2)=0 \Rightarrow d(I;BC)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3}a-b)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}a-b=0$

Chọn $a=1, b=\sqrt{3}$.

Từ đó phương trình đường thẳng d: $\sqrt{3}x+3y-\sqrt{3}-9=0$.

Ví dụ 1.1.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Đường tròn (C') tâm $I'(-2;-5)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{5}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

Độ dài $II'=3\sqrt{5}$

Gọi H là giao điểm của II' và AB, suy ra H là trung điểm AB nên $AH=\sqrt{5}$

Do $II'\perp AB$ nên ta có: $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5}$

TH 1: H thuộc đoạn $II'\Rightarrow I'H=2\sqrt{5}\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{II'}$

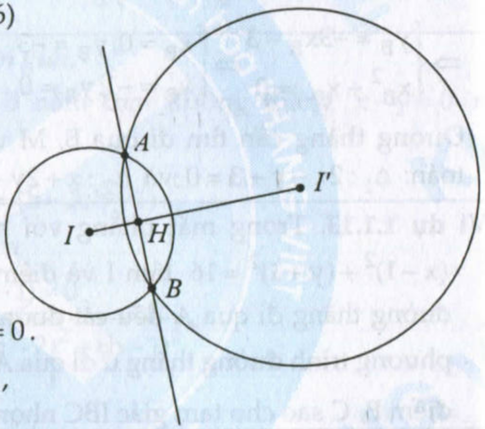
Mà $\overrightarrow{IH}=(x_H-1;y_H-1)$, $\overrightarrow{II'}=(-3;-6)$

nên ta có:

$$\begin{cases}x_H-1=-1\\ y_H-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=0\\ y_H=-1\end{cases}\Rightarrow H(0;-1)$$

Vì AB đi qua H và nhận $\vec{n}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{II'}=(1;2)$ làm VTPT

nên phương trình AB là: $x+2y+2=0$.



TH 2: H không nằm trong đoạn II',

Suy ra $I'H=4\sqrt{5}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{II'}$

$$\text{Suy ra}\begin{cases}x_H-1=-\frac{3}{4}\\ y_H-1=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\frac{1}{4}\\ y_H=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right).$$

Phương trình $AB: x+2y+\frac{3}{4}=0$.

Ví dụ 1.1.15. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=9$ có tâm I. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-6;3)$ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng $2\sqrt{2}$ và $AB>2$.

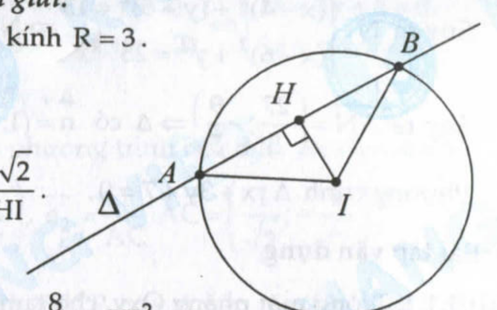
Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=3$.

Gọi H là trung điểm của AB

Suy ra $IH\perp AB$

$$\Rightarrow S_{\Delta AIB}=\frac{1}{2}HI.AB=2\sqrt{2}\Rightarrow AB=\frac{4\sqrt{2}}{HI}.$$



Mặt khác:

$$AH^2+HI^2=IA^2\Rightarrow\frac{AB^2}{4}+HI^2=9\Leftrightarrow\frac{8}{HI^2}+HI^2=9$$

$$\Leftrightarrow HI^4-9HI^2+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}HI=1\Rightarrow AB=4\sqrt{2}\\ HI=2\sqrt{2}\Rightarrow AB=2\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Vì Δ đi qua M nên phương trình Δ có dạng: $ax+by+6a-3b=0$

Mặt khác:

$$HI=1\Rightarrow d(I,\Delta)=1\Leftrightarrow\frac{|7a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\Leftrightarrow 15b^2-56ab+48a^2=0\Leftrightarrow b=\frac{4}{3}a,\ b=\frac{12}{5}a$$

Vậy $\Delta:3x+4y+6=0$ hoặc $\Delta:5x+12y-6=0$ là đường thẳng cần lập.

Ví dụ 1.1.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là giao điểm của (C₁) và (C₂) với $y_A<0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo 2 dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ: }\begin{cases}x^2+y^2=13\\ (x-6)^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\pm 3\end{cases}\Rightarrow A(2;-3),B(2;3).$$

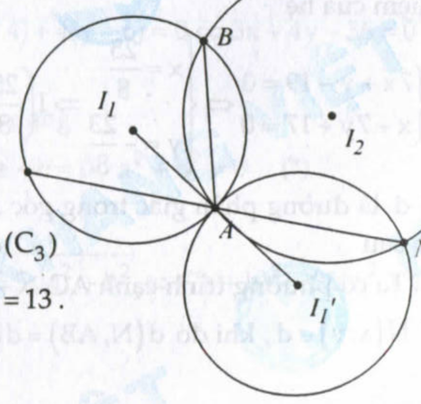
Gọi Δ là đường thẳng cần lập.

- $\Delta\equiv AB$ thỏa yêu cầu bài toán
- $\Delta\neq AB$ giả sử Δ cắt hai đường tròn (C₁), (C₂) lần lượt tại M, N

Phép đối xứng tâm A biến M thành N và (C_1) thành (C_3)

Vì $M\in(C_1)\Rightarrow N\in(C_3)\Rightarrow N\in(C_2)\cap(C_3)$

Phương trình $(C_3):(x-4)^2+(y+6)^2=13$.



Suy ra N: $\begin{cases}(x-4)^2+(y+6)^2=13\\(x-6)^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{37}{5};\frac{24}{5}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{27}{5};-\frac{9}{5}\right)\Rightarrow \Delta$ có $\vec{n}=(1;3)$ là VTPT

Phương trình $\Delta: x+3y+7=0$.

3. Bài tập vận dụng

Bài 1.1.1. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;-6)$, $C(7;-5)$.

1. Viết phương trình đường thẳng AB
2. Viết phương trình đường trung trực cạnh BC và AB. Từ đó, hãy tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
3. Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-7)$ là VTCP của đường thẳng AB nên $\vec{n}=(7;-1)$ là VTPT của đường thẳng AB. Vậy phương trình đường thẳng AB là:

   $7(x-1)-1.(y-1)=0\Leftrightarrow 7x-y-6=0$.

2. Gọi M là trung điểm cạnh BC, suy ra $M\left(\frac{7}{2};-\frac{11}{2}\right)$

   Ta có: $\overrightarrow{BC}=(7;1)$ và BC vuông góc với đường trung trực của cạnh BC nên phương trình trung trực cạnh BC là:

   $7.\left(x-\frac{7}{2}\right)+1.\left(y+\frac{11}{2}\right)=0\Leftrightarrow 7x+y-19=0$.

   Tương tự, ta có phương trình đường trung trực cạnh AB là:

   $x+7y+17=0$.

   Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có toạ độ của I là nghiệm của hệ

   $$\begin{cases}7x+y-19=0\\x+7y+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{25}{8}\\y=-\dfrac{23}{8}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{25}{8};-\frac{23}{8}\right).$$

3. Gọi d là đường phân giác trong góc A. Để lập phương trình của d ta có các cách sau

Cách 1: Ta có phương trình cạnh AC: $x+y-2=0$.

Gọi $N(x;y)\in d$, khi đó $d(N,AB)=d(N,AC)$ hay là

$$\frac{|7x-y-6|}{5\sqrt{2}}=\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-y-6=5(x+y-2)\\7x-y-6=-5(x+y-2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-7y+4=0\\3x+y-4=0\end{array}\right..$$

Với điểm $N(x;y)$, ta đặt $f(N)=2x-7y+4$

Ta có: $f(B)=46>0$, $f(C)=53>0$ nên phương trình của d là: $3x+y-4=0$.

Cách 2: Đặt $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}};-\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Khi đó: $\vec{u}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=\left(\frac{4}{5\sqrt{2}};-\frac{12}{5\sqrt{2}}\right)$ là VTCP của d nên $\vec{n}=(3;1)$ là VTPT của d.

Phương trình của d là: $3x+y-4=0$.

Cách 3. Gọi $N(x;y)$ thuộc d, khi đó:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN}}{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}}{AC}\Leftrightarrow 3x+y-4=0.$$

Vậy phương trình $d: 3x+y-4=0$.

Bài 1.1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(4;6)$
2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ điểm $N(-6;1)$
3) Từ $E(-6;3)$ vẽ hai tiếp tuyến EA, EB (A, B là tiếp điểm) đến (C). Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=5$.

1) Tiếp tuyến đi qua M và vuông góc với IM nên nhận $\overrightarrow{IM}=(3;4)$ làm VTPT nên phương trình tiếp tuyến là: $3(x-4)+4(y-6)=0\Leftrightarrow 3x+4y-36=0$.
2) Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

   Do Δ đi qua N nên phương trình có dạng

   $\Delta: a(x+6)+b(y-1)=0\Leftrightarrow ax+by+6a-b=0$, $a^2+b^2\neq 0$ (*)

   Ta có:

   $$d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|7a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\Leftrightarrow|7a+b|=5\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(7a+b)^2=25(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 24a^2+14ab-24b^2=0 \Leftrightarrow 24\left(\frac{a}{b}\right)^2+12\frac{a}{b}-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{4}b \\ a=-\frac{4}{3}b \end{array}\right..$$

- $a=\frac{3}{4}b$ thay vào (*) ta có: $\frac{3}{4}bx+by+\frac{7}{2}b=0 \Leftrightarrow 3x+4y+14=0$.
- $a=-\frac{4}{3}b$ thay vào (*) ta có: $-\frac{4}{3}bx+by-9b=0 \Leftrightarrow 4x-3y+27=0$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán là:

$3x+4y+14=0$ và $4x-3y+27=0$.

3) Gọi $A(a;b)$. Ta có:

$$\begin{cases} A\in(C) \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{NA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-2)^2=25 \\ (a-1)(a+6)+(b-2)(b-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a-4b-20=0 \\ a^2+b^2+5a-5b=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7a-b+20=0$

Từ đó ta suy ra được $A\in\Delta: 7x-y+20=0$.

Tương tự ta cũng có được $B\in\Delta \Rightarrow AB\equiv\Delta \Rightarrow AB: 7x-y+20=0$.

Bài 1.1.3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt Ox, Oy tại hai điểm AB sao cho:

1. Tam giác OAB cân.
2. Tam giác OAB có diện tích bằng 4.
3. Khoảng cách từ O đến Δ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0)$, $B(0;b)$. Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Do Δ đi qua M nên: $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ (1).

1. Tam giác OAB cân khi và chỉ khi $OA=OB \Leftrightarrow |a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$.

- Với $a=b$, thay vào (1) ta có: $\frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=3$. Phương trình $\Delta: x+y-3=0$.
- Với $a=-b$, thay vào (1) ta có: $\frac{1}{a}=1 \Rightarrow a=1$. Phương trình $\Delta: x-y-1=0$.

2. Diện tích tam giác OAB: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}|ab|=4 \Rightarrow |ab|=8$ (2).

Từ (1), suy ra $b=\frac{a}{a-2}$ thay vào (2):

$$\frac{a^2}{|a-2|}=8 \Leftrightarrow a^2=8|a-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-8a+16=0 \\ a^2+8a-16=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \Rightarrow b=2 \\ a=-4\pm4\sqrt{2} \Rightarrow b=-2\mp2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình của Δ là: $x+2y-4=0$ hoặc $\frac{x}{-4\pm4\sqrt{2}}+\frac{y}{-2\mp2\sqrt{2}}=1$.

3. Ta có $d(O,\Delta)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$.

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz (Bunyacopski) ta có:

$$1^2=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \le \left(2^2+1^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{5}$$

Do đó $d(O,\Delta)\le 5$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=4, b=2$.

Phương trình $\Delta: x+2y-4=0$.

Bài 1.1.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(3;2)$ và phương trình hai đường trung tuyến $BM: 3x+4y-3=0$, $CN: 3x-10y-17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y-3=0 \\ 3x-10y-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{7}{3};-1\right).$$

Gọi E là trung điểm của BC, suy ra $\overrightarrow{EA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow E(2;-\frac{5}{2})$.

Giả sử $B(a;b)$, suy ra $C(4-a;-5-b)$. Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 3a+4b-3=0 \\ 3(4-a)-10(-5-b)-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+4b-3=0 \\ -3a+10b+45=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Vậy $B(5;-3), C(-1;-2)$.

Bài 1.1.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(-3;0)$ và phương trình hai đường phân giác trong $BD: x-y-1=0$, $CE: x+2y+17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải

Gọi A_1 đối xứng với A qua BD, suy ra $A_1\in BC$ và $A_1(1;-4)$

A_2 đối xứng với A qua CE, suy ra $A_2\in BC$ và $A_2\left(-\frac{43}{5};-\frac{56}{5}\right)$.

Suy ra phương trình $BC: 3x-4y-19=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y-1=0\\3x-4y-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-15\\y=-16\end{cases}\Rightarrow B(-15;-16)$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y+17=0\\3x-4y-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}\Rightarrow C(-3;-7)$.

Vậy $B(-15;-16), C(-3;-7)$.

Bài 1.1.6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(5;-3)$ và phương trình đường cao $AA': x-y+2=0$, đường trung tuyến $BM: 2x+5y-13=0$. Tính tọa độ các điểm A, B.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình $BC: x+y-2=0$

Suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-2=0\\2x+5y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}\Rightarrow B(-1;3)$.

Gọi $A(a;a+2)$, suy ra tọa độ của trung điểm AC là $M\left(\frac{a+5}{2};\frac{a-1}{2}\right)$

Mà $M\in BM$ nên $2\frac{a+5}{2}+5\frac{a-1}{2}-13=0\Leftrightarrow a=3\Rightarrow A(3;5)$.

Vậy $A(3;5), B(-1;3)$.

Bài 1.1.7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(1;-3)$ và phương trình đường cao $AD: 2x-y+1=0$, đường phân giác $CE: x+y-2=0$. Tính tọa độ các điểm A, C.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình $BC: x+2y+5=0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-2=0\\x+2y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-7\end{cases}\Rightarrow C(9;-7)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua CE, suy ra $B'(5;1)$ và $B'\in AC$

Do đó, ta có phương trình $AC: 2x+y-11=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y+1=0\\2x+y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=6\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{5}{2};6\right)$

Vậy $A\left(\frac{5}{2};6\right), C(9;-7)$.

Bài 1.1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M (2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Hướng dẫn giải

Tọa độ A thỏa mãn hệ: $\begin{cases}7x-2y-3=0\\6x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$

Vì B đối xứng với A qua M nên suy ra $B=(3;-2)$.

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với đường thẳng: $6x-y-4=0$ nên suy ra phương trình $BC: x+6y+9=0$.

Tọa độ trung điểm N của BC thỏa mãn hệ: $\begin{cases}7x-2y-3=0\\x+6y+9=0\end{cases}\Rightarrow N\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{MN}=(-4;-3)$.

Phương trình đường thẳng $AC: 3x-4y+5=0$.

Bài 1.1.9. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng

$d_1: 7x+y+1=0, d_2: x-y+7=0$.

1. Viết phương trình đường thẳng d_1 đối xứng với d_1 qua d_2.
2. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1,d_2.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1;2) và cắt d_1,d_2 tại A, B sao cho M là trung điểm AB.

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases}7x+y+1=0\\x-y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=6\end{cases}$

suy ra d_1,d_2 cắt nhau tại $I(-1;6)$.

1. Lấy $N(0;-1)\in d_1$ và N' là điểm đối xứng với N qua d_2

Phương trình $NN': x+y+1=0$

NN' cắt d_2 tại $H: \begin{cases}x-y+7=0\\x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}\Rightarrow H(-4;3)$

Vì H là trung điểm NN' nên suy ra $N'(-8;-5)$.

Đường thẳng d_1 đi qua N',I nên có phương trình : $11x-7y+53=0$.

2. Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1}=(7;1)$ là VTCP, d_2 có $\overrightarrow{u_2}=(1;-1)$ là VTCP.

Đặt $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{7}{5\sqrt{2}};\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\overrightarrow{u_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Khi đó đường phân giác của góc tạo bởi d_1, d_2 đi qua I và có VTCP là $\overrightarrow{e_1} \pm \overrightarrow{e_2}$.

- $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \left(\frac{12}{5\sqrt{2}};-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{5\sqrt{2}}(3;-1)$ nên ta có phương trình: $x + 3y - 17 = 0$
- $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \left(\frac{2}{5\sqrt{2}};\frac{6}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{5\sqrt{2}}(1;3)$ nên ta có phương trình: $3x - y + 9 = 0$.

3. Giả sử $A(a;-7a-1)$, $B(b;b+7)$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases} a+b=2 \\ -7a-1+b+7=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 7a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (b-a;b+7a+8) = (1;13)$.

Phương trình cần lập là: $13x - y - 11 = 0$.

Bài 1.1.10. Viết phương trình cạnh AB (AB có hệ số góc dương), AD của hình vuông ABCD biết $A(2;-1)$ và đường chéo $BD: x + 2y - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Vì $AC \perp BD \Rightarrow AC: 2x - y - 5 = 0$

Gọi I là tâm của hình vuông $\Rightarrow I = AC \cap BD \Rightarrow I(3;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-1;-2) \Rightarrow IA = \sqrt{5} \Rightarrow IB = ID = \sqrt{5}$

Vì $B \in BD \Rightarrow B(5-2b;b) \Rightarrow \overrightarrow{IB} = (2-2b;b-1)$

$\Rightarrow IB^2 = 5 \Leftrightarrow (2b-2)^2 + (b-1)^2 = 5 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=2 \end{array}\right.$.

Hai giá trị của b tương ứng tọa độ hai điểm B và D

Vì AB có hệ số góc dương nên $B(5;0)$, $D(1;2)$

$\Rightarrow AB: x - 3y - 5 = 0$, $AD: 3x + y - 5 = 0$.

Bài 1.1.11. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD biết $M(2;1)$, $N(4;-2)$; $P(2;0)$; $Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường thẳng AB qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) suy ra véc tơ pháp tuyến của BC là: $\vec{n}_1(-b;a)$.

Phương trình AB có dạng: $ax + by - 2a - b = 0$

BC có dạng: $-bx + ay + 4b + 2a = 0$

Do ABCD là hình vuông nên $d(P;AB) = d(Q;BC)$

Hay $\frac{|-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2a \\ b=-a \end{array}\right.$

- $b = -2a$ suy ra phương trình các cạnh cần tìm là:
  $AB: x - 2y = 0$; $CD: x - 2y - 2 = 0$
  $BC: 2x + y - 6 = 0$; $AD: 2x + y - 4 = 0$.
- $b = -a$. Khi đó
  $AB: -x + y + 1 = 0$; $BC: -x - y + 2 = 0$
  $AD: -x - y + 3 = 0$; $CD: -x + y + 2 = 0$.

Bài 1.1.12. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $M(4;5)$, $N(6;5)$, $P(5;2)$, $Q(2;1)$. Viết phương trình cạnh AB của hình chữ nhật ABCD biết các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua M, N, P, Q và diện tích hình chữ nhật bằng 16.

Hướng dẫn giải

Phương trình AB có dạng: $a(x-4) + b(y-5) = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$

Phương trình $BC: b(x-6) - a(y-5) = 0$.

Diện tích của hình chữ nhật: $S = d(P,AB).d(Q,BC) = \frac{4|(a-3b)(a-b)|}{a^2+b^2}$

Mà $S = 16$ nên ta có: $\frac{4|(a-3b)(a-b)|}{a^2+b^2} = 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, b=1 \\ a=-\frac{1}{3}, b=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình AB là: $x - y + 1 = 0$ hoặc $x - 3y + 11 = 0$.

Bài 1.1.13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD biết $M(2;1)$, $N(4;-2)$; $P(2;0)$; $Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh tính chất sau đây:

"Cho hình vuông ABCD, các điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA.

Khi đó $MP = NQ \Leftrightarrow MP \perp NQ$".

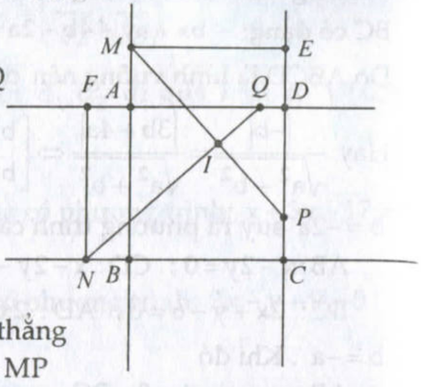
Chứng minh:

Vẽ $ME \perp CD, E \in CD; NF \perp AD, F \in AD$.

Hai tam giác vuông MEP và NFQ có NF = ME.

Do đó $MP = NQ \Leftrightarrow \Delta MEP = \Delta NFQ$

$\Leftrightarrow \widehat{EPM} = \widehat{FQN} \Leftrightarrow \widehat{QIM} = 90^0 \Leftrightarrow MP \perp NQ$



Trở lại bài toán:

Ta có: $\overrightarrow{MP} = (0;-1) \Rightarrow MP = 1$.

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP

Suy ra phương trình d: $x - 4 = 0$.

Gọi E là giao điểm của d với đường thẳng AD, áp dụng tính chất trên ta suy ra NE = MP

Mà E(4;m) nên $NE = MP \Leftrightarrow (m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 3, m = 1$.

- Với m = 3, suy ra $E(4;3) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;1)$, suy ra phương trình
  $AD : x - 3y + 5 = 0$

Phương trình $AB : 3x + y - 7 = 0,\ BC : x - 3y - 10 = 0,\ CD : 3x + y - 6 = 0$.

- Với m = 1, suy ra $E(4;1) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;-1)$, suy ra phương trình
  $AD : x + 3y - 7 = 0$

Phương trình $AB : 3x - y - 5 = 0,\ BC : x + 3y + 2 = 0,\ CD : 3x - y - 6 = 0$.

Bài 1.1.14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-4)^2 + y^2 = 25$ và M(1;–1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho MA = 3MB.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm I(4; 0), bán kính R = 5.

Do IM < 5 nên M nằm trong đường tròn (C)

Gọi H là hình chiếu của I trên AB, H là trung điểm của AB.

Do MA= 3MB nên M là trung điểm của HB

Xét hai tam giác vuông IHM và IHB ta có

$$\begin{cases} IH^2 + HM^2 = IM^2 \\ IH^2 + HB^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 + HM^2 = 10 \\ IH^2 + 4HM^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} HM = \sqrt{5} \\ IH = \sqrt{5} \end{cases}$$

Đường thẳng (d) đi qua M(1; –1) có phương trình

$a(x-1) + b(y+1) = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$

$$\Rightarrow d(I,d) = \frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(a+2b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = b \\ a = -2b \end{array}\right.$$

- Với b = 2a. Phương trình d: $x + 2y + 1 = 0$.
- Với a = –2b. Phương trình d: $2x - y - 3 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là x + 2y +1 = 0 hoặc 2x - y -3 = 0.

Bài 1.1.15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(0;2)$ và cắt (C) theo dây cung có độ dài bằng 4.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm I(3;1), bán kính R = 3.

Phương trình $d : ax + by - 2b = 0$

Ta có: $R^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + d^2(I,d) \Rightarrow d(I,d) = \sqrt{5}$

Hay: $\frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (3a-b)^2 = 5(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b, a = -\frac{1}{2}b$.

Từ đó, ta có phương trình đường thẳng d là: $x - 2y + 4 = 0$; $2x + y - 2 = 0$.

Bài 1.1.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$ tâm I và điểm $A(1+\sqrt{3};2)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua A đều cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt (C) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC nhọn và có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: Đường tròn (C) tâm I(1; –1), bán kính R = 2

- $IA = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3} < 4$, suy ra điểm A nằm trong (C) ⇒ đpcm
- $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{BIC} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.4.4.\sin\widehat{BIC} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sin\widehat{BIC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{BIC} = 60^0 \\ \widehat{BIC} = 120^0 \text{ (loai)} \end{array}\right. \Rightarrow d(I;BC) = 2\sqrt{3}$$

- Đường thẳng d đi qua A, nhận $\vec{n}(a;b)\ (a^2 + b^2 \neq 0)$ có phương trình

$a(x - 1 - \sqrt{3}) + b(y-2) = 0 \Rightarrow d(I;BC) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3}a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}a - b = 0$

Chọn $a = 1, b = \sqrt{3}$.

Từ đó phương trình đường thẳng d: $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} - 9 = 0$.

Bài 1.1.17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn: $(C): x^2+y^2-2x+6y-15=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng: $4x-3y+2=0$ và cắt đường tròn (C) tại A, B sao cho $AB=6$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm AB thì $AH=3$ và $IH \perp AB$, suy ra $IH=4$

Mặt khác $IH = d(I;\Delta)$

Vì Δ // d: $4x-3y+2=0$ nên phương trình của Δ có dạng: $3x+4y+c=0$

$$d(I,\Delta)=4 \Leftrightarrow \frac{|c-9|}{5}=4 \Leftrightarrow c=29, c=-11$$

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn bài toán: $3x+4y+29=0$ và $3x+4y-11=0$

Bài 1.1.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C′) tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Ta có $OA^2+OB^2=AB^2=2 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O. Mặt khác OI là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên A, B thuộc các trục toạ độ. Vậy:

- $A(1;0); B(0;1)$, phương trình đường thẳng $AB: x+y-1=0$
- $A(-1;0); B(0;-1)$, phương trình đường thẳng $AB: x+y+1=0$.

Bài 1.1.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=2$.

Do $IM=2\sqrt{5}>R$ nên điểm M ở ngoài đường tròn (C).

Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M.

Ta có: $\begin{cases} T\in(C) \\ MT\perp IT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases}$

Mà $\overrightarrow{MT}=(x_0+3;y_0-1); \overrightarrow{IT}=(x_0-1;y_0-3)$.

Do đó ta có: $\begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2-2x_0-6x_0+6=0 \\ (x_0+3)(x_0-1)+(y_0-1)(y_0-3)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2-2x_0-6x_0+6=0 \\ {x_0}^2+{y_0}^2+2x_0-4y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_0+y_0-3=0 \quad (1)$$

Tọa độ các tiếp điểm T_1, T_2 thỏa mãn đẳng thức (1).

Vậy phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2 là: $2x+y-3=0$.

Bài 1.1.20. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường tròn $(C_1):(x+5)^2+(y-7)^2=73$, $(C_2):(x-1)^2+(y-1)^2=13$

Gọi A là giao điểm của $(C_1),(C_2)$ với $x_A<0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt (C_1), (C_2) lần lượt tại M, N (khác A) sao cho A là trung điểm đoạn MN.

Hướng dẫn giải

Xét hệ: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=13 \\ (x+5)^2+(y-7)^2=73 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(-2;-1), B(3;4)$.

- $\Delta \equiv AB$ thỏa yêu cầu bài toán
- $\Delta \neq AB$. Khi đó, phép đối xứng tâm A biến M thành N và (C_1) thành (C_3)

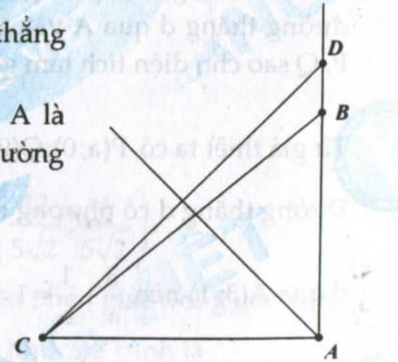
Vì $M\in(C_1) \Rightarrow N\in(C_3) \Rightarrow N\in(C_2)\cap(C_3)$

Phương trình $(C_3):(x-1)^2+(y+9)^2=73$.

Suy ra N: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=13 \\ (x-1)^2+(y+9)^2=73 \end{cases} \Rightarrow N(4;-1)$. Phương trình $\Delta: y+1=0$.

Bài 1.1.21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải



Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng $d: x+y-5=0$, ta tìm được $D(4;9)$.

Vì A thuộc đường tròn đường kính CD nên A là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính CD, suy ra tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x^2+(y-5)^2=32 \end{cases} \Rightarrow A(4;1)$ (vì $x_A>0$).

Suy ra $AC=8 \Rightarrow AB=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AC}=6$.

Vì B thuộc đường thẳng $AD: x-4=0$ nên $B(4;y)$

Từ $AB=6 \Rightarrow (y-1)^2=36 \Rightarrow y=-5, y=7$

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng nên ta có $B(4;7)$.

Vậy phương trình $BC: 3x-4y+16=0$.

Bài 1.1.22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có góc $\widehat{A}=120^0$, đỉnh A có tung độ dương và A thuộc đường thẳng $x+y-1=0$.

Biết các cạnh AB, AC cùng tiếp xúc với đường tròn $\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+(y-1)^2=4$.

Hãy lập phương trình của các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường tròn có tâm $I\left(\frac{4}{\sqrt{3}},1\right)$ tiếp xúc với AB, AC tại D, E. Khi đó do

$\widehat{A}=120^0$ nên dễ dàng suy ra : $\widehat{IAE}=60^0$.

Xét ΔIAE vuông, có $\widehat{IAE}=60^0$ nên tính được: $IA=\frac{R}{\sin 60^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Giả sử: $A(a,1-a), a<1$ ta có : $IA^2=\left(a-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2=\frac{16}{3}\Rightarrow a=0$.

Vậy ta có: A(0,1).

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A có dạng:

$ax+by-b=0$ với $a^2+b^2>0$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (I) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{4|a|}{\sqrt{3(a^2+b^2)}}=2\Leftrightarrow 2|a|=\sqrt{3(a^2+b^2)}\Leftrightarrow a^2=3b^2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}b$$

Suy ra phương trình AB, AC là: $\pm\sqrt{3}x+y-1=0$.

Bài 1.1.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(3; 1). Lập phương trình đường thẳng d qua A và cắt chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy thứ tự tại P, Q sao cho diện tích tam giác OPQ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $P(a;0); Q(0;b), a>0, b>0$.

Đường thẳng d có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

d qua A(3; 1) nên $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow 1\ge 2.\sqrt{\frac{3}{ab}}\Rightarrow\sqrt{ab}\ge 2.\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{a}=\frac{1}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$

Có $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}.a.b\ge\sqrt{3}$.

Nên $S_{\Delta OPQ}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$. Vậy d có phương trình: $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$.

---

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Tóm tắt lý thuyết.

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường sử dụng các cách sau

Cách 1: Tìm tâm $I(a;b)$ và bán kính của đường tròn. Khi đó phương trình đường tròn có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Dựa vào giả thiết của bài toán ta tìm được a,b,c. Cách này ta thương áp dụng khi yêu cầu viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.2.1.

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(2;–2), B(–5;–1), C(1;5).

1) Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.
2) Viết phương trình đường tròn (C′) nội tiếp tam giác ABC.
3) Viết phương trình đường tròn (C_1) đi qua A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $d: 5x-2y=0$.

Lời giải.

1) Giả sử phương trình của (C) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Vì (C) đi qua A, B, C nên ta có hệ

$$\begin{cases}4+4-4a+4b+c=0\\25+1+10a+2b+c=0\\1+25-2a-10b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+4b+c=-8\\10a+2b+c=-26\\-2a-10b+c=-26\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{9}{8}, b=\frac{9}{8}, c=-17.$$

Vậy phương trình (C): $x^2+y^2+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}y-17=0$.

2) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-7;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;7)$, $\overrightarrow{BC}=(6;6)$

Ta có $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\left(-\frac{8}{5\sqrt{2}};\frac{8}{5\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\overrightarrow{BA}}{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}=\left(\frac{12}{5\sqrt{2}};\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$.

Suy ra $\vec{a}=(1;1)$, $\vec{b}=(1;-3)$ lần lượt là VTPT của phân giác trong góc A và B.

Do đó, phân giác trong góc A và B lần lượt có phương trình là

$x+y=0$ và $x-3y+2=0$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có

$$I:\begin{cases}x+y=0\\x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Và phương trình $BC: x-y+4=0$ nên $d(I,BC)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình $(C'): \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

3) Gọi E là tâm đường tròn (C_1), ta có $E\in d \Rightarrow E(2x;5x)$.

Vì (C_1) đi qua A, B nên ta có $EA=EB \Leftrightarrow EA^2=EB^2$

$\Leftrightarrow (2x-2)^2+(5x+2)^2=(2x+5)^2+(5x+1)^2 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow E(-2;-5)$

Và $R=EA=5$.

Phương trình đường tròn $(C_1): (x+2)^2+(y+5)^2=25$.

Ví dụ 1.2.2. Viết phương trình đường tròn (C), biết:

1) (C) đi qua $A(1;-1)$, $B(0;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 2x+y-10=0$.

2) (C) đi qua $C(0;-1)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: x+2y-14=0$, $\Delta_2: 2x+y-9=0$.

3) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d_1: 2x+y+2=0$, đi qua $D(-6;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d_2: 4x-y-7=0$.

Lời giải.

1) Gọi $I(x;y)$ là tâm của (C).

Vì (C) đi qua A, B nên ta có $IA=IB \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x-3y+1=0 \Leftrightarrow x=3y-1\ (1)$.

Mặt khác (C) tiếp xúc với đường thẳng d nên ta có

$$IB=d(I,d) \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=\frac{(2x+y-10)^2}{5}\quad (2).$$

Thay (1) vào (2) ta được

$$(3y-1)^2+(y-2)^2=\frac{(7y-12)^2}{5} \Leftrightarrow 5\left(10y^2-10y+5\right)=49y^2-168y+144$$

$\Leftrightarrow y^2+118y-119=0 \Leftrightarrow y=1, y=-119$.

- Với $y=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow I(2;1), R=IA=\sqrt{5}$.

Phương trình (C) là: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

- Với $y=-119 \Rightarrow x=-358 \Rightarrow I(-358;-119), R=IA=\sqrt{142850}$.

Phương trình (C) là: $(x+358)^2+(y+119)^2=142850$.

2) Gọi $I(x;y)$ là tâm của (C).

Vì (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên ta có

$$\frac{|x+2y-14|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-9|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y-14=2x+y-9 \\ x+2y-14=-2x-y+9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-5 \\ x=-y+\dfrac{23}{3} \end{array}\right..$$

Mặt khác (C) đi qua $C(0;-1)$ nên

$$IC=d(I,\Delta_1) \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=\frac{(x+2y-14)^2}{5}\quad (*).$$

- $x=y-5$ thay vào (*) ta có

$$(y-5)^2+(y+1)^2=\frac{(3y-19)^2}{5} \Leftrightarrow y^2+74y-231=0 \Leftrightarrow y=3, y=-77.$$

+) Với $y=3 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow I(-2;3), R=IC=\sqrt{20}$.

Phương trình (C) là: $(x+2)^2+(y-3)^2=20$.

+) Với $y=-77 \Rightarrow x=-82 \Rightarrow I(-82;-77)$, $R=50\sqrt{5}$.

Phương trình (C) là: $(x+82)^2+(y+77)^2=12500$.

- $x=-y+\dfrac{23}{3}$ thay vào (*) ta có

$$\left(y-\frac{23}{3}\right)^2+(y+1)^2=\frac{\left(y-\dfrac{19}{3}\right)^2}{5} \Leftrightarrow 81y^2-486y+2329=0,\ \text{vô nghiệm}.$$

3) Gọi I là tâm của (C), ta có $I(x;-2x-2)$.

Vì (C) đi qua D và tiếp xúc với d_2 nên $ID=d(I,d_2)$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2+(2x+3)^2=\frac{(6x-5)^2}{17} \Leftrightarrow 17\left(5x^2+24x+45\right)=36x^2-60x+25$$

$\Leftrightarrow 49x^2+468x+740=0 \Leftrightarrow x=-2, x=-\dfrac{370}{49}$.

- $x=-2$, ta có $I(-2;2)$, $R=d(I,d_2)=\sqrt{17}$.

Phương trình (C) là: $(x+2)^2+(y-2)^2=17$.

- $x=-\frac{370}{49}\Rightarrow I\left(-\frac{370}{49};\frac{642}{49}\right),R=\frac{2465}{49\sqrt{17}}$.

Phương trình (C) là: $\left(x+\frac{370}{49}\right)^2+\left(y-\frac{642}{49}\right)^2=\left(\frac{2465}{49\sqrt{17}}\right)^2$.

Ví dụ 1.2.3. Tròn mặt phẳng Oxy cho hai điểm $M(0;-1)$, $N(2;5)$ và đường thẳng $\Delta: x+y-3=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M, N và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB=6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn (C).

Vì (C) đi qua M, N nên $IM=IN\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow x+3y-7=0\Leftrightarrow x=7-3y$ (1).

Gọi $h=d(I,\Delta)=\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$, ta có:

$h^2+\frac{AB^2}{4}=R^2=IM^2\Leftrightarrow\frac{(x+y-3)^2}{2}+18=x^2+(y+1)^2$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có được

$\frac{(4-2y)^2}{2}+18=(7-3y)^2+(y+1)^2\Leftrightarrow y^2-4y+3=0\Leftrightarrow y=1,y=3$.

- Với $y=1$, ta có $I(4;1)$, $R=\sqrt{20}$.

Phương trình đường tròn (C) là: $(x-4)^2+(y-1)^2=20$.

- Với $y=3$, ta có $I(-2;3)$, $R=\sqrt{20}$.

Phương trình đường tròn (C) là: $(x+2)^2+(y-3)^2=20$.

Ví dụ 1.2.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(3;0) và B(0;4). Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với đường tròn đi qua các trung điểm các cạnh của tam giác OAB.

Lời giải.

Ta có: OA = 3 ; OB = 4 ; AB = 5.

P là nửa chu vi tam giác OAB . P = 6.

S là diện tích tam giác OAB : S = 6.

r là bán kính đường tròn nội tiếp $r=\frac{S}{p}=1$.

Tam giác OAB nằm ở góc phần tư thứ nhất có 2 cạnh là 2 trục tọa độ nên tâm I của đường tròn nội tiếp (C) có tọa độ dương cách 2 trục tọa độ 1 khoảng bằng $1\Rightarrow I(1;1)$.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA; OB; AB.

$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0\right)$; $N(0;2)$; $P\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Giả sử đường tròn (C′) qua M, N, P có phương trình:

$(C'): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3a+c+\frac{9}{4}=0\\4b+c+4=0\\3a+4b+c+\frac{25}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\b=-1\\c=0\end{cases}$$

Đường tròn (C′) có tâm I′(3/4; 1), bán kính $r'=\frac{5}{4}$.

Ta có $II'=\frac{1}{4}=r'-r$. Vậy hai đường tròn (C) và (C′) tiếp xúc trong.

Ví dụ 1.2.5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x-2y-18=0$ và đường tròn $(C_2):(x+1)^2+(y-2)^2=8$. Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, M(0; 6).

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=2\sqrt{5}$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;2)$, bán kính $R_2=2\sqrt{2}$.

Do $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}=R_1-R_1<I_1I_2=\sqrt{5}<R_1+R_2=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-18=0\\(x+1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-18=0\\x^2+y^2+2x-4y-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-18=0\\2x+\frac{15}{2}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+\frac{15}{2}\\5x^2+24x+\frac{93}{4}=0\ (*)\end{cases}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*), suy ra $A\left(x_1;2x_1+\frac{15}{2}\right)$, $B\left(x_2;2x_2+\frac{15}{2}\right)$.

Suy ra $AB^2=5(x_1-x_2)^2=5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=\frac{111}{5}$

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $\begin{cases} x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{12}{5} \\ y_M=x_1+x_2+\frac{15}{2}=\frac{27}{10} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{12}{5};\frac{27}{10}\right)$.

Phương trình đường thẳng AB: $4x-2y+15=0$ nên

Phương trình đường trung trực Δ của đoạn AB: $x+2y-3=0$.

Gọi I là tâm của đường tròn (C), suy ra $I\in\Delta\Rightarrow I(2a+3;-a)$

Mặt khác:

$d^2(I,AB)+\frac{AB^2}{4}=IM^2\Leftrightarrow\frac{(10a+27)^2}{20}+\frac{111}{20}=(2a+3)^2+(a+6)^2\Leftrightarrow a=1$

Suy ra $I(5;-1)$, bán kính $R=IM=5\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của (C): $(x-5)^2+(y+1)^2=74$.

Chú ý: Ngoài cách giải trên, ta có thể sử dụng chùm đường tròn để giải. Cụ thể:

Vì (C) đi qua các giao điểm của (C_1) và (C_2) nên phương trình của (C) có dạng: $m(x^2+y^2-2x-2y-18)+n(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$.

Do (C) đi qua $M(0;6)$ nên ta có: $2m+3n=0$, ta chọn $m=3, n=-2$

Khi đó phương trình (C): $x^2+y^2-10x+2y-48=0$.

Ví dụ 1.2.6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-6)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với (C).

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(6;2)$, bán kính $R=2$.

Gọi $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=R'^2$ thì (C') có tâm $I'(a;b)$, bán kính R'.

Vì (C') tiếp xúc với Ox, Oy nên suy ra

$d(I',Ox)=d(I',Oy)\Leftrightarrow|a|=|b|=R'\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=-b\end{array}\right.$

Hơn nữa (C') tiếp xúc với Ox, Oy và tiếp xúc ngoài với (C) nên (C') nằm bên phải trục Oy, do đó $a>0$.

TH1: $a=b=R\Rightarrow(C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

Vì (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên:

$II'=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{(a-6)^2+(a-2)^2}=2+a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=18\end{array}\right.$

Trường hợp này có 2 đường tròn là :

$(C_1'):(x-2)^2+(y-2)^2=4$ và $(C_2'):(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$.

TH2: $a=-b=R\Rightarrow(C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

Tương tự như trường hợp 1, ta có:

$II'=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{(a-6)^2+(a+2)^2}=2+a\Leftrightarrow a=6$

Vậy trường hợp này có 1 đường tròn là $(C_3):(x-6)^2+(y-6)^2=36$.

Tóm lại, có 3 đường tròn thỏa cần tìm là :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$ và $(x-6)^2+(y-6)^2=36$.

Ví dụ 1.2.7. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và đường thẳng $d:2x-y-1=0$. Lập phương trình đường tròn (C′) có tâm nằm trên d và hoành độ lớn hơn 2, đồng thời (C′) cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho dây cung AB có độ dài bằng $4\sqrt{5}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-y+15=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=5$.

Gọi I′ là tâm của đường tròn (C′), $I'\in d$ nên suy ra $I'(m;2m-1), m>2$ và R′ là bán kính.

Ta có: $R'=d(I',\Delta)=\frac{|m+16|}{\sqrt{10}}$.

Gọi H là giao điểm của II′ và AB, suy ra H là trung điểm của AB nên $AH=2\sqrt{5}$.

Vì $IH+I'H=II'$ nên ta có:

$\sqrt{R^2-AH^2}+\sqrt{R'^2-AH^2}=II'$ hoặc $\left|\sqrt{R^2-AH^2}-\sqrt{R'^2-AH^2}\right|=II'$

TH1:

$\sqrt{R^2-AH^2}+\sqrt{R'^2-AH^2}=II'$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}+\sqrt{\frac{(m+16)^2}{10}-20}=\sqrt{(m-1)^2+(2m-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{m^2+32m+56}=5\sqrt{2}|m-1|$$

$$\Leftrightarrow m^2+32m+56=50\left(m^2-2m+2-2|m-1|\right)$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-132m+44=100|m-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}49m^2-232m+144=0\\ 49m^2-32m-56=0\end{array}\right. \Leftrightarrow m=4 \text{ (do } m>2\text{)}$$

TH2: $\left|\sqrt{R^2-AH^2}-\sqrt{R'^2-AH^2}\right|=II' \Leftrightarrow \left|5\sqrt{2}-\sqrt{m^2+32m+56}\right|=5\sqrt{2}|m-1|$

$$\Leftrightarrow 50-10\sqrt{2(m^2+32m+56)}+m^2+32m+56=50m^2-100m+50$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}=0 \quad (1)$$

Do $m>2$ nên $49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}>32$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình $(C'):(x-4)^2+(y-7)^2=40$.

Ví dụ 1.2.8. Trong mặt phẳng Oxy, cho $d:2x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn tâm thuộc d cắt trục Ox tại A,B, cắt trục Oy tại C, D sao cho $AB=CD=2$.

Lời giải.

Gọi tâm của đường tròn là I ta có: $I(a;2a+3)$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có:

$IA=IC, MA=NC, \widehat{IMA}=\widehat{INC}$ nên $\Delta IMA=\Delta INC \Rightarrow IM=IN$.

Do đó, $d(I,AB)=d(I,CD) \Leftrightarrow d(I,Ox)=d(I,Oy) \Leftrightarrow |a|=|2a+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-3\\ a=-1\end{array}\right.$

+ Với $a=-1 \Rightarrow I(-1;1), IM=1 \Rightarrow R=IA=\sqrt{IM^2+MA^2}=\sqrt{2}$

Phương trình đường tròn có dạng: $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.

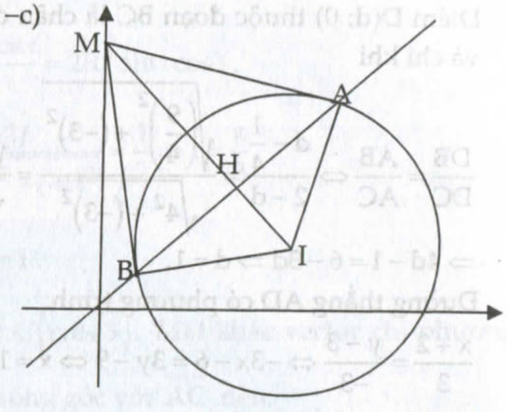
+ Với $a=-3 \Rightarrow I(-3;-3), IM=3 \Rightarrow R=\sqrt{IM^2+MA^2}=\sqrt{10}$

Phương trình đường tròn có dạng: $(x+3)^2+(y+3)^2=10$.

Ví dụ 1.2.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Lời giải.

Cách 1: Ta có $\cos\widehat{AIH}=\frac{IH}{IA}=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow IH=\sqrt{2}$.



Vậy $MH=MI-IH=4\sqrt{2}$; với $M\in Oy$

$MI\perp AB \Rightarrow MI: x+y+c=0$; $M(0;-c)$

$MH=d(M;\Delta)=\frac{|c|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow c=8$ hay $c=-8$

- Với $c=8$: $I(t;-t+8)$

  $d(I;\Delta)=\frac{|t-(8-t)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=IH$

  $\Leftrightarrow t=3$ hay $t=5$

  $t=3 \Rightarrow I(3;5)$; $t=5 \Rightarrow I(5;3)$

- Với $c=-8$: $I(t;-t-8)$

  $d(I;\Delta)=\sqrt{2} \Leftrightarrow t=-3$ hay $t=-5$

  $t=-3 \Rightarrow I(-3;-5)$; $t=-5 \Rightarrow I(-5;-3)$

Vì I và M nằm 2 bên đường thẳng Δ nên nhận I (5; 3); I (–5; –3)

Phương trình 2 đường tròn cần tìm là:

$(x-5)^2+(y-3)^2=10$ hay $(x+5)^2+(y+3)^2=10$.

Cách 2: Gọi I là tâm của đường tròn cần tìm, H là trung điểm của AB, M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B.

Từ giả thiết ta có $M(0;a), a>0$.

Trong tam giác vuông MAI:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40} \Rightarrow AM=2\sqrt{10}.$$

$$\Rightarrow MI=\sqrt{MA^2+IA^2}=5\sqrt{2} \Rightarrow MH=MI-HI=4\sqrt{2}$$

Hay $d(M,\Delta)=4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2} \Rightarrow a=8$ (do $a>0$)

Do đó, phương trình IH là: $x+y-8=0$.

Ta có $I\in MH \Rightarrow I(b;8-b)$

$IM=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2b^2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow b=\pm 5$

+ Với $b=5$, PT của (C) là $(x-5)^2+(y-3)^2=10$

+ Với $b=-5$, PT của (C) là $(x+5)^2+(y-13)^2=10$

Ví dụ 1.2.10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các đỉnh: $A(-2;3), B\left(\frac{1}{4};0\right), C(2;0)$.

Lời giải.

Điểm D(d; 0) thuộc đoạn BC là chân đường phân giác trong của góc A khi và chỉ khi

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{d-\frac{1}{4}}{2-d}=\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+(-3)^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{81}{16}+9}}{\sqrt{16+9}}=\frac{\sqrt{\frac{225}{16}}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow 4d-1=6-3d\Rightarrow d=1$.

Đường thẳng AD có phương trình:

$\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-3}\Leftrightarrow -3x-6=3y-9\Leftrightarrow x=1-y$,

và đường thẳng AC:

$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-3}\Leftrightarrow -3x-6=4y-12\Leftrightarrow 3x+4y-6=0$

Giả sử tâm I của đường tròn nội tiếp có tung độ là b. Khi đó hoành độ là $1-b$ và bán kính cũng bằng b. Vì khoảng cách từ I tới AC cũng phải bằng b nên ta có:

$\frac{|3(1-b)+4b-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=b\Leftrightarrow|b-3|=5b$;

a) $b-3=5b\Rightarrow b=-\frac{4}{3}$;

b) $b-3=-5b\Rightarrow b=\frac{1}{2}$.

Rõ ràng chỉ có giá trị $b=\frac{1}{2}$ là hợp lý. Vậy, phương trình của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 1.2.11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$ và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Cách 1: Vì ΔABC vuông tại B nên AC là đường kính của (T).

Gọi $\widehat{ASB}=\widehat{(d_1,d_2)}=t$ ta có $\widehat{BAC}=\widehat{ASB}=t$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Giả sử bán kính (T) là R ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC.BA}{2}=\frac{AC\sin t.AC\cos t}{2}=2R^2\sin t\cos t.$$

Mặt khác $\cos t=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.(-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ từ đó có $R=1$.

Do $A\in d_1, C\in d_2$ nên $A\left(a;-a\sqrt{3}\right), C\left(c;c\sqrt{3}\right)$. Mặt khác vector chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1}(1;-\sqrt{3})$ có phương vuông góc với $\overrightarrow{AC}$ nên:

$\overrightarrow{AC}.\vec{u}_1=0\Leftrightarrow c-a-3(c+a)=0\Leftrightarrow c=-2a$.

Mặt khác $AC=2R=2\Leftrightarrow\sqrt{(c-a)^2+(\sqrt{3}(c+a))^2}=2\Leftrightarrow 2|a|\sqrt{3}=2$ vì $a>0$ nên $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tâm đường tròn là trung điểm của AC là :

$$I\left(\frac{a+c}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}(c-a)\right)=\left(-\frac{a}{2};-\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right).$$

Vậy phương trình của (T) là $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$.

Cách 2: Ta có d_1 tiếp xúc với (T) có đường kính là AC nên $AC\perp d_1$.

Từ giả thiết ta có : $\widehat{AOx}=60^0, \widehat{BOx}=120^0\Rightarrow\widehat{AOB}=60^0$; $\widehat{ACB}=30^0$

Nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB^2\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=1$

Vì $A\in d_2\Rightarrow A\left(x;-\sqrt{3}x\right), x>0; OA=\frac{2}{\sqrt{3}}.AB=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow A(\frac{1}{\sqrt{3}};-1)$;

$OC=2OA=\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right)$.

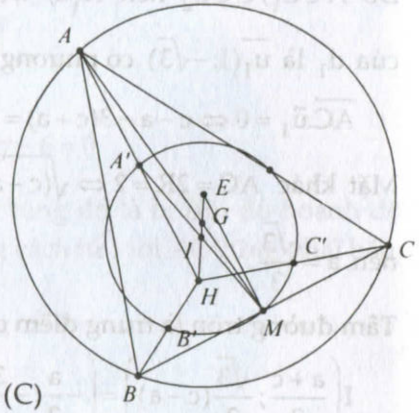
Đường tròn (T) đường kính AC có: $I\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$, $R=\frac{AC}{2}=1$.

Phương trình (T): $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$.

Ví dụ 1.2.12. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Biết đường tròn đi qua ba trung điểm của ba đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi (C) là đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=10$, suy ra (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.



Ta có kết quả sau đây trong hình học phẳng:

"Trong tam giác, 9 điểm gồm trung điểm của ba cạnh, chân ba đường cao và ba trung điểm của các đoạn nối trực tâm với đỉnh nằm trên một đường tròn có tâm I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG".

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC. Ta có:

Phép vị tự $V_{(G,-2)}: I\to E,\ M\to A$ và $M\in(C)$

nên ta có: $E(4;7)$ và $EA=2IM=2\sqrt{10}$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$(x-1)^2+(y-10)^2=40$.

Ví dụ 1.2.13.

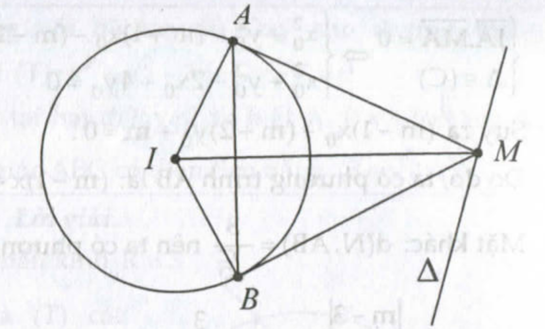
Cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm và M thuộc đường thẳng Δ. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB. Tìm M sao cho diện tích tứ giác MAIB bằng 10.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}\Rightarrow AI=\sqrt{5}$.

Mặt khác $S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}S_{AIBM}=5\Rightarrow\frac{1}{2}MA.IA=5\Rightarrow MA=2\sqrt{5}$.

Suy ra $IM^2=IA^2+AM^2=25$.



Mà $M\in\Delta$ nên $M(m;-m-2)$

suy ra $IM^2=25$

$\Leftrightarrow(m-2)^2+(m+3)^2=25$

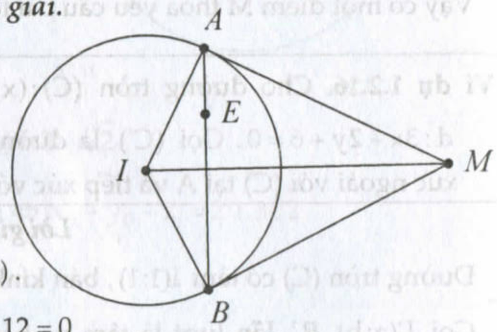
$\Leftrightarrow m^2+m-6=0$

$\Leftrightarrow m=-3, m=2$.

Vậy $M(2;-4)$ và $M(-3;1)$ là hai điểm cần tìm.

Ví dụ 1.2.14. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-4)^2+y^2=4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là hai tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua điểm E.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=2$.

Gọi $M(0;m)$, giả sử $T(x;y)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ M tới (C).

Suy ra $\overrightarrow{MT}=(x;y-m)$, $\overrightarrow{IT}=(x-4;y)$.

Ta có: $\begin{cases}T\in(C)\\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-8x+12=0\\ x^2+y^2-4x-my=0\end{cases}\Rightarrow 4x-my-12=0$

Do đó, phương trình đường thẳng $AB: 4x-my-12=0$.

Nên AB đi qua $E\Leftrightarrow 16-m-12=0\Leftrightarrow m=4$.

Vậy $M(0;4)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 1.2.15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y=0$ và đường thẳng $d: x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm M trên đường thẳng d, biết từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) và khoảng cách từ điểm $N(1;-1)$ đến AB bằng $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Vì $M\in d\Rightarrow M(m;m)$.

Gọi $A(x_0;y_0)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MA}=0\\ A\in(C)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-(m+1)x_0-(m-2)y_0-m=0\\ x_0^2+y_0^2-2x_0+4y_0=0\end{cases}$$

Suy ra $(m-1)x_0+(m+2)y_0+m=0$.

Do đó, ta có phương trình AB là: $(m-1)x+(m+2)y+m=0$.

Mặt khác: $d(N,AB)=\frac{3}{\sqrt{5}}$ nên ta có phương trình:

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{(m-1)^2+(m+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Giải phương trình này ta tìm được $m=0, m=-\frac{58}{13}$.

Ta loại $m=0$, vì khi đó $M\in(C)$.

Vậy có một điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $M\left(-\frac{58}{13};-\frac{58}{13}\right)$.

Ví dụ 1.2.16. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=13$ và đường thẳng $d:3x+2y+6=0$. Gọi (C') là đường tròn có bán kính bằng $2\sqrt{13}$ tiếp xúc ngoài với (C) tại A và tiếp xúc với d tại B. Tính đoạn AB.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{13}$.

Gọi $I'(a;b)$, R' lần lượt là tâm và bán kính của (C'), suy ra $R'=2\sqrt{13}$ và $II'=R+R'=3\sqrt{13}$.

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác $AI'B$ ta có:

$$AB^2=I'A^2+I'B^2-2.I'A.I'B.\cos\widehat{AI'B}=104(1-\cos\widehat{AI'B})$$

Mà $\cos\widehat{AI'B}=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta},\overrightarrow{I'I}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{I'I}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|\left|\overrightarrow{I'I}\right|}=\frac{|3(a-1)+2(b-1)|}{\sqrt{13}.3\sqrt{13}}=\frac{|3a+2b-5|}{39}$.

Mặt khác: $d(I',\Delta)=2\sqrt{13}\Rightarrow\frac{|3a+2b+6|}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a+2b=20\\ 3a+2b=-32\end{array}\right.$.

- $3a+2b=20\Rightarrow\cos\widehat{AI'B}=\frac{5}{13}\Rightarrow AB^2=104\left(1-\frac{5}{13}\right)=64\Rightarrow AB=8$.
- $3a+2b=-32\Rightarrow\cos\widehat{AI'B}=\frac{37}{39}\Rightarrow AB^2=104\left(1-\frac{37}{39}\right)=\frac{16}{3}\Rightarrow AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 1.2.17. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng $\Delta:x+y-2=0$ và đường tròn $(T):x^2+y^2-2x+2y-7=0$.

Chứng minh rằng Δ cắt (T) tại hai điểm phân biệt A, B và tìm toạ độ điểm C trên (T) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $(3+\sqrt{2})\sqrt{7}$.

Lời giải.

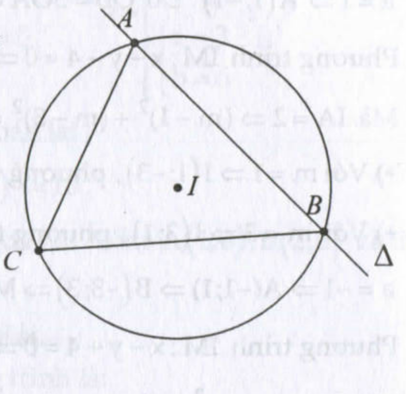
Đường tròn (T) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=3$

Ta có $d(I,\Delta)=\sqrt{2}<R\Rightarrow\Delta$ và (T) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

Và $AB=2\sqrt{R^2-d^2(I,\Delta)}=2\sqrt{7}$.

Giả sử $C(x_0;y_0)\in(T)$

$\Rightarrow(x_0-1)^2+(y_0+1)^2=9$ (1)



Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}d(C,AB).AB=\sqrt{7}.d(C,\Delta)$$

Do đó, $S_{\Delta ABC}=(3+\sqrt{2})\sqrt{7}\Leftrightarrow d(C,\Delta)=3+\sqrt{2}$

Mà $d(C,\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x_0+y_0-2|=\sqrt{2}+3\Leftrightarrow|x_0+y_0-2|=2+3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x_0+y_0-2=\pm(2+3\sqrt{2})$.

- $x_0+y_0-2=2+3\sqrt{2}\Rightarrow x_0=4+3\sqrt{2}-y_0$ thay vào (1), ta có được:

  $(y_0-3\sqrt{2}-3)^2+(y_0+1)^2=9$ vô nghiệm.
- $x_0+y_0-2=-2-3\sqrt{2}\Rightarrow x_0=-3\sqrt{2}-y_0$ thay vào (1) ta có

  $(y_0+3\sqrt{2}-1)^2+(y_0+1)^2=9\Leftrightarrow y_0=-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow x_0=1-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy $C\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}};-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Ví dụ 1.2.18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x+y=0$. Gọi (C) là đường tròn tâm I, (C) cắt d tại A và B sao cho $OA.OB=6$, đồng thời tam giác AIB vuông tại I và có diện tích bằng 2. Viết phương trình của (C), biết O ở ngoài (C).

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn (C). Vì tam giác IAB vuông và có diện tích bằng 2 nên ta có:

$\frac{1}{2}IA.IB = 2 \Leftrightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$.

Giả sử $OB > OA$, do $O \in d$ nên O, A, B thẳng hàng và $OB = OA + AB$

Do đó $OA.OB = 6 \Leftrightarrow OA(OA + AB) = 6 \Leftrightarrow OA^2 + 2\sqrt{2}OA - 6 = 0 \Leftrightarrow OA = \sqrt{2}$

Mà $A \in d \Rightarrow A(a;-a) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (a;-a) \Rightarrow OA^2 = 2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1$.

- $a = 1 \Rightarrow A(1;-1)$. Do $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA} \Rightarrow B(3;-3)$, trung điểm của AB là $M(2;-2)$.

Phương trình $IM: x - y - 4 = 0 \Rightarrow I(m;m-4) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (m-1;m-3)$.

Mà $IA = 2 \Rightarrow (m-1)^2 + (m-3)^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = 3$

+) Với $m = 1 \Rightarrow I(1;-3)$, phương trình $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

+) Với $m = 3 \Rightarrow I(3;1)$, phương trình $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

- $a = -1 \Rightarrow A(-1;1) \Rightarrow B(-3;3) \Rightarrow M(-2;2)$ là trung điểm AB.

Phương trình $IM: x - y + 4 = 0 \Rightarrow I(m;m+4) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (m+1;m+3)$

Mà $IA = 2 \Rightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = -3$.

+) Với $m = -1 \Rightarrow I(-1;3)$, phương trình $(C): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$

+) Với $m = -3 \Rightarrow I(-3;1)$, phương trình $(C): (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

3. Bài tập vận dụng.

Bài 1.2.1. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;1), B(4;3)$ và có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Vì (C) đi qua A, B nên ta có: $\begin{cases} -4a - 2b + c = -5 \\ -8a - 6b + c = -25 \end{cases}$ (1)

Mặt khác: (C) có tâm $I(a;b)$ thuộc $\Delta: x - y + 5 = 0 \Rightarrow a - b + 5 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} -4a - 2b + c = -5 \\ -8a - 6b + c = -25 \\ a - b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \\ c = 5 \end{cases}$

Vậy phương trình $(C): x^2 + y^2 - 10y + 5 = 0$.

Bài 1.2.2. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(0;5), B(2;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R = \sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).

Ta có phương trình $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = 10$.

Do $A, B \in (C)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 10b + 15 = 0 \\ a^2 + b^2 - 4a - 6b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 10b + 15 = 0 \\ 4a - 4b + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ và $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$.

Bài 1.2.3. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(1;0), B(2;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: x - y = 0$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử đường tròn (C) cần tìm có phương trình là:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do $A, B \in (C)$ nên ta có: $\begin{cases} 1 - 2a + c = 0 & (1) \\ 4 - 4a + c = 0 & (2) \end{cases}$

Mặt khác (C) tiếp xúc với d nên suy ra $d(I,(d)) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 2c = 0$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta được $a = \frac{3}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 2$ hoặc $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{7}{2}; c = 2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$x^2 + y^2 - 3x - y + 2 = 0$ và $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 2 = 0$.

Bài 1.2.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm M nằm trên d, bán kính bằng 2 lần bán kính đường tròn (C) và (C′) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), bán kính $R = 1$.

Ta có $M \in d \Rightarrow M(x;x+3)$.

Vì (C) và (C′) tiếp xúc ngoài nên ta có $MI = 3R \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x+2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ và $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Bài 1.2.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, O và tiếp xúc với d.

Hướng dẫn giải.

Gọi $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là đường tròn cần tìm.

Vì (C) đi qua $O, A \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$ (1)

Do (C) tiếp xúc với

$d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow d(I,(d)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a - b + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (2)

Từ (1) và (2) giải hệ thu được $a = 0, b = 1, c = 0$ hoặc $a = 1, b = 0, c = 0$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Bài 1.2.6. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M và tiếp xúc với hai trục tọa độ.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C). Vì (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua $M(2;3)$ nên ta suy ra được I nằm trong góc phần tư thứ nhất hay $a, b > 0$.

Ta có $d(I,Ox) = d(I,Oy) \Leftrightarrow a = b = R$

Phương trình (C): $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

Vì $M \in (C)$ nên ta có:

$(2-a)^2 + (3-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 13 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \pm 2\sqrt{3}$

Vậy phương trình đường tròn (C) là:

$(x - 5 - 2\sqrt{3})^2 + (y - 5 - 2\sqrt{3})^2 = (5 + 2\sqrt{3})^2$

hoặc $(x - 5 + 2\sqrt{3})^2 + (y - 5 + 2\sqrt{3})^2 = (5 - 2\sqrt{3})^2$.

Bài 1.2.7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

Viết phương trình đường tròn (C) đi qua các giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 6y - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$

Giải hệ này ta được hai cặp nghiệm $(x;y) = (1;-3), (2;4)$.

Suy ra (C_1) và (C_2) cắt nhau tại $A(1;-3), B(2;4)$.

Gọi I là tâm của (C), ta có $I(6 - 6m; m)$

Vì IA = IB nên ta có: $(5 - 6m)^2 + (m+3)^2 = (4 - 6m)^2 + (m-4)^2 \Leftrightarrow m = -1$

Suy ra $I(12;-1)$, $R = IA = 5\sqrt{5}$.

Vậy phương trình (C): $(x-12)^2 + (y+1)^2 = 125$.

Bài 1.2.8. Lập phương trình đường tròn (C), biết

1. (C) đi qua M(5;5), N(4;6) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 14 = 0$.
2. (C) đi qua P(2;1) và tiếp xúc với hai trục toạ độ.

Hướng dẫn giải

1. Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn. Theo đề bài ta có:

$\begin{cases} IM = IN \\ IM = d(I,\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-5)^2 + (b-5)^2 = (a-4)^2 + (b-6)^2 & (1) \\ \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2} = \dfrac{|3a + 4b + 14|}{5} & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \Rightarrow b = a + 1$ thay vào (2):

$\sqrt{(a-5)^2 + (a-4)^2} = \dfrac{|7a + 18|}{5} \Leftrightarrow 25(2a^2 - 18a + 41) = (7a + 18)^2$

$a^2 - 702a + 701 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 701$.

- Với $a = 1 \Rightarrow I(1;2)$, $R = IM = 5$. Phương trình $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$
- Với $a = 701 \Rightarrow I(701;702)$, $R = 985$.

Phương trình $(C): (x - 701)^2 + (y - 702)^2 = 985^2$.

2. Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C).

Do (C) tiếp xúc với hai trục toạ độ nên $|a| = |b| = R$

Phương trình $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$

(C) đi qua P(2;1) nên: $(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$ (*)

Từ $|a| = |b|$ ta có $a = \pm b$.

- $a = b$ thay vào (*): $(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 5$

  Phương trình $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ và $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

- $a = -b$ thay vào (*): $(2-a)^2 + (1+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Bài 1.2.9. Lập phương trình đường tròn (C), biết:

1) (C) đi qua $A(3;4)$ và các hình chiếu của A lên các trục tọa độ.
2) (C) có tâm nằm trên đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$ và $\Delta_2 : x - 7y = 0$.

Hướng dẫn giải.

1) Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A lên hai trục Ox, Oy, suy ra $A_1(3;0)$, $A_2(0;4)$.

Giả sử $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do $A, A_1, A_2 \in (C)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} -6a - 8b + c = -25 \\ -6a + c = -9 \\ -8b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy phương trình (C): $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

2) Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C), vì $I \in (C_1)$ nên: $(a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ (1)

Do (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên $d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2)$

$\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = -2a, a = 2b$.

- $b = -2a$ thay vào (1) ta có được:

  $(a-2)^2 + 4a^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5a^2 - 4a + \frac{16}{5} = 0$ phương trình này vô nghiệm.

- $a = 2b$ thay vào (1) ta có: $(2b-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow b = \frac{4}{5}, a = \frac{8}{5}$.

Suy ra $R = D(I,\Delta_1) = \frac{4}{5\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình $(C): \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$.

Bài 1.2.10. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường tròn:

$$(C_1): (x+1)^2 + (y+3)^2 = 20,\ (C_2): (x-8)^2 + y^2 = 50$$

Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai giao điểm của (C_1), (C_2) và cắt đường thẳng $\Delta : x + 2y + 7 = 0$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6\sqrt{5}$.

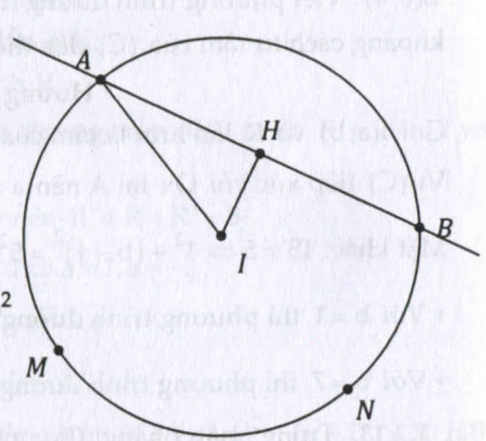
Hướng dẫn giải.

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+3)^2 = 20 \\ (x-8)^2 + y^2 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 6y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 24 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ x^2 + (4-3x)^2 - 16x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$.



Do đó (C_1) và (C_2) cắt nhau tại $M(1;1)$, $N(3;-5)$.

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C), ta có: $IM = IN$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b+5)^2$

$\Leftrightarrow a - 3b = 8 \Rightarrow a = 3b + 8$ (1).

Ta có: $IM^2 = \frac{AB^2}{4} + d^2(I,\Delta)$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 45 + \frac{(a+2b+7)^2}{5}$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được:

$(3b+7)^2 + (b-1)^2 = 45 + 5(b+3)^2 \Leftrightarrow b^2 + 2b - 8 = 0 \Leftrightarrow b = -4, b = 2$.

- Với $b = 2 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow (C): (x-14)^2 + (y-2)^2 = 170$.
- Với $b = -4 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow (C): (x+4)^2 + (y+4)^2 = 50$.

Bài 1.2.11. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2), B(-2;-2), C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

Hướng dẫn giải.

Ta có $M(-1;0), N(1;-2), \overrightarrow{AC}=(4;-4)$. Gọi $H(x,y)$, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ H\in AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+2)-4(y+2)=0\\ 4x+4(y-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\Rightarrow H(1;1)$$

Giả sử phương trình đường tròn: $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Ba điểm M,N,H thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a-c=1\\ a-2b+c=-5\\ a+b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\\ c=-2\end{cases}.$$

Phương trình đường tròn: $x^2+y^2-x+y-2=0$.

Bài 1.2.12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(a;b)$ và R lần lượt là tâm của và bán kính của (C).

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại A nên $a=2$ và $R=|b|$.

Mặt khác: $IB=5\Leftrightarrow 4^2+(b-4)^2=5^2\Leftrightarrow b=1, b=7$.

+ Với $b=1$ thì phương trình đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

+ Với $b=7$ thì phương trình đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

Bài 1.2.13. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(6;6)$ và hai đường thẳng $\Delta_1:4x-3y-24=0$, $\Delta_2:4x+3y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2.

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(a;b)$ là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

Vì (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên ta có $d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)$

$$\Leftrightarrow\frac{|4a-3b-24|}{5}=\frac{|4a+3b+8|}{5}=R\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4a-3b-24=4a+3b+8\\ 4a-3b-24=-4a-3b-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-\dfrac{16}{3}\\ a=2\end{array}\right..$$

- Với $a=2$, phương trình $(C):(x-2)^2+(y-b)^2=\dfrac{(3b+16)^2}{25}$.

Do $M\in(C)$ nên $(6-2)^2+(6-b)^2=\dfrac{(3b+16)^2}{25}\Leftrightarrow b=3, b=\dfrac{87}{4}$

Suy ra phương trình

$(C):(x-2)^2+(y-3)^2=25$ hoặc $(C):(x-2)^2+(y-\dfrac{87}{4})^2=\dfrac{4225}{16}$.

- Với $b=-\dfrac{16}{3}$, phương trình của (C): $(x-a)^2+\left(y+\dfrac{16}{3}\right)^2=\dfrac{(4a-8)^2}{25}$

Do $M\in(C)$ nên $(6-a)^2+\left(6+\dfrac{16}{3}\right)^2=\dfrac{(4a-8)^2}{25}$ phương trình vô nghiệm.

Bài 1.2.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d:x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm M trên d, bán kính bằng 2 lần bán kính đường tròn (C) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$.

Gọi I' là tâm và R' là bán kính của đường tròn (C′), ta có $R'=2R=2$ và $I'\in d\Rightarrow I'(a;a+3)$.

Vì (C) và (C′) tiếp xúc ngoài với nhau nên $II'=R+R'=3$

$\Leftrightarrow(a-1)^2+(a+2)^2=9\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow a=1, a=-2$.

- Với $a=1\Rightarrow I'(1;4)\Rightarrow(C'):(x-1)^2+(y-4)^2=4$
- Với $a=-2\Rightarrow I'(-2;1)\Rightarrow(C'):(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

Bài 1.2.15. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-1)^2=10$.

1. Viết phương trình đường tròn (C_1) đi qua $A(3;8)$, có tâm nằm trên đường thẳng $3x-y-11=0$ và tiếp xúc ngoài với (C).
2. Viết phương trình đường tròn (C_2) đi qua $B(-4;7), C(4;11)$ và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

1. Gọi I_1 là tâm đường tròn $(C_1)\Rightarrow I_1(m;3m-11)$,

Bán kính $R_1=I_1A=\sqrt{(m-3)^2+(3m-19)^2}$

Vì (C) và (C_1) tiếp xúc ngoài với nhau nên ta có:

$II_1=R+R_1\Leftrightarrow\sqrt{(m-4)^2+(3m-12)^2}=\sqrt{10}+\sqrt{(m-3)^2+(3m-19)^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m-4)^2+(3m-12)^2}-\sqrt{(m-3)^2+(3m-19)^2}=\sqrt{10} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{40m-210}{\sqrt{(m-4)^2+(3m-12)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(3m-19)^2}}=\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m-4)^2+(3m-12)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(3m-19)^2}=4\sqrt{10}m-21\sqrt{10} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$\sqrt{(m-4)^2+(3m-12)^2}=2\sqrt{10}m-10\sqrt{10} \Leftrightarrow |m-4|=2m-10 \Leftrightarrow m=6$.

Vậy phương trình $(C_1):(x-6)^2+(y-7)^2=10$.

2. Gọi M là trung điểm đoạn BC, suy ra $M(0;9)$. Do $\overrightarrow{BC}=(8;4)$ nên phương trình đường trung trực đoạn BC: $2x+y-9=0$.

Gọi I_2 là tâm của đường tròn (C_2) và H là hình chiếu của I lên MN, ta có $I_2(m;9-2m)$ và I, H, I_2 thẳng hàng.

Ta có: $IH^2=R^2-\frac{MN^2}{4}=10-5=5\Rightarrow IH=\sqrt{5}$.

Nên $I_2H=I_2I-IH$, suy ra

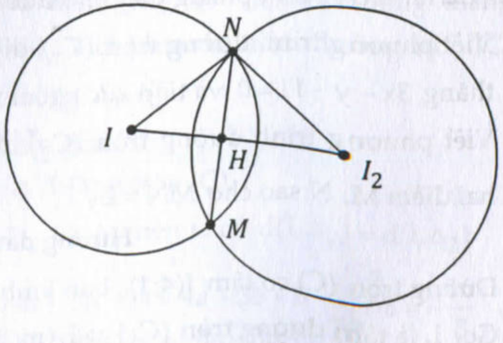
$(I_2I-IH)^2+\frac{MN^2}{4}=I_2B^2 \Leftrightarrow I_2I^2-2\sqrt{5}.I_2I+5+5=I_2B^2$

$\Leftrightarrow (m-4)^2+(8-2m)^2-2\sqrt{5\left[(m-4)^2+(8-2m)^2\right]}+10=(m+4)^2+(2-2m)^2$

$\Leftrightarrow 5m^2-40m+80-10|m-4|+10=5m^2+20$

$\Leftrightarrow |m-4|=7-4m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{7}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m-4=7-4m \\ m-4=-7+4m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.



Vậy phương trình

$(C_2):(x-1)^2+(y-7)^2=26$.

Bài 1.2.16. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

1) Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(3;-6)$

2) Từ điểm $D(-4;5)$ vẽ đến (C) hai tiếp tuyến DM, DN (M, N là tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng MN.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=5$.

1) Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ là tiếp tuyến của (C)

Do $B\in\Delta$ nên $3a-6b+c=0\Rightarrow c=6b-3a$

Δ là tiếp tuyến của (C) nên $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|2a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5 \Leftrightarrow \frac{|-a+7b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5$

$\Leftrightarrow 12a^2+7ab-12b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{4}b \\ a=-\frac{4}{3}b \end{array}\right.$

Từ đó, ta có được phương trình tiếp tuyến là:

$3x+4y+15=0$ và $4x-3y-30=0$.

2) Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có: $\begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-2)^2+(y_0-1)^2=25 \\ (x_0-4)(x_0-2)+(y_0+5)(y_0-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-4x_0-2y_0=20 \\ x_0^2+y_0^2-6x_0+4y_0=-3 \end{cases} \Rightarrow 2x_0-6y_0-23=0$

Vậy phương trình $MN: 2x-6y-23=0$.

Bài 1.2.17. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ có tâm I và điểm $M(5;-3)$. Chứng minh rằng từ M, ta có thể vẽ đến (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A,B là tiếp điểm). Tính diện tích của tứ giác MAIB.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

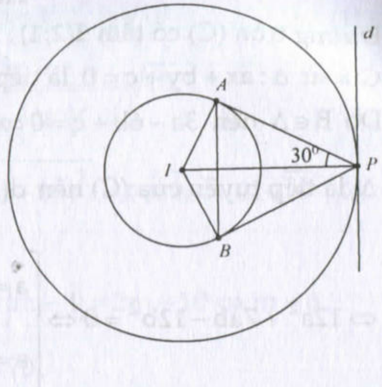
Vì $MI=\sqrt{41}>R$ nên M nằm ngoài đường tròn (C), do đó từ M ta luôn vẽ được hai tiếp tuyến tới đường tròn (C).

Ta có $S_{MAIB}=2S_{\Delta MAI}=IA.MA=R.\sqrt{MI^2-R^2}=3.\sqrt{41-9}=12\sqrt{2}$ (đvdt).

Bài 1.2.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d:3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm và bán kính lần lượt là: $I(1;-2); R=3$.



Do tam giác PAB đều nên $\widehat{API} = 30^0 \Rightarrow IP = 2IA = 2R = 6$.

Suy ra P thuộc vào đường tròn (C') có tâm I và bán kính $R' = 6$.

Mà $P \in d$ nên P chính là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C').

Suy ra trên d có duy nhất điểm P thỏa mãn yêu cầu bài toàn khi và chỉ khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C') tại P, hay là

$d(I,d) = 6 \Leftrightarrow m = 19, m = -41$.

Bài 1.2.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ và đường thẳng $d: x - y = 0$. Tìm tọa độ các điểm M trên đường thẳng d, biết từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) và đường thẳng AB tạo với d một góc φ với $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $M(m;m)$ và $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm vẽ từ M đến (C). Khi đó, ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{IT}.\overrightarrow{MT} = 0\\ T \in (C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_0-1)(x_0-m) + (y_0+2)(y_0-m) = 0\\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2 + y_0^2 - (m+1)x_0 - (m-2)y_0 - m = 0\\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 = 0\end{cases} \Rightarrow (m-1)x_0 + (m+2)y_0 + m = 0.$$

Suy ra phương trình $AB: (m-1)x + (m+2)y + m = 0$.

Mặt khác AB tạo với d một góc φ với $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ nên ta có:

$$\frac{|m-1-m-2|}{\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2 + (m+2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5} \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -1$

Thử lại ta thấy cả hai trường hợp này ta đều $IM = R$ hay $M \in (C)$.

Vậy không có điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 1.2.20. Cho hai đường tròn

$(C_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $(C_2): (x-7)^2 + (y+1)^2 = 4$.

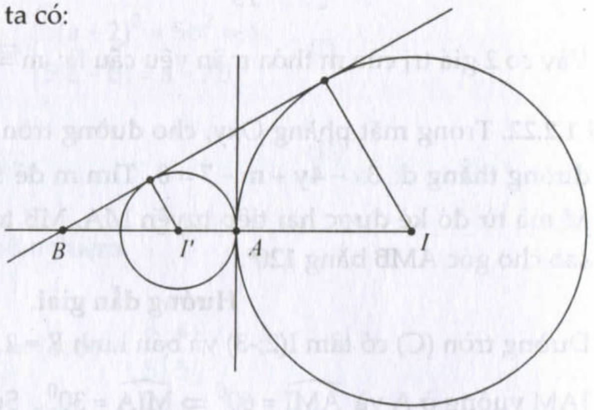
Chứng minh (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A. Gọi d là một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) không đi qua A, đường thẳng d cắt đường thẳng nối hai tâm tại B. Tìm tọa độ điểm B.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(3;2)$ và bán kính $R = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I'(7;-1)$ và bán kính $R' = 2$.

Gọi $A(x;y)$. Theo giả thiết ta có:



$$\frac{AI'}{AI} = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{I'A} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x - 7 = -\frac{2}{3}(x-3)\\ y + 1 = -\frac{2}{3}(y-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{27}{5}\\ y = \frac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{27}{5};\frac{1}{5}\right).$$

Tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A.

Véc tơ pháp tuyến của tiếp tuyến tại $A: \vec{n} = \overrightarrow{II'} = (4;-3)$

Phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A là: $4x - 3y - 21 = 0$.

Gọi $B(x_0;y_0)$, theo giả thiết ta có $\frac{BI'}{BI} = \frac{R'}{R}$

Suy ra $\overrightarrow{IB'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 - 7 = \frac{2}{3}(x_0 - 3)\\ y_0 + 1 = \frac{2}{3}(y_0 - 2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = 15\\ y_0 = -7\end{cases} \Rightarrow B(15;-7)$.

Bài 1.2.21. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên Δ.

Để Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì: $IH < R$

Khi đó $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = IH.HA \le \frac{IH^2 + HA^2}{2} = \frac{IA^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 1$

Suy ra $\max S_{\Delta IAB} = 1$ khi $IH = HA = 1 < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |1-4m| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{8}{15} \end{array}\right. .$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là: $m = 0$ và $m = \frac{8}{15}$.

Bài 1.2.22. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m - 7 = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm M mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho góc AMB bằng 120^0.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm I(2;-3) và bán kính R = 2. Theo giả thiết ta có tam giác IAM vuông ở A và $\widehat{AMI} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MIA} = 30^0$. Suy ra: $IM = \frac{AI}{\cos 30^0} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Vì $M \in (d)$ nên $M\left(1 + 4t; -1 + \frac{m}{4} + 3t\right)$.

Ta có $IM^2 = (4t-1)^2 + \left(3t + \frac{m}{4} + 2\right)^2 = 25t^2 + \left(\frac{3m}{2} + 4\right)t + \frac{m^2}{16} + m + 4$

Suy ra: $25t^2 + \left(\frac{3m}{2} + 4\right)t + \frac{m^2}{16} + m + 4 = \frac{16}{3}$

$$\Leftrightarrow 25t^2 + \left(\frac{3m}{2} + 4\right)t + \frac{m^2}{16} + m - \frac{4}{3} = 0 \quad (*)$$

Ta có : $\Delta = \left(\frac{3m}{2} + 4\right)^2 - 100\left(\frac{m^2}{16} + m - \frac{4}{3}\right) = 4m^2 - 88m + \frac{448}{3}$.

Để có 1 điểm M thỏa mãn đề bài thì PT(*) có 1 nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 88m + \frac{448}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 11 \pm \sqrt{\frac{251}{3}}.$$

Bài 1.2.23. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$, $\Delta_2 : x - 7y = 0$. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C₁); biết đường tròn (C₁) tiếp xúc với các đường thẳng Δ₁, Δ₂ và tâm K thuộc đường tròn (C).

Hướng dẫn giải.

Gọi $K(a;b)$, $K \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ (1)

Ta có (C_1) tiếp xúc với $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5|a-b| = |a-7b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5(a-b) = a - 7b \end{cases} \quad (I)$$

Hoặc $\begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5(a-b) = -a + 7b \end{cases}$ (II)

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 - 20a + 16 = 0 \\ b = -2a \end{cases}$ vô nghiệm.

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 25b^2 - 40b + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bán kính $(C_1): R = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Vậy tâm $I\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Bài 1.2.24. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1 : mx + (m-1)y + m = 0$ và $d_2 : (2m-2)x - 2my + 1 = 0$. Chứng minh rằng d₁ và d₂ luôn cắt nhau tại một điểm nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải.

Ta thấy $d_1 \perp d_2$ nên d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại I.

Mặt khác: d_1 đi qua điểm cố định $A(-1;0)$,

d_2 đi qua điểm cố định $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Do đó khi m thay đổi thì I luôn nằm trên đường tròn đường kính AB.

Bài 1.2.25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$, đường thẳng $(d): x + y + m = 0$. Tìm m để (C) cắt (d) tại A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

* (C) có tâm O(0;0) , bán kính R=1

* (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow d(O;d)<1$

* Ta có $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin AOB=\frac{1}{2}.\sin AOB\le\frac{1}{2}$

Từ đó diện tích tam giác AOB lớn nhất khi và chỉ khi

$$AOB=90^0 \Leftrightarrow d(I;d)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m=\pm1.$$

Bài 1.2.26. Trong mp với hệ tọa độ Oxy, cho các đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$, $(C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng $d: x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho AB vuông góc với d.

Hướng dẫn giải.

(C_1) có tâm $O(0;0)$ bán kính $R_1=2$

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó, OM//d và OM đi qua O nên phương trình của OM là $x-y=0$. Gọi I là tâm của đường tròn cần tìm

Vì $I\in OM \Rightarrow I(a;a)$

Mà $I\in(C_2)$ nên $2a^2-12a+18 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow I(3;3)$

Bán kính của đường tròn cần tìm $R=d(I,d)=\frac{|3-3-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm: $(x-3)^2+(y-3)^2=8$.

Bài 1.2.27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2+2x-4y-4=0, (C_2): x^2+y^2-10x+12y-3=0$.

Chứng minh rằng (C_1), (C_2) cắt nhau và tìm số đo góc giữa 2 đường thẳng $(d_1),(d_2)$ là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Hướng dẫn giải.

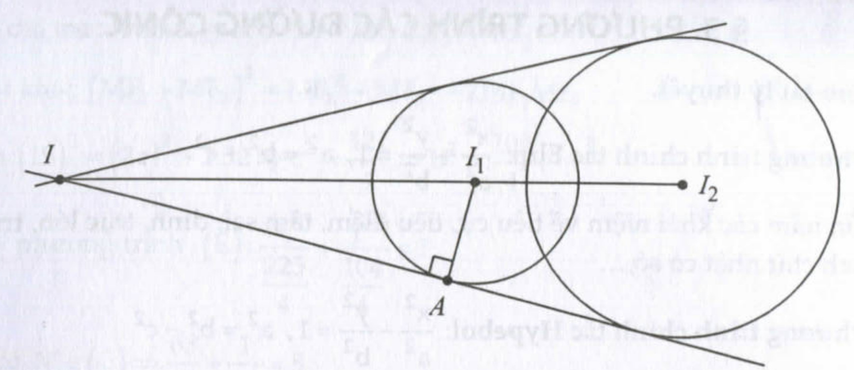
Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R_1=3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(5;-6)$, bán kính $R_2=8$

Vì $I_1I_2=10 \Rightarrow R_2-R_1<I_1I_2<R_2+R_1$ nên hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau

Gọi I là giao điểm của hai tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

Ta có: $\frac{II_1}{II_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{II_1}{I_1I_2}=\frac{3}{5} \Rightarrow II_1=\frac{3}{5}I_1I_2=6$.



Gọi A là một tiếp điểm của (C_1), ta có

$$I_1A=R_1=3,\ II_1=6 \Rightarrow \sin\widehat{AII_1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AII_1}=30^0.$$

Vậy góc giữa hai tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) bằng 60^0.

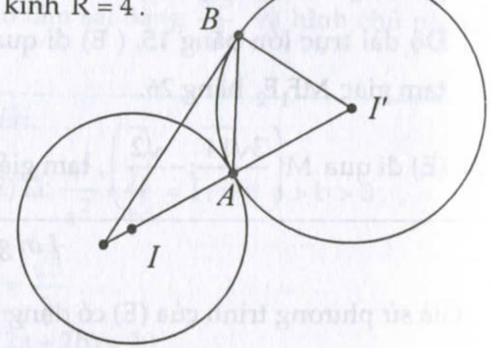
Bài 1.2.29. Cho đường tròn (C) có phương trình là $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và đường thẳng d có phương trình là $3x+4y-1=0$. Gọi (C′) là đường tròn có bán kính bằng 5 tiếp xúc ngoài với (C) tại A và tiếp xúc với d tại B. Tính đoạn AB

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=4$.

Gọi $I'(a;b)$, R' lần lượt là tâm và bán kính của (C′), suy ra $R'=5$ và $II'=R+R'=9$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác AI′B ta có:



$$AB^2=I'A^2+I'B^2-2.I'A.I'B.\cos\widehat{AI'B}$$

$$=50(1-\cos\widehat{AI'B})$$

Mà $\cos\widehat{AI'B}=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta},\overrightarrow{I'I}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{I'I}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{I'I}\right|}=\frac{|3(a-2)+4(b+3)|}{5.9}=\frac{|3a+4b+6|}{45}$

Mặt khác: $d(I',\Delta)=5 \Rightarrow \frac{|3a+4b-1|}{5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a+4b=26\\3a+4b=-24\end{array}\right.$.

- $3a+4b=26 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B}=\frac{32}{45} \Rightarrow AB^2=50\left(1-\frac{32}{45}\right)=\frac{130}{9} \Rightarrow AB=\frac{\sqrt{130}}{3}$
- $3a+4b=-24 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B}=\frac{2}{5} \Rightarrow AB^2=50\left(1-\frac{2}{5}\right)=30 \Rightarrow AB=\sqrt{30}$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH CÁC ĐƯỜNG CÔNIC

1. Tóm tắt lý thuyết.

1.1. Phương trình chính tắc Elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a^2=b^2+c^2$

Cần nắm các khái niệm về tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai, đỉnh, trục lớn, trục bé, hình chữ nhật cơ sở,…

1.2. Phương trình chính tắc Hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a^2=b^2-c^2$.

Cần nắm các khái niệm về tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai, đỉnh, trục lớn, trục bé, hình chữ nhật cơ sở, phương trình đường tiệm cận…

1.3. Phương trình chính tắc Parabol: $y^2=2px,\ p>0$.

Cần nắm các khái niệm đường chuẩn, bán kính qua tiêu,..

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.3.1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

1) Tâm sai bằng $\frac{4}{5}$ và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (E) có phương trình $x^2+y^2=34$.

2) Độ dài trục lớn bằng 15, (E) đi qua M sao cho $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$ và diện tích tam giác MF_1F_2 bằng 26.

3) (E) đi qua $M\left(\frac{3\sqrt{14}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

Lời giải.

Giả sử phương trình của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$.

1) Theo đề bài $e=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow c=\frac{4}{5}a\Leftrightarrow a^2-b^2=\frac{16}{25}a^2\Rightarrow a^2=\frac{25}{9}b^2$ (1).

Mặt khác, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính $R=\sqrt{34}$

nên ta có: $(2a)^2+(2b)^2=4.34\Leftrightarrow a^2+b^2=34$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra : $\begin{cases}a^2=25\\ b^2=9\end{cases}$. Vậy phương trình (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2) Ta có: $S_{MF_1F_2}=26,\ \widehat{F_1MF_2}=90^\circ\Rightarrow MF_1.MF_2=52$ và $MF_1^2+MF_2^2=(2c)^2$.

Độ dài trục lớn bằng $15\Rightarrow 2a=15=MF_1+MF_2$.

Mặt khác $(MF_1+MF_2)^2=MF_1^2+MF_2^2+2MF_1MF_2$

nên $(15)^2=(2c)^2+2.52\Rightarrow c^2=\frac{121}{4}\Rightarrow b^2=\frac{104}{4}$.

Vậy phương trình $(E):\frac{x^2}{\frac{225}{4}}+\frac{y^2}{\frac{104}{4}}=1$.

3) Ta có $M\in(E)\Rightarrow\frac{63}{a^2}+\frac{1}{b^2}=8$.

$\overrightarrow{F_1M}=\left(\frac{2\sqrt{14}}{4}+c;-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\overrightarrow{F_2M}=\left(\frac{2\sqrt{14}}{4}-c;-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Tam giác MF_1F_2 vuông tại $M\Rightarrow\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow c^2=8=a^2-b^2$.

Suy ra $a^2=9,\ b^2=1$.

Vậy phương trình của $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

Ví dụ 1.3.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ 2(2a+2b)=20\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$.

Giải hệ trên, ta tìm được: $a=3$ và $b=2$.

Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Ví dụ 1.3.3. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho Hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Lời giải.

(H) có các tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0)$.

Hình chữ nhật cơ sở của (H) có một đỉnh là M(4; 3).

Giả sử phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với a > b)

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0) \Rightarrow a^2-b^2=5^2$ (1)

$M(4;3)\in(E) \Leftrightarrow 9a^2+16b^2=a^2b^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2=5^2+b^2 \\ 9a^2+16b^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=40 \\ b^2=15 \end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$.

Ví dụ 1.3.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=13$. Lập phương trình chính tắc của hypebol có hai tiệm cận vuông góc với nhau và cắt đường tròn (C) tại bốn điểm lập thành hình chữ nhật có diện tích bằng 24.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a, b > 0

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là: $y=\pm\frac{b}{a}x$

Hai tiệm cận vuông góc với nhau ⇔ a = b.

Phương trình (H): $x^2-y^2=a^2$

Tọa độ giao điểm của (H) và (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{a^2+13}{2} \\ y^2=\frac{13-a^2}{2} \end{cases}$$

Các giao điểm có tọa độ A (x; y), B(x; −y), C(−x; −y), D(−x; y)

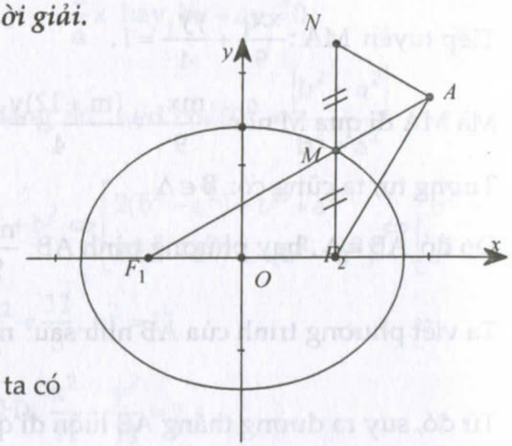
ABCD là hình chữ nhật có diện tích là: $4|xy|$

Giả thiết: $16x^2y^2=24^2 \Rightarrow a^2=5$

Vậy phương trình của (H): $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$.

Ví dụ 1.3.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Lời giải.



Ta có: $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.

Đường thẳng $AF_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{\sqrt{3}}$

Từ đó ta tìm được $M\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow AM=MF_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Do N đối xứng với F_2 qua M nên ta có

$MN=MF_2 \Rightarrow MA=MF_2=MN$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 có tâm là điểm M, bán kính $R=MA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ nên nó có phương trình : $(x-1)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$.

Ví dụ 1.3.6. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x-3y+6=0$.
2. Từ điểm M nằm trên đường thẳng $d: x-y+12=0$ ta vẽ đến (E) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

1) Gọi $N(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$ (1).

Phương trình tiếp tuyến tại $N: \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x-3y+6=0$ nên ta có:

$2.\frac{x_0}{9} - 3.\frac{y_0}{4} = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{8}{27}x_0$ thay vào (1) ta được:

$\frac{x_0^2}{9} + \frac{16x_0^2}{729} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{27}{\sqrt{97}} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{8}{\sqrt{97}}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\pm 3x \pm 2y - \sqrt{97} = 0$.

2) Gọi $M(m; m+12)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Tiếp tuyến MA : $\frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1$.

Mà MA đi qua M nên: $\frac{mx_1}{9} + \frac{(m+12)y_1}{4} = 1 \Rightarrow A \in \Delta : \frac{mx}{9} + \frac{(m+12)y}{4} = 1$.

Tương tự, ta cũng có: $B \in \Delta$.

Do đó $AB \equiv \Delta$, hay phương trình AB: $\frac{mx}{9} + \frac{(m+12)y}{4} = 1$.

Ta viết phương trình của AB như sau: $m\left(\frac{x}{9} + \frac{y}{4}\right) + 3y - 1 = 0$.

Từ đó, suy ra đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định $P\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 1.3.7. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

1) Nửa trục thực bằng 4, tiêu cự bằng 10

2) Tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận có phương trình $y = \frac{2}{3}x$

3) (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0.

Lời giải.

Giả sử phương trình $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Theo đề bài ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ 2c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 3$.

Vậy phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2) Ta có $2c = 2\sqrt{13} \Rightarrow c = \sqrt{13}$

Phương trình tiệm cận $y = \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$

Nên ta có hệ: $\begin{cases} b^2 = \frac{4}{9}a^2 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases}$. Phương trình $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3) Ta có: $M(-2;1) \in (H)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ (*)

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$; $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2}$

Hay $\frac{1}{2} = \frac{\left|b^2 - a^2\right|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2\left|b^2 - a^2\right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{array}\right.$

- Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (*) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$.

- Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (*) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Ví dụ 1.3.8. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của (E).

Lời giải.

Giả sử hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$

Vì (H) có hai tiệm cận $y = \pm 2x$ nên ta có: $\frac{n}{m} = 2 \Rightarrow n = 2m$.

Đối với elip ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 10 = 2$.

Theo giả thiết thì tiêu điểm của Hypebol cũng là của elip nên:

$c^2 = m^2 + n^2 \Leftrightarrow 10 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2, n^2 = 8$

Phương trình hypebol (H) là: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Ví dụ 1.3.9. Trong mặt phẳng Oxy cho Hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (H), biết tiếp tuyến đi qua M(−3;−2)
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (H), biết tiếp tuyến tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{27}{40}$.

Lời giải.

Gọi $N(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có: $\frac{x_0^2}{9} - y_0^2 = 1$ (1).

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $\frac{xx_0}{9} - yy_0 = 1$

1) Vì tiếp tuyến đi qua M nên: $-\frac{x_0}{3} + 2y_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 6y_0 - 3$ thay vào (1).

$$(2y_0 - 1)^2 - y_0^2 = 1 \Leftrightarrow 3y_0^2 - 4y_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

- Với $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -3 \Rightarrow \Delta: x + 3 = 0$
- Với $y_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_0 = 5 \Rightarrow \Delta: \frac{5x}{9} - \frac{4y}{3} = 1 \Leftrightarrow 5x - 12y - 9 = 0$.

2) Đường thẳng Δ cắt Ox, Oy tại $A\left(\frac{9}{x_0};0\right)$, $B\left(0;-\frac{1}{y_0}\right)$

Suy ra $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{9}{2}\frac{1}{|x_0y_0|}$.

Mà $S_{OAB} = \frac{27}{40} \Rightarrow \frac{9}{2}\frac{1}{|x_0y_0|} = \frac{27}{40} \Rightarrow |x_0y_0| = \frac{20}{3} \Rightarrow y_0^2 = \frac{400}{9x_0^2}$ thay vào (1)

$$\frac{x_0^2}{9} - \frac{400}{9x_0^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^4 - 9x_0^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 25 \Leftrightarrow x_0 = \pm 5 \Rightarrow y_0 = \pm\frac{4}{3}.$$

Vậy các điểm M cần tìm là: $M\left(\pm 5;\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\pm 5;-\frac{4}{3}\right)$.

Ví dụ 1.3.10. Viết phương trình chính tắc của Parabol (P), biết :

1) Khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$.

2) (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$

3) (P) cắt elip (E): $4x^2 + 6y^2 = 24$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 2$.

Lời giải.

1) Ta có tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$d(F;\Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ suy ra $p = 16$ hoặc $p = 32$.

Vậy phương trình của (P): $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

2) Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tạo độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Vì $A \in \Delta \Rightarrow A(a;3a)$..

Mặt khác $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Nếu $a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3.\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$.

Nếu $a = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ (loại).

3) Do (E) và (P) có tính đối xứng và $AB = 2 \Rightarrow A(t;1), B(t;-1),\ t > 0$

Vì $A \in (E) \Rightarrow 4t^2 + 6 = 24 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{2}}$. $A \in (P) \Rightarrow 1 = 2p.\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Vậy phương trình $(P): y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x$.

Ví dụ 1.3.11. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho

1) $OM = \frac{\sqrt{481}}{5}$.

2) M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60^0.

3) M cách $\Delta: 3x + 4y - 12 = 0$ một khoảng $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có: $a^2 = 25, b^2 = 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow a = 5, b = 4, c = 3$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$ (1).

1) Ta có: $OM = \frac{\sqrt{481}}{5} \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = \frac{481}{25} \Rightarrow x_0^2 = \frac{481}{25} - y_0^2$ thay vào (1):

$$\frac{481}{625} + \frac{9}{400}y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{256}{25} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{16}{5} \Rightarrow x_0 = \pm 3.$$

Vậy ta có các điểm M là: $M\left(\pm\frac{16}{5}; 3\right), M\left(\pm\frac{16}{5}; -3\right)$.

2) Ta có $MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x_0,\ MF_2 = 5 - \frac{3}{5}x_0$.

M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $60^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{F_1MF_2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - F_1M.F_2M$$

$$\Leftrightarrow 36 = \left(5 + \frac{3}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{3}{5}x_0\right)^2 - \left(5 + \frac{3}{5}x_0\right)\left(5 - \frac{3}{5}x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow 36 = 25 + \frac{27}{25}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{275}{27} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{5\sqrt{33}}{9} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy các điểm M cần tìm là: $M\left(\pm\frac{5\sqrt{33}}{9}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), M\left(\pm\frac{5\sqrt{33}}{9}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$.

3) Ta có: $d(M, \Delta) = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 12|}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow |3x_0 + 4y_0 - 12| = 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0 + 4y_0 - 12 = 4 \\ 3x_0 + 4y_0 - 12 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{16 - 4y_0}{3} \\ x_0 = \frac{8 - 4y_0}{3} \end{array}\right..$$

- $x_0 = \frac{16 - 4y_0}{3}$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{\left(\frac{16 - 4y_0}{3}\right)^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 481y_0^2 - 2048y_0 + 496 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{124}{481} \Rightarrow x_0 = \frac{2400}{481} \end{array}\right..$$

- $x_0 = \frac{8 - 4y_0}{3}$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{\left(\frac{8 - 4y_0}{3}\right)^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 481y_0^2 - 1024y_0 - 2576 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = \frac{512 + 60\sqrt{417}}{481} \Rightarrow x_0 = \frac{600 - 80\sqrt{417}}{481} \\ y_0 = \frac{512 - 60\sqrt{417}}{481} \Rightarrow x_0 = \frac{600 + 80\sqrt{417}}{481} \end{array}\right..$$

Vậy có 4 điểm M thoả yêu cầu bài toán:

$M(0; 4),\ M\left(\frac{2400}{481}; \frac{124}{481}\right),\ M\left(\frac{512 \pm 60\sqrt{417}}{481}; \frac{600 \mp 80\sqrt{417}}{481}\right)$.

Ví dụ 1.3.12. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

1) Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

2) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3.

3) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_M; y_M) \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{9} - \frac{y_M^2}{6} = 1$. (1)

1) Từ phương trình (H) có $a^2 = 9,\ b^2 = 6$ nên $a = 3,\ b = \sqrt{6}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15}$

Suy ra $F_1(-\sqrt{15}; 0); F_2(\sqrt{15}; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{F_1M} = (x_M + \sqrt{15}; y_M); \overrightarrow{F_2M} = (x_M - \sqrt{15}; y_M)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow (x_M + \sqrt{15})(x_M - \sqrt{15}) + y_M^2 = 0 \Leftrightarrow y_M^2 = 15 - x_M^2$ thế vào (1) ta

được $\frac{{x_M}^2}{9} - \frac{15 - {x_M}^2}{6} = 1 \Leftrightarrow x_M = \pm\sqrt{\frac{63}{5}}$ suy ra $y_M = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$.

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là

$M_1\left(\sqrt{\frac{63}{5}}; \sqrt{\frac{12}{5}}\right),\ M_2\left(-\sqrt{\frac{63}{5}}; \sqrt{\frac{12}{5}}\right),\ M_3\left(\sqrt{\frac{63}{5}}; -\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ và $M_4\left(-\sqrt{\frac{63}{5}}; -\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

2) Ta có $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3 = \left|3 + \frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 0(\text{loại}) \\ x_M = \frac{-18}{\sqrt{15}} \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{210}}{5} \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm: $M_1\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\dfrac{18}{\sqrt{15}};-\dfrac{\sqrt{210}}{5}\right)$

3) Phương trình hai tiệm cận là : $d_1 : y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x;\ d_2 : y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\dfrac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M-y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M+y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}.\quad (2)$$

Mặt khác $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54>0$ suy ra

$$(2)\Leftrightarrow\left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}\Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}}\Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}.$$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và

$M_4\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.3.13. Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol $(P): y^2=4x$. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (P) vẽ từ $M_1(0;1)$ và $M_2(2;-3)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Lời giải.

- Phương trình tiếp tuyến đi qua M_1 có dạng: $ax+by-b=0$.

Điều kiện tiếp xúc: $b^2.2=2a(-b)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\a=-b\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $d_1: x=0,\ d_2: x-y+1=0$.

- Phương trình tiếp tuyến đi qua M_2 có dạng: $ax+by-2a+3b=0$.

Điều kiện tiếp xúc: $b^2.2=2a(3b-2a)\Leftrightarrow 2a^2-3ab+b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b=2a\end{array}\right.$.

Suy ra hai tiếp tuyến đi qua M_2 là: $\Delta_1: x+2y+4=0,\ \Delta_2: x+y+1=0$.

Ta có $d_2\perp\Delta_2$ (đpcm).

Ví dụ 1.3.14. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}(a;b)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\begin{cases}x=1+at\\y=2+bt\end{cases},\ \text{với } a^2+b^2\neq 0.$$

Do $A,B\in\Delta$ suy ra $A=(1+at_1;2+bt_1)$, $B=(1+at_2;2+bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2x_I=x_A+x_B\\2x_I=x_A+x_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(t_1+t_2)=0\\b(t_1+t_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow t_1+t_2=0\ \ (1)$$

$A,B\in(E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+at)^2}{16}+\frac{(2+bt)^2}{9}=1\Leftrightarrow\left(9a^2+16b^2\right)t^2+2(9a+32b)t-139=0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1+t_2=0\Leftrightarrow 9a+32b=0$

Ta có thể chọn $b=-9$ và $a=32$.

Vậy đường thẳng d có phương trình : $9x+32y-73=0$.

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x;y)\in(E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B(x';y')$.

I là trung điểm AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2x_I=x_A+x_B\\2x_I=x_A+x_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2-x\\y'=4-y\end{cases}\Rightarrow M'(2-x;4-y)$$

$$\text{Vì } M,M'\in(E)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\\\dfrac{(2-x)^2}{16}+\dfrac{(4-y)^2}{9}=1\end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{4-4x}{16}+\dfrac{16-8y}{9}=0$ hay $9x+32y-73=0$ (*)

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là:

$$9x+32y-73=0.$$

Ví dụ 1.3.15. Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai điểm M, N thuộc (E) sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh rằng :

1) $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

2) Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

1)

- Dễ thấy một trong hai điểm trùng với bốn đỉnh của (E) thì đẳng thức hiển nhiên đúng
- Nếu cả hai điểm không trùng với các đỉnh của (E):

Gọi $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ và k ($k \neq 0$) là hệ số góc của đường thẳng OM thì hệ số góc của ON là $-\frac{1}{k}$ (vì OM vuông góc với ON).

Do $M, N \in (E)$ nên $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ (1), $\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{y_N^2}{b^2}=1$ (2)

Đường thẳng OM có phương trình là $y=kx$ suy ra $y_M=kx_M$ (3)

Đường thẳng ON có phương trình là $y=-\frac{1}{k}x$ suy ra $y_N=-\frac{1}{k}x_N$ (4)

Thay (3) vào (1) suy ra: $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{k^2x_M^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x_M^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1 \Leftrightarrow x_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$

$\Rightarrow y_M^2=k^2x_M^2=\frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$. Do đó $OM^2=x_M^2+y_M^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{a^2k^2+b^2}$

Tương tự thay (4) vào (2) suy ra:

$$\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{\frac{1}{k^2}x_N^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x_N^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{k^2b^2}\right)=1 \Leftrightarrow x_N^2=\frac{a^2k^2b^2}{a^2+k^2b^2}$$

$\Rightarrow y_N^2=\frac{1}{k^2}x_N^2=\frac{a^2b^2}{a^2+k^2b^2}$. Do đó $ON^2=x_N^2+y_N^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{a^2+k^2b^2}$

Suy ra

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{b^2+k^2a^2}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}+\frac{a^2+k^2b^2}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(k^2+1\right)}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Vậy $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

2) Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng MN khi đó OH là đường cao của tam giác vuông MON. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $R=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ví dụ 1.3.16. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ có các tiêu điểm F_1, F_2. Lấy M là điểm bất kì trên (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số.

Lời giải.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$\Delta_1: y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$ và $\Delta_2: y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$

Giả sử $M(x_M;y_M)$ khi đó theo công thức khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng ta có

$$d(M;\Delta_1)=\frac{|bx_M-ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}};\ d(M;\Delta_2)=\frac{|bx_M+ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra $d(M;\Delta_1)d(M;\Delta_2)=\frac{|bx_M-ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|bx_M+ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2x_M^2-a^2y_M^2}{a^2+b^2}$

Mặt khác M thuộc (H) nên : $\frac{x_M{}^2}{a^2}-\frac{y_M{}^2}{b^2}=1$ hay $b^2x_M^2-a^2y_M^2=a^2b^2$

Do đó $d(M;\Delta_1)d(M;\Delta_2)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ là hằng số

Ví dụ 1.3.17. Cho parabol (P): $y^2=2ax$. Đường thẳng Δ bất kỳ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k(k \neq 0)$ cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M và N đến trục Ox là hằng số.

Lời giải.

Tiêu điểm $F(a;0)$.

Vì đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k \neq 0$ nên có phương trình Δ:

$$y=k\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

Hoành độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của phương trình:

$$k^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = 2ax \Leftrightarrow 4k^2x^2 - 4\left(2a+k^2a\right)x + k^2a^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 4\left(2a+k^2a\right)^2 - 4k^4a^2 = 16a^2\left(1+k^2\right) > 0$$

Theo định lý Viet có $x_M.x_N = \frac{a^2}{4}$

Mặt khác ta có $d\left(M;Ox\right) = |y_M|;\ d\left(N;Ox\right) = |y_N|$

Suy ra $d\left(M;Ox\right).d\left(N;Ox\right) = |y_M.y_N| = \sqrt{4a^2|x_M.x_N|} = a^2$.

Ví dụ 1.3.18. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0); F_2(\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M trên elip, hãy tính biểu thức:

$$P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M.$$

Lời giải.

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b > 0$.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ $\begin{cases} a^2 = b^2 + 3 \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 4, b^2 = 1$.

Suy ra $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Xét $M(x_0;y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$.

Suy ra $P = (a+ex_0)^2 + (a-ex_0)^2 - 2(x_0^2+y_0^2) - (a^2 - e^2x_0^2) = 1$.

Ví dụ 1.3.19. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; (E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc Δ. Lập phương trình (E_2), biết (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Lời giải.

Vì hai Elip có cùng tiêu điểm nên ta có: $a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

Gọi $M(m;m+5) \in \Delta$, do M thuộc (E_1) nên: $\frac{m^2}{a^2} + \frac{(m+5)^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow m^2(a^2-9) + (m+5)^2a^2 = a^2(a^2-9) \Leftrightarrow a^4 - 2(m^2+5m+17)a^2 + 9m^2 = 0$$

Vì $a^2 > 9$ nên ta có $a^2 = m^2 + 5m + 17 + \sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)} = f(m)$

- Nếu $m^2 + 5m \ge 0 \Rightarrow f(m) > 17$
- Với $m \in (-5;0)$, ta có:

$$f(m) = \frac{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17) - (m^2+5m)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)} - (m^2+5m)} + 17$$

$$= \frac{(5m+17)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)} - (m^2+5m)} + 17 \ge 17$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = -\frac{17}{5}$. Khi đó $a^2 = 17, b^2 = 8$.

Vậy phương trình $(E_2): \frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Ví dụ 1.3.20. Trên hệ tọa độ Oxy cho Elip: $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $C(0;2)$.

Tìm hai điểm A, B nằm trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại C và có chu vi lớn nhất.

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại C nằm trên Ox nên A và B đối xứng nhau qua Ox

Gọi $A(x_0;y_0) \in (E)$, suy ra $B(x_0;-y_0)$ ta giả sử $y_0 > 0$.

Chu vi tam giác ABC:

$$2p = 2AC + BC = 2\sqrt{(2-x_0)^2 + y_0^2} + 2|y_0| = 2\sqrt{(2-x_0)^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} + 2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}$$

$$= \sqrt{2-x_0}\left(\sqrt{10-3x_0} + \sqrt{2+x_0}\right) = \sqrt{2-x_0}\left(\sqrt{10-3x_0} + \frac{\sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_0)}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}\right)$$

$$\le \sqrt{2-x_0}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4+\sqrt{13}}\right)\left(10 - 3x_0 + (4+\sqrt{13})(2+x_0)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}}}\sqrt{(2-x_0)(1+\sqrt{13})}.\sqrt{18 + 2\sqrt{13} + (1+\sqrt{13})x_0}$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}\left[(2-x_0)(1+\sqrt{13}) + 18 + 2\sqrt{13} + (1+\sqrt{13})x_0\right]$$

$$=2\sqrt{\frac{\left(5+\sqrt{13}\right)^3}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x_0=\frac{-8}{1+\sqrt{13}}\Rightarrow y_0=\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}$.

Vậy $A\left(-\frac{8}{1+\sqrt{13}};\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}\right)$, $B\left(-\frac{8}{1+\sqrt{13}};-\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}\right)$.

3. Bài tập vận dụng.

Bài 1.3.1. Lập phương trình chính tắc của Elip (E), biết

1. (E) đi qua điểm $M(\sqrt{5};-2)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10
2. (E) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x+y-5=0$, $d_2: x-4y-10=0$
3. Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20
4. (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc một đường tròn
5. (E) đi qua $M(\sqrt{6};2)$ và phương trình hai đường chuẩn là $x=\pm 6$
6. (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của $(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Hướng dẫn giải.

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$ và $b^2=a^2-c^2$

1. Phương trình đường chuẩn là: $x=\pm\frac{a}{e}$

Suy ra , khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\frac{2a}{e}=\frac{2a^2}{c}=10 \Leftrightarrow a^2=5c$

$\Leftrightarrow a^4=25c^2 \Leftrightarrow a^4=25\left(a^2-b^2\right)\Leftrightarrow b^2=a^2-\frac{a^4}{25}$

Mặt khác, do (E) đi qua điểm $M\left(\sqrt{5};-2\right)$ nên:

$\frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow \frac{5}{a^2}+\frac{4}{a^2-\frac{a^4}{25}}=1\Leftrightarrow a^4-30a^2+225=0\Leftrightarrow a^2=15\Rightarrow b^2=6$

Vậy phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$.

2. Do (E) tiếp xúc với hai đường thẳng d₁ và d₂ nên theo điều kiện tiếp xúc có

$$\begin{cases}a^2+b^2=25\\ a^2+16b^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\\ b^2=5\end{cases}$$

Vậy phương trình của (E): $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

3. Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ 2(2a+2b)=20\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$

Giải hệ trên, ta tìm được: $a=3$ và $b=2$.

Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

4. Theo giả thiết $a=2\sqrt{2}$, các đỉnh trên Oy là $B_1(0;-b), B_2(0;b)$, $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. Tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi nên và có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn nên $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông suy ra $b=c$ mà $a^2=b^2+c^2$ $\Rightarrow b=2$.

Vậy phương trình $(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

5. Theo bài ra ta có: $\begin{cases}\frac{6}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{a^2}{c}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=\frac{4a^2}{a^2-6}\\ a^4=36c^2=36(a^2-b^2)\ (*)\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow a^4=36a^2-\frac{144a^2}{a^2-6}\Leftrightarrow a^2=36-\frac{144}{a^2-6}$

$\Leftrightarrow a^4-42a^2+360=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=30\Rightarrow b^2=5\\ a^2=12\Rightarrow b^2=8\end{array}\right.$.

Vậy có hai Elip thỏa yêu cầu bài toán là: $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{5}=1$ và $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

6. (H) có các tiêu điểm $F_1(-5;0);F_2(5;0)$. Hình chữ nhật cơ sở của (H) có một đỉnh là $M(4;3)$.

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0) \Rightarrow a^2 - b^2 = 5^2$ (1)

$M(4;3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2 = 5^2 + b^2 \\ 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 40 \\ b^2 = 15 \end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$.

Bài 1.3.2. Lập phương trình chính tắc của Hypebol (H), biết

1. Tâm sai $e = 2$, các tiêu điểm của (H) trùng với các tiêu điểm của elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
2. Độ dài tiêu cự bằng 10, phương trình tiệm cận $3x - 4y = 0$

3) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48

4) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Ta có elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Suy ra, tiêu điểm của (E) là $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$.

Vì các tiêu điểm của(H) trùng với các tiêu điểm của (E) nên có $c = 4$

Do (H) có tâm sai $e = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 12$

Vậy phương trình của (H) là : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

2. Theo đề bài ta có: $\begin{cases} 2c = 10 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 25 = a^2 + b^2 \\ b^2 = \frac{8}{16}a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases}$.

Vậy phương trình (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (1)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24 suy ra $2a.2b = 48 \Leftrightarrow ab = 12$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 18; b^2 = 8$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$

4) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1$.

Bài 1.3.3. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của (E).

Hướng dẫn giải.

Giả sử hypebol có dạng : $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$

Khi đó theo giả thiết ta có: $\frac{n}{m} = 2 \Rightarrow n = 2m$.

Đối với elip ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 10 = 2$.

Theo giả thiết thì tiêu điểm của Hypebol cũng là của elip nên $c^2 = m^2 + n^2 \Leftrightarrow 10 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2, n^2 = 8$

Phương trình hypebol là: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Bài 1.3.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc một đường tròn. Hãy lập phương trình chính tắc của (E).

Hướng dẫn giải.

Gọi $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ là phương trình elip cần tìm.

Theo giả thiết $a = 2\sqrt{2}$, các đỉnh trên Oy là $B_1(0;-b), B_2(0;b)$, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi nên và có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn nên $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông suy ra $b = c$ mà $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow b = 2$. Vậy PT $(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Bài 1.2.5. Lập phương trình chính tắc Hypebol (H), biết (H) đi qua $M\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{3};1\right)$ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của Elip $(E): \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{11} = 1$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử phương trình Hypebol (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Vì $M \in (H) \Rightarrow \dfrac{160}{9a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 160b^2 - 9a^2 = 9a^2b^2$ (1)

Vì (E) có tiêu điểm $F_1(5;0)$ nên đó cũng là tiêu của (H)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 - b^2$ thay vào (1) ta được:

$160b^2 - 9(25 - b^2) = 9(25 - b^2)b^2 \Leftrightarrow 9b^4 - 56b^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 16$.

Vậy phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Bài 1.3.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải.

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Do (E) có độ dài trục lớn là 8 nên ta có $2a = 8$, tức $a = 4$.

Và như thế, phương trình của (E) có thể được viết lại thành: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Tiếp theo, từ giả thiết $(C): x^2 + y^2 = 8$ cắt (E) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông, ta thấy rằng bốn đỉnh đó phải nằm trên các đường thẳng $y = x$ và $y = -x$. Suy ra (C), (E) và đường thẳng $d: y = x$ có với nhau hai điểm chung.

Mặt khác, ta có tọa độ giao điểm của (C) với d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x = 2 \\ y = x = -2 \end{array}\right..$$

Suy ra $(C) \cap d = \{A, B\}$ với A(2, 2) và B(−2, −2). Và từ các lý luận ở trên, ta có $A \in (E)$. Thay tọa độ của điểm A vào phương trình của (E), ta được $b^2 = \dfrac{16}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) cần tìm là: $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

Bài 1.3.7. Viết phương trình chính tắc Parabol (P), biết khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng x + y- 12 = 0 là $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi phương trình chính tắc của (P) : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

Tọa độ tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$.

Theo đầu bài, khoảng cách từ F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$

nên: $d(F;\Delta) = \dfrac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow p = 16$ hoặc $p = 32$.

Vậy phương trình của (P): $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Bài 1.3.8. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (E) sao cho:

1) Điểm M có tung gấp $\dfrac{4}{5}$ lần hoành độ.

2) $MF_1 = \dfrac{41}{9}MF_2$.

3) $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$.

4) Diện tích tam giác ΔOAM lớn nhất với $A(1;1)$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử $M(x_0;y_0) \in (E)$ suy ra $\dfrac{x_0^2}{25} + \dfrac{y_0^2}{9} = 1$. (1)

1) Theo đề bài, ta có: $y_0 = \dfrac{4}{5}x_0$ thay vào (1) ta được

$$\frac{x_0^2}{25}+\frac{\left(\frac{4}{5}x_0\right)^2}{9}=1 \Leftrightarrow x_0^2=9 \Leftrightarrow x_0=\pm 3$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(3;\frac{12}{5}\right)$ và $M_2\left(-3;-\frac{12}{5}\right)$.

2) Từ phương trình (E) có $a^2=25, b^2=9$ nên $a=5, b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=4$

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm ta có :

$$MF_1=a+\frac{c}{a}x_0=5+\frac{4}{5}x_0 \text{ và } MF_2=a-\frac{c}{a}x_0=5-\frac{4}{5}x_0$$

Theo giả thiết $MF_1=\frac{41}{9}MF_2$ suy ra $5+\frac{4}{5}x_0=\frac{41}{9}\left(5-\frac{4}{5}x_0\right) \Leftrightarrow x_0=4$

Thay vào (*) ta có : $\frac{16}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1 \Leftrightarrow y_M=\pm\frac{9}{5}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là: $M_1\left(4;\frac{9}{5}\right)$ và $M_2\left(4;-\frac{9}{5}\right)$

3) Ta có $F_1(-4;0), F_2(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{MF_1}(x_0+4;y_0), \overrightarrow{MF_2}(x_0-4;y_0)$

Vì $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ nên

$$\cos 60^0=\frac{\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|.\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}=\frac{x_0^2+y_0^2-16}{\left(5+\frac{4}{5}x_0\right)\left(5-\frac{4}{5}x_0\right)} \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-16=\frac{1}{2}\left(25-\frac{16}{25}x_0^2\right)$$

Suy ra $\frac{x_0^2}{25}=\frac{57}{66}-\frac{y_0^2}{33}$ thế vào (*) ta được $\frac{57}{66}-\frac{y_0^2}{33}+\frac{{y_0}^2}{9}=1 \Rightarrow y_0=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$ và $x_0=\pm\frac{5\sqrt{13}}{4}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là:

$$M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_2\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{và } M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

4) Ta có $\overrightarrow{OA}(1;1)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm O, A nhận $\vec{n}(-1;1)$ làm vecto pháp tuyến có phương trình là $-x+y=0$

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}OA.d(M;OA)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|-x_0+y_0|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}|-x_0+y_0|$$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacôpxki ta có

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}\left|-5.\frac{x_0}{5}+3.\frac{y_0}{3}\right| \le \frac{1}{2}.34.\left(\frac{{x_0}^2}{25}+\frac{{y_0}^2}{9}\right)=\frac{34}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $-\frac{x_0}{25}=\frac{y_0}{9}$ kết hợp với (*) ta được:

$$\begin{cases} x_0=\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_0=-\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=-\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_0=\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm $M_1\left(\frac{25}{\sqrt{34}};-\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{25}{\sqrt{34}};\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 1.3.9. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

1) Điểm M có hoành độ là 5
2) Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.
3) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3
4) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng 6 .

Hướng dẫn giải.

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(H)$ suy ra $\frac{x_0^2}{9}-\frac{y_0^2}{16}=1$ (1)

1) Ta có $x_0=5$ suy ra $\frac{25}{9}-1=\frac{y_0^2}{16} \Rightarrow y_0=\pm\frac{16}{3}$

Vậy $M_1\left(5;\frac{16}{3}\right);M_2\left(5;-\frac{16}{3}\right)$.

2) Từ phương trình (H) có $a^2=9, b^2=16$ nên $a=3, b=4, c=\sqrt{a^2+b^2}=5$

Suy ra $F_1(-5;0);F_2(5;0)$

Ta có: $\overrightarrow{F_1M}=(x_0+5;y_0)$; $\overrightarrow{F_2M}=(x_0-5;y_0)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0 \Leftrightarrow (x_0+5)(x_0-5)+y_0^2=0 \Leftrightarrow y_0^2=15-x_0^2$ thế vào (*) ta được

$$\frac{{x_0}^2}{9}-\frac{15-{x_0}^2}{16}=1 \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{3\sqrt{26}}{5} \text{ suy ra } y_0=\pm\frac{\sqrt{141}}{5}$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là : $M\left(\pm\frac{3\sqrt{26}}{5};\frac{\sqrt{141}}{5}\right)$ và $M\left(\pm\frac{3\sqrt{26}}{5};\frac{\sqrt{141}}{5}\right)$.

3) Ta có $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x_0\right|$ nên $3=\left|3+\frac{5}{3}x_0\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\text{ (loại)}\\ x_0=\frac{-18}{5}\Rightarrow y_0=\pm\frac{4\sqrt{11}}{5}\end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm: $M\left(-\frac{18}{5};\pm\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$

4) Phương trình hai tiệm cận là : $d_1: y=\frac{4}{3}x;\ d_2: y=-\frac{4}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng 6 suy ra

$$\frac{\left|\frac{4}{3}x_0-y_0\right|}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}+\frac{\left|\frac{4}{3}x_0+y_0\right|}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}=6\Leftrightarrow|4x_0-3y_0|+|4x_0+3y_0|=30\quad(2)$$

Mặt khác $(1)\Leftrightarrow(4x_0-3y_0)(4x_0+3y_0)=144>0$ suy ra

$(2)\Leftrightarrow|4x_0-3y_0+4x_0+3y_0|=30\Leftrightarrow x_M=\pm\frac{15}{4}\Rightarrow y_M=\pm3$

Vậy có bốn điểm $M\left(\pm\frac{15}{4};3\right)$, $M\left(\pm\frac{15}{4};-3\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Bài 1.3.10. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y^2=8x$ có tiêu điểm F

1) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3

2) Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF}=8$

3) Tìm một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất.

Hướng dẫn giải.

1) Giả sử $M(x_M;y_M)\in(P)$ suy ra $y_M^2=8x_M$ (*)

Từ phương trình (P) có $p=4$ nên $F(2;0)$

Ta có $FM=\frac{p}{2}+x_M$ suy ra $x_M=1$ kết hợp (*) ta có $y_M=\pm2\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(1;2\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(1;-2\sqrt{2}\right)$

2) Ta có $M\in(P)\Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8};a\right)$ với $a\geq0$

$S_{\Delta OMF}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}OF.d(M;OF)=8\Leftrightarrow a=8$

Vậy điểm M cần tìm là $M(8;8)$

3) Với mọi điểm $A\in(P)$, $B\in\Delta$ ta luôn có $AB\geq d(A;\Delta)$

$A\in(P)\Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8};a\right)$ với $a\geq0$,

Khi đó $d(A;\Delta)=\frac{\left|4.\frac{a^2}{8}-3.a+5\right|}{5}=\frac{(a-3)^2+1}{10}\geq\frac{1}{10}$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8};3\right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3;4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x-\frac{9}{8}\right)+4(y-3)=0$ hay $24x+32y-123=0$

Do đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-3y+5=0\\24x+32y-123=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{209}{200}\\y=\frac{153}{50}\end{cases}$

Vậy $A\left(\frac{9}{8};3\right)$, $B\left(\frac{209}{200};\frac{153}{50}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1.3.11. Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;1)$ và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng Δ đi qua M, với vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$ có dạng:

$\begin{cases}x=1+at\\y=1+bt\end{cases}\left(a^2+b^2>0\right)$.

$A,B\in\Delta\Rightarrow\begin{cases}x_A=1+at_1\\y_A=1+bt_1\end{cases}$ và $\begin{cases}x_B=1+at_2\\y_B=1+bt_2\end{cases}$

M là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(t_1+t_2)=0\\b(t_1+t_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow t_1+t_2=0\ \left(\text{do } a^2+b^2>0\right)$

$A,B\in(E)\Rightarrow t_1,t_2$ là nghiệm của phương trình

$4(at+1)^2+9(bt+1)^2=36\Leftrightarrow(4a^2+9b^2)t^2+(8a+18b)t-23=0$

$t_1+t_2=0\Leftrightarrow 4a+9b=0$

Chọn $a=9,b=-4\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1+9t\\y=1-4t\end{cases}$ hay $4x+9y-13=0$.

Bài 1.3.12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A,B thuộc (E). Biết rằng A,B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải.

Gọi $A(x_0;y_0)$, do A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B(x_0;-y_0)$.

$AB^2=4{y_0}^2;AC^2=(2-x_0)^2+{y_0}^2$

Vì $A\in(E)\Rightarrow\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{1}=1\Leftrightarrow{y_0}^2=\dfrac{4-{x_0}^2}{4}(1)$

ABC là tam giác đều nên $AB=AC\Leftrightarrow 4{y_0}^2=(x_0-2)^2+{y_0}^2(2)$

Từ (1) và (2) ta có : $7{x_0}^2-16x_0+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=\dfrac{2}{7}\end{array}\right.$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=0\Rightarrow A\equiv C$ loại

Với $x_0=\dfrac{2}{7}$ thay vào (1) ta được ${y_0}^2=\dfrac{48}{49}\Leftrightarrow x_0=\mp\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right);B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right);B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 1.3.13. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (E) biết (d) cắt hai trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho $OA=2OB$.

Hướng dẫn giải.

Do tính đối xứng của (E) nên ta chỉ cần xét trường hợp tiếp điểm nằm ở góc phần tư thứ nhất. Gọi $A(2m;0),B(0;m)$ $m>0$.

Phương trình $AB:\dfrac{x}{2m}+\dfrac{y}{m}=1\Leftrightarrow x+2y-2m=0$.

AB tiếp xúc với $(E)\Leftrightarrow a^2A^2+b^2B^2=C^2\Leftrightarrow 64+36=4m^2\Leftrightarrow m=5$ $(m>0)$

Vì tính đối xứng nên có 4 tiếp tuyến thỏa mãn là :

$x+2y-10=0,x+2y+10=0,x-2y-10=0,x-2y+10=0$.

Bài 1.3.14. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $\Delta:x-\sqrt{2}y+2=0$. Giả sử Δ cắt (E) tại B,C. Tìm điểm $A\in\Delta$ để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

Giả sử $A(x_0;y_0)\in(E)$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ A đến (Δ) là $AH=\dfrac{|x_0-\sqrt{2}y_0+2|}{\sqrt{3}}$.

Vì BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất.

$$|x_0-\sqrt{2}y_0+2|\le|x_0-\sqrt{2}y_0|+2=\left|\frac{x_0}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{2}+\left(-\frac{y_0}{2}\right).2\sqrt{2}\right|+2$$

$$\le\sqrt{16\left(\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}\right)}+2=6\Rightarrow AH\le 2\sqrt{3}.$$

Và $AH=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_0}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{y_0}{2}\\x_0-\sqrt{2}y_0\ge0\\\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2\\y_0=-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow A(2;-\sqrt{2})$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $A(2;-\sqrt{2})$.

Bài 1.3.15. Cho Elip $(E):\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$ có hai tiêu điểm là F_1 và F_2. Tìm tọa độ các điểm $M\in(E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $a^2=100,c^2=a^2-b^2=100-25=75$

$M(x;y)\in(E),MF_1=a+\dfrac{c}{a}x;MF_2=a-\dfrac{c}{a}x$

Ta có: $\cos\widehat{F_1MF_2}=\dfrac{{MF_1}^2+{MF_2}^2-{F_1F_2}^2}{2MF_1.MF_2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2+\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2-(2c)^2}{2\left(a+\frac{c}{a}x\right)\left(a-\frac{c}{a}x\right)}\Leftrightarrow -a^2+\left(\frac{cx}{a}\right)^2=2a^2+2\left(\frac{cx}{a}\right)^2-4c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{cx}{a}\right)^2=3a^2-4c^2=3.100-4.75=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=5;y=-5.$$

Vậy có hai điểm $M_1(0;5);M_2(0;-5)$ thỏa mãn.

Bài 1.3.16. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình : $y=x^2-2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Chứng minh rằng (P) giao (E) tại 4 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

Hướng dẫn giải.

Hoành độ giao điểm của (E) và (P) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2}{9}+(x^2-2x)^2=1\Leftrightarrow 9x^4-36x^3+37x^2-9=0\quad (*)$$

Xét hàm số: $f(x)=9x^4-36x^3+37x^2-9$

Ta có: $f(x)$ liên tục trên R có $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$ suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt, do đó (E) cắt (P) tại 4 điểm phân biệt.

Toạ độ các giao điểm của (E) và (P) thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y=x^2-2x \\ \frac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-16x=8y \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}\Rightarrow 9x^2+9y^2-16x-8y-9=0\ (**).$$

(**) là phương trình của đường tròn có tâm $I=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{161}}{9}$

Do đó 4 giao điểm của (E) và (P) cùng nằm trên đường tròn có phương trình(**).

Bài 1.3.17. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho Elip (E): $x^2+5y^2=5$, Parabol $(P): x=10y^2$. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): x+3y-6=0$, đồng thời tiếp xúc với trục hoành Ox và cát tuyến chung của Elip (E) với Parabol (P).

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng đi qua các giao điểm của (E) và (P): $x=2$

Tâm $I\in\Delta$ nên: $I=(6-3b;b)$. Ta có: $|6-3b-2|=|b|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-3b=b \\ 4-3b=-b \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right.$

Vậy (C): $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ hoặc (C): $x^2+(y-2)^2=4$

Bài 1.3.18. Trong mặt phẳng Oxy cho họ đường thẳng

$$d_m:(4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0.$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì họ đường thẳng d_m luôn tiếp xúc với một đường cônic cố định.

Hướng dẫn giải.

Xét $M(x;y)$ là điểm không thuộc bất kì đường thẳng nào của họ d_m.

Khi đó phương trình:

$(4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0\Leftrightarrow(3-x)m^2-6ym+4x+12=0$ vô nghiệm với mọi m

Hay $\Delta'=9y^2+4x^2-36<0\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1$.

Xét Elips (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ (4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất với mọi m nên d_m luôn tiếp xúc với (E).

Bài 1.3.19.

1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(1; 4) và tiếp xúc với hypebol (H) : $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. Tìm tọa độ tiếp điểm.
2. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường elip:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$$

Hướng dẫn giải.

1. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của (d). Khi đó đường thẳng d có phương trình dạng: (d): $x_0x-\frac{y_0y}{4}=1$

Vì (d) đi qua A(1; 4) nên: $x_0 - y_0 = 1$. (1)

Mặt khác M thuộc (H) nên: $\frac{x_0{}^2}{1} - \frac{y_0^2}{4} = 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -\frac{5}{3} \\ y_0 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow M(1;0)$ hoặc $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

Tiếp tuyến của (H) là: $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

hoặc $-\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y = 1 \Leftrightarrow 5x - 2y + 3 = 0$.

2. Gọi tiếp tuyến chung của hai elip là (d): $Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$).

Theo điều kiện tiếp xúc có: $\begin{cases} 5A^2 + 4B^2 = C^2 \\ 4A^2 + 5B^2 = C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B^2 \\ C^2 = 9B^2 \end{cases}$

Chọn A= 1 $\Rightarrow \begin{cases} B = \pm 1 \\ C = \pm 3 \end{cases}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến chung của hai elip là:

(d): $x \pm y \pm 3 = 0$ (đây là 4 tiếp tuyến chung).

Bài 1.3.20. Trong mặt phẳng Oxy cho Hypebol (H): $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ và điểm I(1;2). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I cắt (H) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm AB.

Hướng dẫn giải.

Gọi $\vec{u} = (a;b)$ là một VTCP của Δ. Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Thay x, y vào phương trình của (H) ta có:

$$\frac{(1+at)^2}{3} - \frac{(2+bt)^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2}\right)t^2 + 2\left(\frac{a}{3} - b\right)t - \frac{8}{3} = 0 \quad (1).$$

Vì I là trung điểm AB nên (1) có hai nghiệm đối nhau

Hay $\begin{cases} \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} > 0 \\ \frac{a}{3} - b = 0 \end{cases}$, ta chọn $a = 1, b = 3$.

Vậy phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Bài 1.3.21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải.

Phương trình chính tắc của (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Do (E) có độ dài trục lớn là 8 nên ta có $2a = 8$, tức $a = 4$. Và như thế, phương trình của (E) có thể được viết lại thành: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tiếp theo, từ giả thiết (C): $x^2 + y^2 = 8$ cắt (E) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông, ta thấy rằng bốn đỉnh đó phải nằm trên các đường thẳng $y = x$ và $y = -x$. Suy ra (C), (E) và đường thẳng $d: y = x$ có với nhau hai điểm chung.

Mặt khác, ta có tọa độ giao điểm của (C) với d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x = 2 \\ y = x = -2 \end{array}\right.$$

Suy ra $(C) \cap d = \{A; B\}$ với A(2, 2) và B(−2, − 2). Và từ các lý luận ở trên, ta có $A \in (E)$. Thay tọa độ của điểm A vào phương trình của (E), ta được $b^2 = \frac{16}{3}$. Vậy phương trình chính tắc của (E) cần tìm là: $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

Bài 1.3.22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có AC = 2BD và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi. Biết A thuộc Ox.

Hướng dẫn giải.

Vì đỉnh $A \in Ox$ và $A \in (E)$ nên các đỉnh $B, D \in Oy, C \in Ox$.

Gọi tọa độ $A(2a;0)$ vì $AC = 2BD$ nên tọa độ các điểm còn lại là:

$C(-2a;0), B(0;a), C(0;-a)$.

PT của $AB: \frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - 2a = 0$.

Vì AB tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ nên $d(I, AB) = R$ với $I(0;0)$ và $R = 2$ lần lượt là tâm và bán kính của (C)

$$d(I, AB) = R \Leftrightarrow \frac{|-2a|}{\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{5}.$$

Với $a=\sqrt{5}$ thì $A\left(2\sqrt{5};0\right), C\left(-2\sqrt{5};0\right), B\left(0;\sqrt{5}\right), C\left(0;-\sqrt{5}\right)$ là 4 đỉnh của (E) nên phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

Với $a=-\sqrt{5}$ ta được kết quả tương tự.

Bài 1.3.23. Cho $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm A,B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

Gọi $A(a;b), B(m;n)$ với $a=2\sqrt{1-y^2}$, $m=2\sqrt{1-n^2}$.

Tam giác OAB cân tại O nên

$OA=OB\Leftrightarrow a^2+b^2=m^2+n^2\Leftrightarrow 4(1-y^2)+y^2=4(1-n^2)+n^2$

$\Leftrightarrow n=-y\Rightarrow a=m$ suy ra đường thẳng AB có phương trình $x=a$

$AB=\sqrt{4-a^2}, d(O,AB)=a$ nên $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}\le\frac{1}{2}\frac{a^2+4-a^2}{4}=\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2=4-a^2\Rightarrow a=\sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right), B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và hoán vị là các bộ cần tìm.

Bài 1.3.24. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ và đường thẳng Δ :3x + 4y =12. Từ điểm M bất kì trên Δ kẻ tới (E) các tiếp tuyến MA, MB. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

Tiếp tuyến tại A có dạng $\frac{xx_1}{4}+\frac{yy_1}{3}=1$.

Tiếp tuyến đi qua M nên $\frac{x_0x_1}{4}+\frac{y_0y_1}{3}=1$. (1)

Ta thấy tọa độ của A và B đều thỏa mãn (1) nên đòng thẳng AB có phương trình $\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{3}=1$ do M thuộc Δ nên $3x_0+4y_0=12\Rightarrow 4y_0=12-3x_0$

$\Rightarrow\frac{4xx_0}{4}+\frac{4yy_0}{3}=4\Rightarrow\frac{4xx_0}{4}+\frac{y(12-3x_0)}{3}=4$.

Gọi F(x; y) là điểm cố định mà AB đi qua với mọi M thì

$(x-y)x_0+4y-4=0\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\4y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$.

Vậy AB luôn đi qua điểm cố định F(1; 1).

§ 4. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Tóm tắt lý thuyết.

Bài toán cơ bản của phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là bài toán xác định tọa độ của một điểm. Chẳng hạn, để lập phương trình đường thẳng cần tìm một **điểm** đi qua và VTPT, với phương trình đường tròn thì ta cần xác định **tâm** và bán kính…. Chúng ta có thể gặp bài toán tìm tọa độ của điểm được hỏi trực tiếp hoặc gián tiếp.

- Về phương diện hình học tổng hợp thì để xác định tọa độ một điểm, ta thường chứng minh điểm đó thuộc hai hình (H) và (H′). Khi đó điểm cần tìm chính là giao điểm của (H) và (H′).
- Về phương diện đại số, để xác định tọa độ của một điểm (gồm hai tọa độ) là bài toán đi tìm hai ẩn. Do đó, chúng ta cần xác định được hai phương trình chứa hai ẩn và giải hệ phương trình này ta tìm được tọa độ điểm cần tìm. Khi thiết lập phương trình chúng ta cần lưu ý:

+) Tích vô hướng của hai véc tơ cho ta một phương trình,

+) Hai đoạn thẳng bằng nhau cho ta một phương trình,

+) Hai véc tơ bằng nhau cho ta hai phương trình,

+) Nếu điểm $M\in\Delta: ax+by+c=0, a\ne0$ thì $M\left(\frac{-bm-c}{a};m\right)$, lúc này tọa độ của M chỉ còn một ẩn và ta chỉ cần tìm một phương trình.

2. Các dạng toán thường gặp.

Dạng 1. Xác định tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác.

Cho tam giác ABC. Khi đó:

- Trọng tâm $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.
- Trực tâm $H:\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp $I:\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}$.
- Tâm đường tròn nội tiếp $K:\begin{cases}\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}}{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}}{AC}\\\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BK}}{BC}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BK}}{AB}\end{cases}$.

Chú ý: Có thể tìm K theo cách sau:

* Gọi D là chân đường phân giác trong góc A, ta có: $\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$, từ đây suy ra D

* Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{AB}{BD}\overrightarrow{KD}$ từ đây ta có K.

- Tâm đường tròn bàng tiếp (góc A) J : $\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AJ}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BJ}}{AB}\end{cases}$.

Ví dụ 1.4.1. Cho tam giác ABC có $A(1;3),B(-2;0),C\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$.

1) Tìm tọa độ trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I và trọng tâm G của tam giác ABC. Từ đó suy ra I, G, H thẳng hàng;
2) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

Lời giải.

1) Ta có $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=-\dfrac{1}{8}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{9}{8}\end{cases}\Rightarrow G\left(-\frac{1}{8};\frac{9}{8}\right)$.

Gọi H(x; y), suy ra

$\overrightarrow{AH}=(x-1;y-3),\overrightarrow{BH}=(x+2;y),\overrightarrow{BC}=\left(\frac{21}{8};\frac{3}{8}\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{3}{8};-\frac{21}{8}\right)$

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

Nên ta có $\begin{cases}7(x-1)+(y-3)=0\\ (x+2)+7y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+y-10=0\\ x+7y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Suy ra $H\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Gọi I(x; y), ta có: $\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IB^2=IC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+y^2\\ (x+2)^2+y^2=\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{8}\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ \dfrac{21}{4}x+\dfrac{3}{4}y=-\dfrac{111}{32}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{15}{16}\\ y=\dfrac{31}{16}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{15}{16};\frac{31}{16}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{13}{8};-\frac{13}{8}\right)$, $\overrightarrow{GI}=\left(-\frac{13}{16};\frac{13}{16}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

Suy ra I, G, H thẳng hàng.

2) Gọi K(x; y) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$\begin{cases}\widehat{KAB}=\widehat{KAC}\\ \widehat{KBC}=\widehat{KBA}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\\ \left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\\ \cos\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}}{AK.AB}=\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}{AK.AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA}}{BK.AB}=\dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}}{BK.BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}}{BC}\end{cases}\quad(*)$$

Mà $\overrightarrow{AK}=(x-1;y-3),\overrightarrow{BK}=(x+2;y),\overrightarrow{AB}=(-3;-3)$ nên (*) tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{-3(x-1)-3(y-3)}{3\sqrt{2}}=\dfrac{-\dfrac{3}{8}(x-1)-\dfrac{21}{8}(y-3)}{\dfrac{15\sqrt{2}}{8}}\\ \dfrac{3(x+2)+3y}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\dfrac{21}{8}(x+2)+\dfrac{3}{8}y}{\dfrac{15\sqrt{2}}{8}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=-1\\ x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy K(0;1).

Gọi J(a; b) là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Ta có:

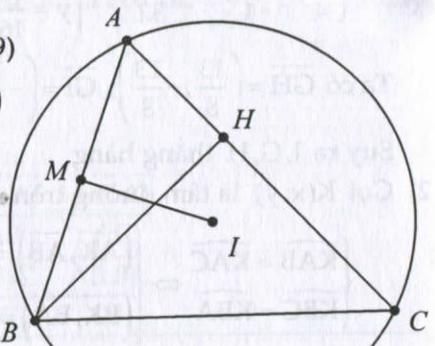
$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC}\right)\\ \left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{AB}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AB}}{AB}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=-1\\ 2a+b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{4}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy $J\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 1.4.2. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB, điểm H(−2;4), I(−1;1) lần lượt là chân đường cao vẽ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ đỉnh C.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$. Vì $IM\perp AB$ nên phương trình $AB: 7x-y+33=0$.



Suy ra $A(a;7a+33)\Rightarrow \overrightarrow{HA}=(a+2;7a+29)$

$B(-a-9;-7a-30)\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(a+7;7a+34)$

Do $BH\perp AH\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HA}=0$

$\Leftrightarrow (a+2)(a+7)+(7a+29)(7a+34)=0$

$\Leftrightarrow a^2+9a+20=0\Leftrightarrow a=-4, a=-5.$

- $a=-4\Rightarrow A(-4;5), B(-5;-2)\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(3;6)$

Phương trình AC:

$x+2y-6=0\Rightarrow C(6-2c;c)$

Ta có: $IC^2=IA^2\Rightarrow (7-2c)^2+(c-1)^2=25\Leftrightarrow c^2-6c+5=0\Leftrightarrow c=1, c=5$

Suy ra $C(4;1)$.

- $a=-5\Rightarrow A(-5;-2), B(-4;5)\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(2;-1)$

Phương trình $AC: 2x-y+8=0\Rightarrow C(c;2c+8)$

Ta có: $IC^2=IB^2\Rightarrow (c+1)^2+(2c+7)^2=25\Leftrightarrow c^2+6c+5=0\Leftrightarrow c=-1, c=-5$

Suy ra $C(-1;6)$.

Vậy $C(4;1)$ hoặc $C(-1;6)$.

Ví dụ 1.4.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

Lời giải.

(C) có tâm I(1; 1), R = 2.

Do $d(I,\Delta)=R\Rightarrow \Delta$ tiếp xúc (C) tại T

Do I là trực tâm tam giác PMN nên MI vuông góc $\Delta\Rightarrow x_M=x_I=1$

Mà M thuộc (C) nên M(1; −1)

Gọi J là trung điểm MN suy ra IJ là đường trung bình của tam giác MTN $\Rightarrow y_I=y_J=1$

Mà J thuộc (C) nên J(3; 1) hay J(−1; 1)

Nếu J(3; 1) thì N(5; 3)

Gọi P(t; 3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}\Rightarrow t=-1\Rightarrow P(-1;3)$

Nếu J(−1; 1) thì N(−3; 3)

Gọi P(t; 3) thuộc Δ. Ta có $\overrightarrow{NI}\perp\overrightarrow{MP}\Rightarrow t=3\Rightarrow P(3;3)$.

Ví dụ 1.4.4. Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết M(1;4), N(−1;3) là trung điểm của BC, CA và $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $C(x;y)\Rightarrow B(2-x;8-y), A(-2-x;6-y)$

Vì $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{7}{3}+x;-\frac{23}{3}+y\right)$, $\overrightarrow{BC}=(2x-2;2y-8)$,

$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{3}-x;-\frac{5}{3}-y\right)$, $\overrightarrow{MN}=(-2;-1)$

Nên (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(-\frac{23}{3}+y\right)(2y-8)=0 & (1)\\ 2\left(x-\frac{1}{3}\right)+y+\frac{5}{3}=0 & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow 2x+y+1=0\Rightarrow y=-1-2x$ (3) thay vào (1) ta được :

$\left(\frac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(\frac{26}{3}+2x\right)(10+4x)=0$

$\Leftrightarrow 15x^2+86x+123=0\Leftrightarrow x=-3; x=-\frac{41}{15}$

- Với $x=-3\Rightarrow y=5\Rightarrow A(1;1), B(5;3), C(-3;5)$
- Với $x=-\frac{41}{15}\Rightarrow y=\frac{67}{15}\Rightarrow A\left(\frac{11}{15};\frac{23}{15}\right), B\left(\frac{71}{15};\frac{53}{15}\right), C\left(-\frac{41}{15};\frac{76}{15}\right)$.

Dạng toán 2: Tìm tọa độ một điểm thuộc một hình cho trước và thỏa một tính chất cho trước.

Ví dụ 1.4.5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-2y-3=0$ và hai điểm A(3;2), B(−1;4).

1) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho MA + MB nhỏ nhất,
2) Viết phương trình đường thẳng d' sao cho đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

Lời giải.

1) Ta thấy A và B nằm về một phía so với đường thẳng d. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Khi đó với mọi điểm M thuộc d, ta luôn có: $MA = MA'$

Do đó: $MA + MB = A'M + MB \ge A'B$.

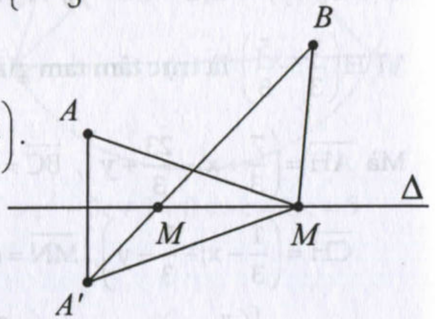
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M = A'B \cap d$.

Vì $A'A \perp d$ nên AA' có phương trình: $2x + y - 8 = 0$.

Gọi $H = d \cap AA' \Rightarrow H: \begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{19}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$.

Vì H là trung điểm của AA'

nên $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = \dfrac{23}{5} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{23}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$.



Suy ra $\overrightarrow{A'B} = \left(-\dfrac{28}{5}; \dfrac{26}{5}\right)$, do đó phương trình $A'B: 13x + 14y - 43 = 0$

Nên $M: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 13x + 14y - 43 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{5} \\ y = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{16}{5}; \dfrac{1}{10}\right)$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, suy ra $d \cap \Delta = I(1; -1)$.

Vì Δ là phân giác của góc hợp bởi giữa hai đường thẳng d và d' nên d và d' đối xứng nhau qua Δ, do đó $I \in d'$.

Lấy $E(3;0) \in d$, ta tìm được $F\left(\dfrac{3}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$ là điểm đối xứng với E qua Δ, ta có $F \in d'$.

Suy ra $\overrightarrow{FI} = \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{11}{5}\right)$, do đó phương trình $d': 11x - 2y - 13 = 0$.

Ví dụ 1.4.6. Trong mặt phẳng cho đường tròn $(C): x^2 + (y-4)^2 = 18$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 5 = 0$, $\Delta_2: 2x + y - 1 = 0$.

Tìm toạ độ điểm $M \in (C)$ sao cho $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$.

Lời giải.

Ta có $M(a;b) \in (C) \Rightarrow a^2 + (b-4)^2 = 18$. (1)

Mặt khác: $d(M, \Delta_1) = \dfrac{3}{4} d(M, \Delta_2)$ nên ta có:

$$|a + 2b - 5| = |2a + b - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2b - 5 = 2a + b - 1 \\ a + 2b - 5 = -2a - b + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = -4 \\ a + b = 2 \end{array}\right..$$

- $a - b = -4 \Rightarrow a = b - 4$ thay vào (1) ta được:

  $(b-4)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow M(-3;1) \\ b = 7 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow M(3;7) \end{array}\right.$.

- $a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b$ thay vào (1) ta được:

  $(2-b)^2 + (b-4)^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow a = -1 \mp 2\sqrt{2}$

  Suy ra $M\left(-1 \mp 2\sqrt{2}; 3 \pm 2\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 1.4.7. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;3)$ và hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 8$, $(C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Tìm toạ độ điểm $M \in (C_1)$, $N \in (C_2)$ sao cho tam giác MAN vuông cân tại A.

Lời giải.

Gọi $M(x;y) \in (C_1)$, $N(a;b) \in (C_2)$, ta có: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-5)^2 = 8 \\ (a+1)^2 + (b-1)^2 = 10 \end{cases}$ (*)

$\overrightarrow{AM} = (x-2; y-3)$, $\overrightarrow{AN} = (a-2; b-3)$

Tam giác MAN vuông cân tại A nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ AN^2 = AM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(a-2) + (y-3)(b-3) = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\dfrac{(b-3)}{a-2}(y-3) \\ (y-3)^2\left[\left(\dfrac{b-3}{a-2}\right)^2 + 1\right] = (a-2)^2 + (b-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\dfrac{(b-3)}{a-2}(y-3) \\ (y-3)^2 = (a-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = a - 2 \\ x - 2 = -(b-3) \end{cases} \vee \begin{cases} y - 3 = -(a-2) \\ x - 2 = (b-3) \end{cases}$$

- $\begin{cases} y - 3 = a - 2 \\ x - 2 = -(b-3) \end{cases}$ thay vào (*) ta được:

  $\begin{cases} (4-b)^2 + (a-4)^2 = 8 \\ (a+1)^2 + (b-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-1)^2 = 10 \\ 5a - 3b = -14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=\dfrac{5a+14}{3} \\ (a+1)^2+\left(\dfrac{5a+11}{3}\right)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a+14}{3} \\ 17a^2+64a+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{-32-6\sqrt{19}}{17} \\ b=\dfrac{26-10\sqrt{19}}{17} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{-32+6\sqrt{19}}{17} \\ b=\dfrac{26+10\sqrt{19}}{17} \end{cases}.$$

- $\begin{cases} y-3=-(a-2) \\ x-2=b-3 \end{cases}$ thay vào (*) ta được:

$$\begin{cases} (b-2)^2+a^2=8 \\ (a+1)^2+(b-1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2+(b-1)^2=10 \\ a+b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=2-a \\ (a+1)^2+(1-a)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a+14}{3} \\ a^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} a=-2 \\ b=\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 1.4.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2+y^2=1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO}=30^0$

Lời giải.

Gọi điểm $M(a;b)$. Do $M\in(C)$ nên $(a-1)^2+b^2=1$.

Mặt khác $O\in(C)\Rightarrow IO=IM=1$.

Tam giác IMO có $\widehat{OIM}=120^0$

nên $OM^2=IO^2+IM^2-2IO.IM.\cos 120^0 \Leftrightarrow a^2+b^2=3$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} (a-1)^2+b^2=1 \\ a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $M=\left(\dfrac{3}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 1.4.9. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho ΔABC với $A(2,3), B(2,1), C(6,3)$. Gọi D là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC. Tìm tất cả các điểm M thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=25$ sao cho: $S_{MDC}=2S_{ADB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;2),\overrightarrow{AC}=(4;0),\overrightarrow{BC}=(4;2)$

Vì $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow D(\dfrac{10}{3};\dfrac{5}{3})\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\left(-\dfrac{8}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Phương trình AB: $x-2=0$, nên $d(D,AB)=\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB.d(D,AB)=\dfrac{1}{2}.2.\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$

Phương trình $DC:x-2y=0$.

Gọi $M(a;b)\Rightarrow(a-3)^2+(b-1)^2=25$ (1)

Mặt khác:

$S_{\Delta MCD}=2S_{\Delta ABD}\Rightarrow\dfrac{1}{2}CD.d(M,CD)=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\sqrt{5}.\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow|a-2b|=4$

$\Leftrightarrow a=2b+4$ hoặc $a=2b-4$

- $a=2b-4$ thay vào (1) ta có được: $(2b-7)^2+(b-1)^2=25\Leftrightarrow b^2-6b+5=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=1\Rightarrow a=-2\Rightarrow M(-2;1) \\ b=5\Rightarrow a=6\Rightarrow M(6;5) \end{array}\right..$$

- $a=2b+4$ thay vào (1) ta có được: $(2b+1)^2+(b-1)^2=25\Leftrightarrow 5b^2+2b-23=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5}\Rightarrow a=\dfrac{18+4\sqrt{29}}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18+4\sqrt{29}}{5}\right) \\ b=\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5}\Rightarrow a=\dfrac{18-4\sqrt{29}}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18-4\sqrt{29}}{5}\right) \end{array}\right..$$

Ví dụ 1.4.10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;2)$, các đường thẳng $d_1:x+y-3=0$ và: $d_2:x+y-9=0$. Tìm tọa độ điểm $B\in d_1$, và $C\in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải.

Vì $B\in d_1:x+y-3=0$ nên $B(b;3-b)$, $C\in d_2:x+y-9=0$ nên $C(c;9-c)$.

Để tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\begin{cases} AB=AC \\ AB\perp AC \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} AB^2=AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} (b-3)^2+(b-1)^2=(c-3)^2+(c-7)^2 \\ (b-3)(c-3)+(1-b)(7-c)=0 \end{cases}$

Đặt $u=b-3, v=c-2$, ta có:

$$\begin{cases} u^2+(u+2)^2=(v-1)^2+(v-5)^2 \\ u(v-1)+(u+2)(v-5)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+1)^2=(v-3)^2+3 \\ uv-3u+v-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2=\dfrac{4}{(u+1)^2}+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=4 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-3 \\ v=2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$B(4;-1), C(6;3)$ hoặc $B(0;3), C(4;5)$.

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể giải theo cách khác như sau:

Tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy về hệ tục XAY theo véc tơ $\overrightarrow{OA}$, ta có công thức dời trục: $\begin{cases} x=X+3 \\ y=Y+2 \end{cases}$.

Trong hệ trục mới, ta có phương trình của

$d_1: X+Y+2=0,\ d_2: X+Y-4=0$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên phép quay $Q_{(A,\pm 90^0)}: B \to C$

Mà $B \in d_1 \Rightarrow C \in d_1' = Q_{(A;\pm 90^0)}(d_1)$, do đó $C \equiv d_2 \cap d_1'$.

- Xét phép quay $Q_{(A;90^0)}$, ta có phương trình $d_1': X-Y-2=0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X-Y-2=0 \\ X+Y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=3 \\ Y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

- Xét phép quay $Q_{(A;-90^0)}$, ta có phương trình $d_1': X-Y+2=0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X-Y+2=0 \\ X+Y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ Y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được B, C.

Ví dụ 1.4.11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang cân ABCD ($AB // CD$, $AB < CD$) có I là giao điểm của AC và BD. Biết A(0; 2), D(−2; −2), I nằm trên đường thẳng $x+y-4=0$ và $\widehat{AID}=45^0$. Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang.

Lời giải.

Vì I thuộc đường thẳng $x+y-4=0$ nên $I(x_0;4-x_0)$

Ta có $AD=2\sqrt{5}$, $IA=\sqrt{2x_0^2-4x_0+4}$, $ID=\sqrt{2x_0^2-8x_0+40}$

Do đó $\dfrac{IA^2+ID^2-AD^2}{2IA.ID}=\cos\widehat{AID} \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2-3x_0+6}{\sqrt{x_0^2-4x_0+20}.\sqrt{x_0^2-2x_0+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-3x_0+6>0 \\ x_0^4-6x_0^3+12x_0^2-24x_0+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-3x_0+6>0 \\ (x_0-2)(x_0-4)(x_0^2+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=4 \end{array}\right.$$

- Với $x_0=2 \Rightarrow I(2;2)$ khi đó $IA=2$, $ID=4\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{ID}=-\dfrac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB}=-2\sqrt{2}\overrightarrow{IB}$

Từ đây suy ra $B\left(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$, $C\left(2+4\sqrt{2},2+4\sqrt{2}\right)$

- Với $x_0=4$: Tương tự ta tìm được $B\left(4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $C\left(4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$

Vậy $B\left(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$, $C\left(2+4\sqrt{2},2+4\sqrt{2}\right)$

hoặc $B\left(4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $C\left(4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$

Ví dụ 1.4.12. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường trung tuyến AM và đường cao AD là $4x-3y=0$ và $2x-y-2=0$, đường thẳng AC đi qua N(1;−6) và diện tích tam giác ABC bằng 11. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $A=AM \cap AD$ nên toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(3;4)$.

Suy ra $AN=(2;10)$. Phương trình $AC: 5x-y-11=0$.

Do $BC \perp AD \Rightarrow BC: x+2y+m=0$

$$C=BC \cap AC \Rightarrow C: \begin{cases} 5x-y-11=0 \\ x+2y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22-m}{11} \\ y=-\dfrac{5m+11}{11} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{22-m}{11};-\dfrac{5m+11}{11}\right)$$

$$M=AM \cap BC \Rightarrow M: \begin{cases} 4x-3y=0 \\ x+2y+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3m}{11} \\ y=-\dfrac{4m}{11} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3m}{11};-\dfrac{4m}{11}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{MC}=\left(\frac{22+2m}{11};-\frac{m+11}{11}\right)$, $d(A,BC)=\frac{|m+11|}{\sqrt{5}}$

Nên $S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}d(A,BC).MC=\frac{1}{2}\frac{|m+11|}{11}.\sqrt{5}.\frac{|m+11|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{22}(m+11)^2$

Mà $S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{11}{2}\Rightarrow(m+11)^2=11^2\Leftrightarrow m=0, m=-22$

- Với $m=0\Rightarrow C(2;-1), M(0;0)\Rightarrow B(-2;1)$
- Với $m=-22\Rightarrow C(4;4), M(6;8)\Rightarrow B(8;12)$.

Vậy $A(3;4), B(-2;1), C(2;-1)$ hoặc $A(3;4), B(8;12), C(4;4)$.

Chú ý: Khi gặp các đường đặc biệt trong tam giác ta thường khai thác theo các tính chất sau

- Đường trung tuyến của tam giác: Khi gặp đường trung tuyến của tam giác, ta chủ yếu khai thác tính chất đi qua đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện.
- Đường cao của tam giác: Ta khai thác tính chất đi qua đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện.
- Đường trung trực của tam giác: Ta khai thác tính chất đi qua trung điểm và vuông góc với cạnh đó.
- Đường phân giác trong: Ta khai thác tính chất: Nếu M thuộc AB, M' đối xứng với M qua phân giác trong góc A thì M' thuộc AC.

Ví dụ 1.4.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Lời giải.

Kí hiệu $d_1: x-y+2=0$, $d_2: 4x+3y-1=0$.

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua d_1. Khi đó $H'\in AC$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua H và vuông góc với d_1.

Phương trình của $\Delta: x+y+2=0$

Suy ra $\Delta\cap d_1=I:\begin{cases}x+y+2=0\\x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow I(-2;0)$

Ta có I là trung điểm của HH' nên $H'(-3;1)$.

Đường thẳng AC đi qua H' và vuông góc với d_2 nên có phương trình: $3x-4y+13=0$.

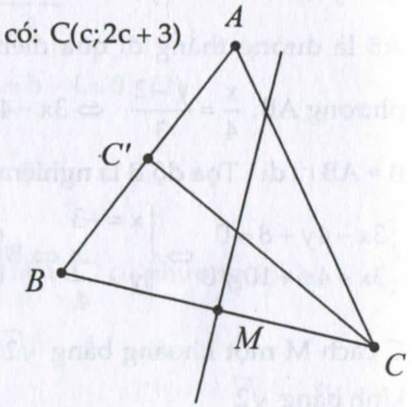
Nên $AC\cap d_1=A:\begin{cases}x-y+2=0\\3x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow A(5;7)$.

Vì CH đi qua H và vuông góc với AH, suy ra phương trình của CH: $3x+4y+7=0$

Do đó $C:\begin{cases}3x+4y+7=0\\3x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow C(-\frac{10}{3};\frac{3}{4})$.

Ví dụ 1.4.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(5;2)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC′ lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi $d: x+y-6=0$, $CC': 2x-y+3=0$. Ta có: $C(c;2c+3)$

Phương trình $BC: x-y+c+3=0$

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra M:

$$\begin{cases}x+y-6=0\\x-y+c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3-c}{2}\\y=\frac{c+9}{2}\end{cases}$$

Suy ra $B(3-2c;6-c)\Rightarrow C'\left(4-c;4-\frac{c}{2}\right)$

Mà $C'\in CC'$ nên ta có: $2(4-c)-(4-\frac{c}{2})+3=0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}c+7=0\Rightarrow c=\frac{14}{3}$.

Vậy $B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right), C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$.

Ví dụ 1.4.15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là: $3x+4y+10=0$ và $x-y+1=0$, điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Cho $d_1: 3x+4y+10=0$; $d_2: x-y+1=0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với d_2, Δ cắt d_2 tại I và cắt Ac tại N. $\Delta: x+y-2=0$

$I=\Delta\cap d_2$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Tam giác AMN có d₂ vừa là đường cao, vừa là phân giác nên là tam giác cân tại

Suy ra I là trung điểm của MN, do đó N (1; 1)

AC là đường thẳng đi qua điểm N(1; 1) và vuông góc với d₁ nên

AC: $4(x-1)-3(y-1)=0$

AC: $4x-3y-1=0$

$A = AC \cap d_2$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow A(4;5)$$

AB là đường thẳng đi qua điểm M(0; 2) nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm vec tơ chỉ phương AB: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$

$B = AB \cap d_1$. Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-4y+8=0 \\ 3x+4y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=\dfrac{-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow B\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$$

C cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ nên C thuộc đường tròn (S) có tâm M bán kính bằng $\sqrt{2}$

(S): $x^2+(y-2)^2=2$

$C = AC \cap (S)$. Tọa độ C là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x^2+(y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ x^2+\left(\dfrac{4x-7}{3}\right)^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ 25x^2-56x+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{31}{25} \Rightarrow y=\dfrac{33}{25} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C(1;\,1) \text{ hoặc } C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$$

Vì d₂ là phân giác trong của góc A nên B và C nằm khác phía bờ là d₂

$\Leftrightarrow (x_B-y_B+1)(x_C-y_C+1)<0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}(x_C-y_C+1)<0$

Cả hai điểm C trên đều thỏa mãn

Vậy $A(4;5)$; $B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$; $C(1;1)$ hoặc $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$.

Ví dụ 1.4.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{5}$; C(–1;–1), đường thẳng AB có phương trình x + 2y –3 = 0 và trọng tâm tam giác ABC thuộc đường thẳng x + y –2 = 0. Hãy tìm tọa độ các đỉnh A và B.

Lời giải.

Gọi trung điểm I của AB có tọa độ I(a; b). Ta có $a+2b-3=0$ (1)

$$3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_G+1)=2(a+1) \\ 3(y_G+1)=2(b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{2a-1}{3} \\ y_G=\dfrac{2b-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G\left(\frac{2a-1}{3};\frac{2b-1}{3}\right)$$

$$G \in x+y-2=0 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{3}+\frac{2b-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow a+b-4=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow I(5;-1)$

A,B thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ nên (C) có phương trình:

$(C): (x-5)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4}$

Tọa độ A và B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ (x-5)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ (-2-2y)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ (y+1)^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=-\dfrac{1}{2} \\ x=6; y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $A\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$; $B\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$; $B\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$

Ví dụ 1.4.17. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-2y+1=0$, $d_2: 2x+3y=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết A thuộc đường thẳng d_1, C thuộc đường thẳng d_2 và hai điểm B, D thuộc trục Ox.

Lời giải.

Vì $A\in d_1, C\in d_2$ nên $A(2a-1;a), C(3c;-2c)$, suy ra $I\left(\frac{2a+3c-1}{2};\frac{a-2c}{2}\right)$ là trung điểm AC

Do ABCD là hình vuông nên I là trung điểm của BD, hay $I\in Ox$.

Do đó $a=2c$.

Mặt khác $AC\perp BD\equiv Ox$ nên suy ra $2a-1=3c \Leftrightarrow c=1$.

Từ đó, ta tìm được $A(3;2)$, $C(3;-2)$, $I(3;0)$.

Vì $B\in Ox \Rightarrow B(b;0)$, mà $IB=IA=2 \Rightarrow |b-3|=2 \Leftrightarrow b=5, b=1$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD là:

$A(3;2)$, $B(1;0)$, $C(3;-2)$, $D(5;0)$ hoặc $A(3;2)$, $B(5;0)$, $C(3;-2)$, $D(1;0)$.

Chú ý: Khi tìm tọa độ các đỉnh của các tứ giác thuộc nhóm hình bình hành, ta cần chú ý

- Cho hình vuông ABCD, I là giao điểm hai đường chéo:
  - +) AC, BD là hai trục đối xứng của hình vuông
  - +) I là tâm đối xứng của hình vuông
  - +) $IA=IB=IC=ID$ và $AC\perp BD$
- Cho hình chữ nhật ABCD, I là giao điểm hai đường chéo:
  - +) AC, BD là hai trục đối xứng của hình vuông
  - +) I là tâm đối xứng của hình vuông
  - +) $IA=IB=IC=ID$
- Cho hình thoi ABCD, I là giao điểm hai đường chéo
  - +) $AC\perp BD$
  - +) I

là tâm đối xứng

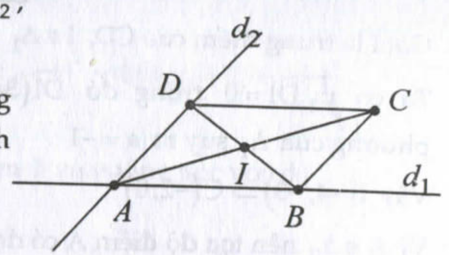
Ví dụ 1.4.18. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$, $d_2: 3x-y+5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD, biết $I(3;3)$ là giao điểm của hai đường chéo; hai cạnh của hình bình hành nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2 và giao điểm của hai đường thẳng đó là một đỉnh của hình bình hành.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+y-1=0\\3x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}.$$

Ta giả sử $A(-1;2)$ và $AB\equiv d_1, AD\equiv d_2$, suy ra $C(7;4)$.



Gọi d là đường thẳng đi qua I và song song với AB, suy ra phương trình $d: x+y-6=0$.

Tọa độ giao điểm của d và AD:

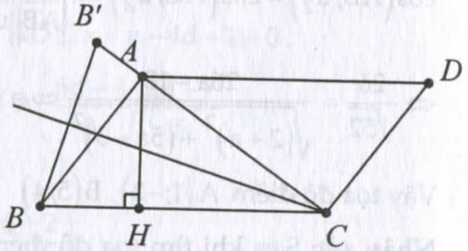
$$\begin{cases}x+y-6=0\\3x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{23}{4}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{23}{4}\right)$$ là trung điểm của AD

Do đó $D\left(\frac{3}{2};\frac{19}{2}\right)$, suy ra $B\left(\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

Ví dụ 1.4.19. Cho hình bình hành ABCD có $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, đường phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$ có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $d: x-y-1=0$.



Phương trình $BC: 2x-y+3=0$, suy ra tọa độ của điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\Rightarrow C(-4;-5).$$

Gọi B' đối xứng với B qua d, ta tìm được $B'(6;0)$ và $B'\in AC$.

Suy ra phương trình $AC: x-2y-6=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-2y-6=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\Rightarrow A(4;-1).$$

Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow D(-1;-11)$.

Ví dụ 1.4.20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$, đường trung trực của đoạn DC có phương trình là $\Delta_1: 2x+3y+17=0$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta_2: 5x+y-3=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CD, $I \in \Delta_1$ nên $I(3a-1;-2a-5)$

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{DI}=0$ trong đó $\overrightarrow{DI}(3a+5;-2a+1)$ và $\overrightarrow{u_1}(-3;2)$ là vectơ chỉ phương của Δ_1 suy ra $a=-1$

Vậy $I(-4;-3) \Rightarrow C(-2;0)$

Vì $A \in \Delta_2$ nên tọa độ điểm A có dạng $A(a;3-5a)$

Mặt khác ABCD là hình bình hành tương đương với $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-a=4 \\ y_B-3+5a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=a+4 \\ y_B=9-5a \end{cases} \Rightarrow B(a+4;9-5a)$$

$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{a+6}{4} \neq \dfrac{9-5a}{6} \Leftrightarrow a \neq 0$

Đường thẳng Δ_2 là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vectơ $\overrightarrow{u_2}=(-1;5)$ làm vec tơ chỉ phương nên

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u_2}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{u_2}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{26}{\sqrt{52}}=\frac{26a-13}{\sqrt{(2+a)^2+(5a-3)^2}} \Leftrightarrow a=1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tọa độ điểm $A(1;-2)$, $B(5;4)$

Nhận xét: Sau khi tìm tọa độ điểm C khi đó $C'(3;1)$ là điểm đối xứng C qua Δ_2. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua C' nhận $\overrightarrow{DC}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases} x=3+4t \\ y=1+6t \end{cases}$, từ đó ta cũng suy ra được $A(1;-2)$, $B(5;4)$.

Ví dụ 1.4.21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x+6y+21=0$ và đường thẳng $(d): x+y-1=0$.

Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) biết $A \in (d)$.

Lời giải.

Ta có $I(4;-3), R=2$ lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Ta có $I \in d$, hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn nên

$IA=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}$. Gọi $A(x_0;-x_0+1) \in d$.

$$IA=\sqrt{(x_0-4)^2+(-x_0+4)^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_0-4)^2=4 \Rightarrow x_0=2, x_0=6$$

$\Rightarrow A(2;-1); C(6;-5)$.

Đường thẳng $d': x-y-7=0$ đi qua tâm I và vuông góc với d.

Gọi $B(x_0;x_0-7) \in d'$.

$$\Rightarrow IB=\sqrt{(x_0-4)^2+(x_0-4)^2}=2\sqrt{2} \Rightarrow x_0=2; x_0=6 \Rightarrow B(2;-5), D(6;-1).$$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông là $A(2;-1); C(6;-5)$; $B(2;-5), D(6;-1)$ và các hoán vị A cho C, B cho D.

Ví dụ 1.4.22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh: $AB: x-3y+5=0$, đường chéo: $BD: x-y-1=0$ và đường chéo AC qua điểm $M(-9;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Lời giải.

Ta có tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(4;3)$.

$BC \perp AB \Rightarrow BC: 3(x-4)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 3x+y-15=0$.

$D \in BD \Rightarrow D(d;d-1) \Rightarrow$ phương trình $AD: 3x+y-4d+1=0$.

$$\Rightarrow AD \cap AB = A: \begin{cases} x-3y+5=0 \\ 3x+y-4d+1=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6d-4}{5};\frac{2d+7}{5}\right)$$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật

$\Rightarrow$ I là trung điểm của $BD \Rightarrow I\left(\dfrac{d+4}{2};\dfrac{d+2}{2}\right)$

Vì A, I, M thẳng hàng nên ta có: $\overrightarrow{IA}=k.\overrightarrow{MI}$

$$\Rightarrow \frac{7d-28}{d+22}=\frac{-d+4}{d-2} \Leftrightarrow d=-1; d=4.$$

* Với $d=4 \Rightarrow D(4;3) \equiv B$, loại.

* Với $d=-1 \Rightarrow D(-1;-2)$, $A(-2;1)$ và $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow C(5;0)$

Vậy $A(-2;1), B(4;3), C(5;0), D(-1;-2)$.

Ví dụ 1.4.23. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(-1;-1), N(0;2)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC và $D(1;0)$ là chân đường phân giác trong góc A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải.

Gọi $A(a;b) \Rightarrow B(-2-a;-2-b), C(-a;4-b)$.

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (a+3;b+2), \overrightarrow{CD} = (a+1;b-4)$

Vì B, C, D thẳng hàng nên $\dfrac{a+3}{a+1} = \dfrac{b+2}{b-4} \Leftrightarrow 3a - b + 7 = 0 \Rightarrow b = 3a + 7 \quad (1)$.

Mặt khác D là chân đường phân giác trong góc A

nên $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}}{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{AD} = (1-a;-b), \overrightarrow{AB} = (-2a-2;-2b-2), \overrightarrow{AC} = (-2a;4-2b)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+1) + b(b+1)}{\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2}} = \dfrac{(a-1)a + (b-2)b}{\sqrt{a^2 + (b-2)^2}} \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có: $\dfrac{a^2 - 1 + (3a+7)(3a+8)}{\sqrt{(a+1)^2 + (3a+8)^2}} = \dfrac{a^2 - a + (3a+5)(3a+7)}{\sqrt{a^2 + (3a+5)^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2 + 9a + 11}{\sqrt{2a^2 + 10a + 13}} = \frac{2a^2 + 7a + 7}{\sqrt{2a^2 + 6a + 5}}$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + 9a + 11)^2(2a^2 + 6a + 5) - (2a^2 + 7a + 7)^2(2a^2 + 10a + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a^2 + 4a + 4) = 0 \Leftrightarrow a = -2, b = 1.$$

Vậy $A(-2;1), B(0;-3), C(2;3)$.

Ví dụ 1.4.24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có D(2 ; –1), E(2 ; 2), F(–2 ; 2) là chân đường cao hạ từ A, B, C. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

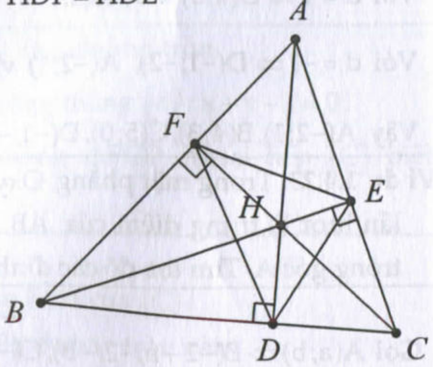
Gọi H(a;b) là trực tâm tam giác ABC.

Ta có tứ giác BDHF, CDHE, BCEF là các tứ giác nội tiếp nên suy ra

$\widehat{HDF} = \widehat{HBF};\ \widehat{HDE} = \widehat{HCE};\ \widehat{HBF} = \widehat{HCE} \Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HDE}$

$\Rightarrow$ AH là phân giác trong góc $\widehat{EDF}$.

Tương tự, ta có BH là phân giác trong của góc $\widehat{DEF}$. Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Ta có : $\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}}{EF} = \dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{ED}}{ED} \\ \dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FE}}{EF} = \dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FD}}{FD} \end{cases}$,

giải hệ này ta tìm được $a = 1, b = 1$ hay $H(1;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{HD} = (1;-2)$ nên phương trình $BC: x - 2y - 4 = 0$.

$\overrightarrow{HE} = (1;1)$ nên phương trình $AC: x + y - 4 = 0$.

$\overrightarrow{HF} = (-3;1)$ nên phương trình $AB: 3x - y + 8 = 0$.

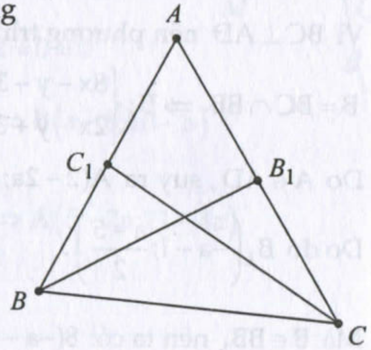
Vì $A = AB \cap AC \Rightarrow A: \begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$

Tương tự, ta tìm được $B(-4;-4), C(4;0)$.

3) Bài tập vận dụng

Bài 1.4.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4;-1)$ và phương trình hai đường trung tuyến $BB_1: 8x - y - 3 = 0$, $CC_1: 14x - 13y - 9 = 0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải.



Vì $B \in BB_1$ nên $B(b;8b-3)$, C_1 là trung điểm của AB nên ta có $C_1\left(\dfrac{b+4}{2};4b-2\right)$.

Mặt khác: $C_1 \in CC_1$ nên suy ra

$7(b+4) - 13(4b-2) - 9 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow B(1;5)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 8x - y - 3 = 0 \\ 14x - 13y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Suy ra $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = -2 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 11 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5)$.

Bài 1.4.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4;-1)$ và phương trình hai đường phân giác $BE: x - 1 = 0, CF: x - y - 1 = 0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là điểm đối xứng với A qua BE, suy ra $M \in BC$.

Vì $AM \perp BE$ nên $AM: y + 1 = 0$.

Do đó $AM \cap BE$ tại $I(1;-1)$, M đối xứng với A qua I nên suy ra $M(-2;-1)$.

Tương tự, gọi N là điểm đối xứng với A qua CF, suy ra $N \in BC$ và $N(0;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(2;4)\Rightarrow$ phương trình

$BC: 2x-y+3=0$.

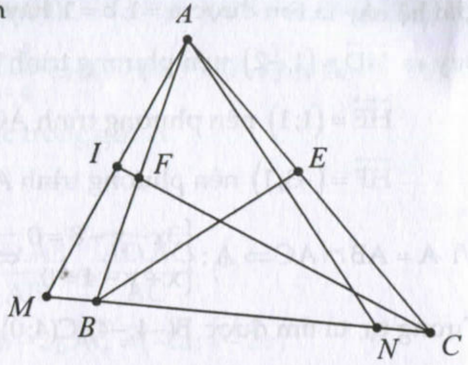
Vì $B=BE\cap BC$

$\Rightarrow B:\begin{cases}x-1=0\\2x-y+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow B(1;5)$

$C=CF\cap BC$

$\Rightarrow C:\begin{cases}x-y-1=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\Rightarrow C(-4;-5)$



Bài 1.4.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-4;-5)$ và phương trình đường cao $AD: x+2y-2=0$, đường trung tuyến $BB_1: 8x-y-3=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B.

Hướng dẫn giải.

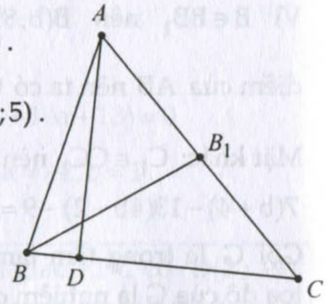
Vì $BC\perp AD$ nên phương trình $BC: 2x-y+3=0$.

$B=BC\cap BB_1\Rightarrow B:\begin{cases}8x-y-3=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow B(1;5)$.

Do $A\in AD$, suy ra $A(2-2a;a)$.

Do đó $B_1\left(-a-1;\dfrac{a-5}{2}\right)$.

Mà $B\in BB_1$ nên ta có: $8(-a-1)-\dfrac{a-5}{2}-3=0\Leftrightarrow a=-1\Rightarrow A(4;-1)$.



Bài 1.4.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(1;5)$ và phương trình đường cao $AD: x+2y-2=0$, đường phân giác trong $CC_1: x-y-1=0$. Tính tọa độ các điểm A, C.

Hướng dẫn giải.

Ta có phương trình $BC: 2x-y+3=0$.

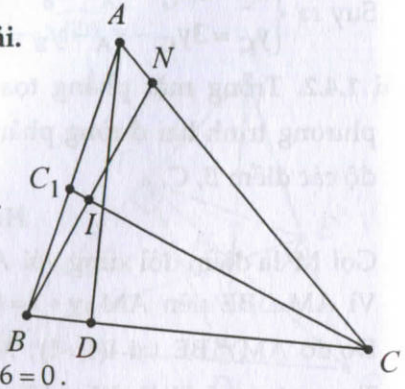
Vì $C=CC_1\cap BC$

$\Rightarrow C:\begin{cases}2x-y+3=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\Rightarrow C(-4;-5)$.

Gọi N là điểm đối xứng với B qua CC_1,

ta có $N\in AC$ và $N(6;0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{NC}=(10;5)$, phương trình $AC: x-2y-6=0$.



Tọa độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-6=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\Rightarrow A(4;-1)$.

Bài 1.4.5. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có phương trình các đường cao $AD: 2x-y+1=0$, $BE: x+y-2=0$, C thuộc đường thẳng $d: x+y-6=0$ và BC đi qua $M(0;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

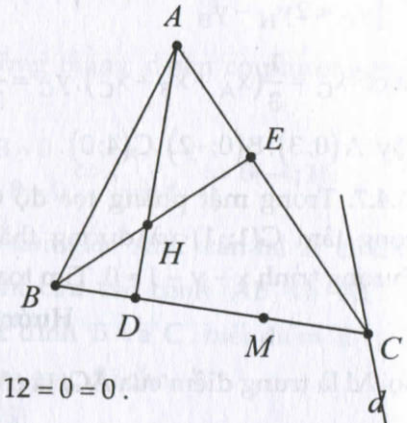
Hướng dẫn giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$\begin{cases}2x-y+1=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Vì $C\in d\Rightarrow C(a;6-a)$. Do $AC\perp BE$ nên phương trình AC có dạng:

$x-y+6-2a=0$



Tương tự, phương trình $BC: x+2y+a-12=0=0$.

Suy ra $B:\begin{cases}x+2y+a-12=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-8\\y=10-a\end{cases}\Rightarrow B(a-8;10-a)$

$A:\begin{cases}2x-y+1=0\\x-y+6-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2a\\y=11-4a\end{cases}\Rightarrow A(5-2a;11-4a)$

Suy ra $\overrightarrow{MC}=(a;3-a),\overrightarrow{MB}=(a-8;7-a)$.

Vì B,C,M thẳng hàng nên $\dfrac{a-8}{a}=\dfrac{a-7}{a-3}\Leftrightarrow a=6$.

Vậy $A(-7;-13),B(-2;4),C(6;0)$.

Bài 1.4.6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng $BC: x-2y-4=0$ và phương trình đường thẳng $BG: 7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Hướng dẫn giải.

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-4=0\\7x-4y-8=0\end{cases}\Rightarrow B(0;-2)$.

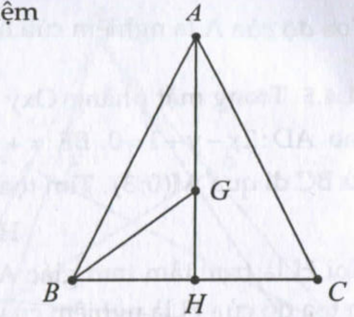
Vì ΔABC cân tại A nên AG là đường cao của ΔABC, suy ra phương trình AG có dạng: $2\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+1\left(y-\dfrac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Gọi $H = AG \cap BC$ thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2;-1)$$

Vì H là trung điểm của BC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_H - x_B \\ y_C = 2y_H - y_B \end{cases} \Rightarrow C(4;0).$$



Ta có $x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \Rightarrow A(0;3)$.

Vậy $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

Bài 1.4.7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(-4; 1), trọng tâm G(1; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là trung điểm của AC, ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{2};1\right)$

Gọi N là điểm đối xứng của B qua phân giác trong Δ của góc A và H là giao điểm của Δ với đường thẳng BN.

Đường thẳng BN có phương trình : $x + y + 3 = 0$

Suy ra, tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-2)$

H là trung điểm của BN $\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x_H - x_B = 2 \\ y_N = 2y_H - y_B = -5 \end{cases} \Rightarrow N(2;-5)$

Đường thẳng AC qua 2 điểm M, N nên có pt : $4x - y - 13 = 0$

A là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x - y - 13 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;3)$

M là trung điểm của AC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 3 \\ y_C = 2y_M - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow C(3;-1)$.

Bài 1.4.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao $BH: x + y + 3 = 0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Hướng dẫn giải.

Cạnh AC nằm trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với BH

Phương trình cạnh $AC: x - y = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 4y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra tọa độ điểm $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Cạnh BC đi qua C và song song với đường thẳng d nên có phương trình $BC: x - 4y + 8 = 0$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - 4y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-4;1)$.

Bài 1.4.9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6;6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Hướng dẫn giải.

Gọi $d: x + y - 4 = 0$.

Vì BC//d nên phương trình BC có dạng: $x + y + m = 0$

Lấy $I(1;3) \in d$, ta có: $d(I,BC) = d(A,d) = 4\sqrt{2} \Rightarrow |m + 4| = 8 \Rightarrow m = -12, m = 4$

Vì A và I ở cùng phía so với BC nên ta có $m = 4 \Rightarrow BC: x + y + 4 = 0$.

Đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình : $x - y = 0$.

Tọa độ trung điểm P của BC: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-2;-2)$

Do $B \in BC \Rightarrow B(b;-4-b)$ và P là trung điểm BC suy ra $C(-4-b;b)$

Mặt khác $AB \perp CE$ nên ta có $(b-6)(b+4) + (b+10)(b+3) = 0 \Leftrightarrow b = 0, b = -6$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$B(0;-4), C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2), C(2;-6)$.

Bài 1.4.10. Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC, biết $C(4;3)$ và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ A lần lượt có phương trình $x + 2y - 5 = 0,\ 4x + 13y - 10 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD. Khi đó $C' \in AB$.

Gọi $H = AD \cap CC' \Rightarrow H(5-2t;t) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (1-2t;t-3)$

Mặt khác AD có $\vec{u}=(-2;1)$ là VTCP và do $\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$ nên ta có:

$$\overrightarrow{CH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow -2(1-2t)+1(t-3)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;1).$$

Do H là trung điểm của CC', nên $C'(2;-1)$.

Vì $A=AD\cap AM$ (M là trung điểm của BC) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+2y-5=0\\4x+13y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-2\end{cases}\Rightarrow A(9;-2)$.

Khi đó đường thẳng AB có phương trình $x+7y+5=0$ nên $B(-7t-5;t)$.

Vì $M\in AM\Rightarrow M\left(\dfrac{-13s+10}{4};s\right)$.

Mà M là trung điểm của BC nên $\begin{cases}-13s+10=-14t-2\\2s=3+t\end{cases}\Rightarrow B(-12;1)$.

Bài 1.4.11. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM\perp BC$. Suy ra phương trình của $AM: x+y-3=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow AM=\dfrac{9}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AM.BC=AM.BM=18\Rightarrow BM=\dfrac{18}{AM}=2\sqrt{2}$

Mặt khác: $B\in\Delta$, suy ra $B(b;b-4)$ nên:

$$BM^2=8\Leftrightarrow\left(b-\frac{7}{2}\right)^2+\left(b-\frac{7}{2}\right)^2=8\Leftrightarrow\left(b-\frac{7}{2}\right)^2=4\Leftrightarrow b=\frac{11}{2},b=\frac{3}{2}.$$

- Với $b=\dfrac{11}{2}\Rightarrow B\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right),C\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$.
- Với $b=\dfrac{11}{2}\Rightarrow B\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right),C\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 1.4.12. Cho tam giác ABC với $A(2;-4),B(0;-2)$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: 3x-y+1=0$. Hãy tìm tọa độ của C, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 3.

Hướng dẫn giải.

Trung điểm I của AB là $I(1;-3)$, vì G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra $S_{AGB}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}=1\Rightarrow\dfrac{1}{2}d(G,AB).AB=1\Rightarrow d(G,AB)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $G\in d$ nên suy ra $G(a;3a+1)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x+y+2=0$ nên $d(G,AB)=\dfrac{|4a+3|}{\sqrt{2}}$

Do đó $d(G,AB)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\dfrac{|4a+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=-1,a=-\dfrac{1}{2}$

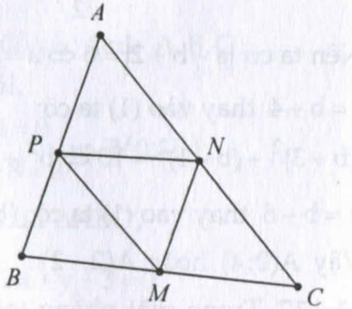
- Với $a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow G\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, mà $\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=-\dfrac{7}{2}\\y_C=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

Do đó $C\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

- Tương tự với $a=-1$ ta tìm được $C(-5;0)$.

Bài 1.4.14. Cho tam giác ABC có $M(2;0),N(-1;-1),P(-2;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CA. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

Hướng dẫn giải.



Do M,N,P là trung điểm các cạnh nên ta có $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{MN}$ hay suy ra

$$\begin{cases}x_A+2=-3\\y_A-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=-5\\y_A=2\end{cases}\Rightarrow A(-5;2)$$

Từ đó, suy ra $B(1;4),C(3;-4)$.

Bài 1.4.15. Trog mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(1;0),N(4;-3)$ lần lượt là trung điểm của AB,AC; $D(2;6)$ là chân đường cao hạ từ A lên BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Gọi $A(a;b)$, suy ra $\overrightarrow{DA}=(a-2;b-6)$, $\overrightarrow{MN}=(3;-3)$.

Vì $AD\perp MN\Rightarrow\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MN}=0\Leftrightarrow a-2-b+6=0\Leftrightarrow a-b=-4$ (1).

Lấy đối xứng điểm A qua M,N ta có: $B(2-a;-b)$, $C(8-a;-6-b)$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = (a;6+b)$, $\overrightarrow{CD} = (a-6;b+12)$.

Vì B, C, D thẳng hàng nên ta có: $\dfrac{a-6}{a} = \dfrac{b+12}{b+6} \Leftrightarrow a+b=-6$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $a=-5; b=-1$.

Vậy $A(-5;-1), B(7;1), C(13;-5)$.

Bài 1.4.16. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Điểm $M(0;2)$ là trung điểm cạnh BC và diện tích tam giác ABC bằng 12. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, suy ra $\overrightarrow{MI} = (1;-1)$.

Vì BC đi qua M và vuông góc với MI nên $BC: x-y+2=0$.

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10\\ x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+2\\ x^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2, y=4\\ x=-2, y=0\end{array}\right.$$

Suy ra $B(2;4), C(-2;0)$ hoặc $B(-2;0), C(2;4)$.

Gọi $A(a;b)$, suy ra $(a-1)^2+(b-1)^2=10$ (1)

Ta có: $d(A,BC) = \dfrac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}, BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2|a-b+2|$

Nên ta có $|a-b+2| = 6 \Leftrightarrow a=b+4, a=b-8$.

- $a=b+4$ thay vào (1) ta có:
  $(b+3)^2+(b-1)^2=10 \Leftrightarrow b^2+2b=0 \Leftrightarrow b=0, b=-2$
- $a=b-8$ thay vào (1) ta có: $(b-9)^2+(b-1)^2=10$, vô nghiệm.

Vậy $A(0;4)$ hoặc $A(2;-2)$.

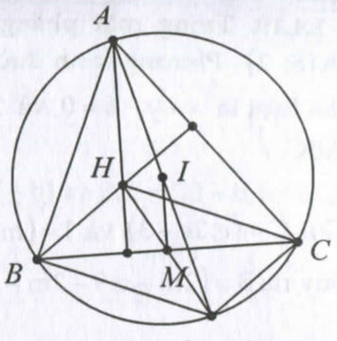
Bài 1.4.17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải.

Cách 1: Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có BH//CD, CH//BD nên tứ giác BDCH là hình bình hành nên M là trung điểm HD.

Từ đó suy ra, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \begin{cases}0=2(-2-x)\\ 6=2(-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases} \Rightarrow M(-2;-3)$.



Nên đường thẳng BC qua M có $\overrightarrow{AH}(0;6)$ là vtpt có phương trình là: $y+3=0$.

Gọi $C(a;-3)$,

do $IA = IC \Leftrightarrow 5^2+(-7)^2 = (a+2)^2+(-3)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-61=0 \Leftrightarrow a=-2\pm\sqrt{65}$

$\Rightarrow C(-2+\sqrt{65};-3)$

Cách 2.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(x+2)^2+y^2=74$.

Phương trình $AH: x=3$, do $BC \perp AH \Rightarrow BC: y=m$ ($m \neq -7$)

Tọa độ B, C là nghiệm của phương trình:

$(x+2)^2+m^2=74 \Leftrightarrow x^2+4x+m^2-70=0$ (*)

Vì (*) có hai nghiệm, trong đó có ít nhất một nghiệm dương nên $|m| < \sqrt{70}$

Khi đó: $B(-2-\sqrt{74-m^2};m), C(-2+\sqrt{74-m^2};m)$

Vì $BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow m^2+4m-21=0 \Leftrightarrow m=3$

Vậy $C(-2+\sqrt{65};3)$.

Bài 1.4.18. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC: $x-2y-4=0$ và phương trình đường thẳng BG: $7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Hướng dẫn giải.

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-4=0\\ 7x-4y-8=0\end{cases} \Rightarrow B(0;-2)$.

Vì ΔABC cân tại A nên AG là đường cao của ΔABC,

$AG \perp BC \Rightarrow AG: 2\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+1\left(y-\dfrac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Gọi $H = AG \cap BC$ thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$\begin{cases}2x+y-3=0\\ x-2y-4=0\end{cases} \Rightarrow H(2;-1)$.

Vì H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases}x_C = 2x_H - x_B\\ y_C = 2y_H - y_B\end{cases} \Rightarrow C(4;0)$.

Ta có $x_G = \dfrac{1}{3}(x_A+x_B+x_C), y_G = \dfrac{1}{3}(y_A+y_B+y_C) \Rightarrow A(0;3)$.

Vậy $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

Bài 1.4.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A\left(5;\ 2\right)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC′ lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Gọi $C=\left(c;2c+3\right)$ và $I=\left(m;6-m\right)$ là trung điểm của BC

Suy ra: $B=\left(2m-c;9-2m-2c\right)$.

Vì C′ là trung điểm của AB nên: $C'=\left(\frac{2m-c+5}{2};\frac{11-2m-2c}{2}\right)\in CC'$

Nên $2(\frac{2m-c+5}{2})-\frac{11-2m-2c}{2}+3=0\Rightarrow m=-\frac{5}{6}\Rightarrow I=(-\frac{5}{6};\frac{41}{6})$.

Phương trình $BC:3x-3y+23=0$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y+3=0\\3x-3y+23=0\end{cases}\Rightarrow C=\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$

Tọa độ $B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Bài 1.4.20. Tìm tọa độ đỉnh B, C của tam giác đều ABC , biết $A\left(3;-5\right)$ và trọng tâm $G\left(1;1\right)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}\Rightarrow M\left(0;4\right)$

Phương trình $BC:x-3y+12=0$.

Giả sử $B\left(3y_0-12;y_0\right)$ và từ $GA=GB$ dẫn tới phương trình

$$\left(3y_0-13\right)^2+\left(y_0-1\right)^2=40\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=4+\sqrt{3}\\y_0=4-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

- Nếu $y_0=4+\sqrt{3}\Rightarrow B\left(-3\sqrt{3};4+\sqrt{3}\right)\Rightarrow C\left(3\sqrt{3};4-\sqrt{3}\right)$.
- Nếu $y_0=4-\sqrt{3}\Rightarrow B\left(3\sqrt{3};4-\sqrt{3}\right)\Rightarrow C\left(-3\sqrt{3};4+\sqrt{3}\right)$.

Bài 1.4.21. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(6;4)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng AB và đường phân giác trong góc A lần lượt có phương trình $x-y+1=0,\ x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Gọi $d:x-2y+3=0;\ AB:x-y+1=0$.

Ta có: $A=d\cap AB\Rightarrow A:\begin{cases}x-y+1=0\\x-2y+3=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$.

$B\in AB\Rightarrow B(b;b+1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(b-1;b-1)$.

Do C đối xứng với B qua M nên ta có $C(12-b;7-b)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=(11-b;5-b)$.

Gọi $\vec{u}=(2;1)$ là VTCP của đường thẳng d.

Ta có: $\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\frac{\vec{u}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\frac{\vec{u}.\overrightarrow{AC}}{AC}$

$$\Leftrightarrow\frac{2(b-1)+1(b-1)}{\sqrt{2(b-1)^2}}=\frac{2(11-b)+1(5-b)}{\sqrt{(11-b)^2+(5-b)^2}}\Leftrightarrow\frac{9-b}{\sqrt{2b^2-32b+146}}=\frac{b-1}{\sqrt{2(b-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le b\le 9\\\frac{(9-b)^2}{2b^2-32b+146}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow b=4\Rightarrow B(4;5),\ C(8;3).$$

Vậy $A(1;2),B(3;3),C(8;3)$.

Bài 1.4.22. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(6;4)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng AB và đường phân giác trong góc A lần lượt có phương trình $x-y+1=0,\ 2x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Đặt $d:2x+y-4=0$

Ta có: $A=AB\cap d\Rightarrow A:\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$.

Lấy $N(2;3)\in AB$, gọi N' đối xứng với N qua d, suy ra $N'\in AC$

Phương trình $NN':x-2y+4=0$

$NN'\cap d=I:\begin{cases}2x+y-4=0\\x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right)$

Vì I là trung điểm NN′ nên $N'(-\frac{2}{5};\frac{9}{5})\Rightarrow\overrightarrow{AN'}=\left(-\frac{7}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Phương trình $AC:x-7y+13=0$. Từ đó suy ra $C(7c-13;c)$ và $B(b;b+1)$

Mà M là trung điểm BC nên $\begin{cases}b+7c-13=12\\c+b+1=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\c=3\end{cases}$.

Vậy $A(1;2),\ B(4;5),\ C(8;3)$.

Bài 1.4.23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là : $3x+4y+10=0$ và $x-y+1=0$, điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải.

Cho $d_1: 3x+4y+10=0$; $d_2: x-y+1=0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với d₂ , Δ cắt d₂ tại I và cắt AC tại N ⇒ N đối xứng với M qua d_2.

Ta có phương trình $\Delta: x+y-2=0$.

Gọi $I=\Delta\cap d_2 \Rightarrow I: \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

I là trung điểm của $MN \Rightarrow N(1;1)$

AC đi qua $N(1;1)$ và vuông góc với d₁ $\Rightarrow AC: 4x-3y-1=0$.

$A=AC\cap d_2 \Rightarrow A: \begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(4;5)$.

AB là đường thẳng đi qua điểm $M(0;2)$ nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm vec tơ chỉ phương AB: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$.

$B=AB\cap d_1 \Rightarrow B: \begin{cases} 3x-4y+8=0 \\ 3x+4y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=\dfrac{-1}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$.

Vì C cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ nên C thuộc đường tròn (S) có tâm M bán kính bằng $\sqrt{2} \Rightarrow (S): x^2+(y-2)^2=2$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x^2+(y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ x^2+\left(\dfrac{4x-7}{3}\right)^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ 25x^2-56x+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{31}{25} \Rightarrow y=\dfrac{33}{25} \end{array}\right. .$$

Vì d_2 là phân giác trong của góc A nên B và C nằm khác phía bờ là d₂

$\Leftrightarrow (x_B-y_B+1).(x_C-y_C+1)<0 \Leftrightarrow x_C-y_C+1>0$.

Cả hai điểm C trên đều thỏa mãn

Vậy $A(4;5)$, $B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$, $C(1;1)$ hoặc $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$.

Bài 1.4.24. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 14. Hai điểm $M(2;-1), N(-2;4)$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC . Đường thẳng $\Delta: x+2y+5=0$ đi qua đỉnh B. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải.

Vì $B\in\Delta \Rightarrow B(-2b-5;b) \Rightarrow A(2b+9;-2-b)$

Đường thẳng $MN: 5x+4y-6=0$, $MN=\sqrt{41}$

Ta có $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\dfrac{7}{2} \Rightarrow MN.d(A,MN)=7$ (*)

Mà: $d(A,MN)=\dfrac{|6b+31|}{\sqrt{41}} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow |6b+31|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=-\dfrac{19}{3} \end{array}\right.$.

- Với $b=-4 \Rightarrow A(1;2), B(3;-4), C(-5;6)$
- Với $b=-\dfrac{19}{3} \Rightarrow A\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{13}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{23}{3};-\dfrac{19}{3}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.

Bài 1.4.25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$, đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Hướng dẫn giải.

Gọi $d: x+y-4=0$.

Vì $BC//d \Rightarrow$ phương trình BC có dạng: $x+y+m=0$

Lấy $I(1;3)\in d$, ta có: $d(I,BC)=d(A,d)=4\sqrt{2} \Rightarrow |m+4|=8 \Rightarrow m=-12, m=4$

Vì A và I ở cùng phía so với BC nên ta có : $m=4 \Rightarrow BC: x+y+4=0$.

Đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình : $x-y=0$.

Tọa độ trung điểm P của BC: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \Rightarrow P(-2;-2)$

$B\in BC \Rightarrow B(b;-4-b)$, P là trung điểm BC suy ra $C(-4-b;b)$.

$AB\perp CE \Rightarrow (b-6)(b+4)+(b+10)(b+3)=0 \Leftrightarrow b=0, b=-6$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$B(0;-4)$, $C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2)$, $C(2;-6)$.

Bài 1.4.26. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(−1;4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Hướng dẫn giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên $\Delta \Rightarrow$ H là trung điểm BC.

$$AH = d(A,BC) = \frac{9}{\sqrt{2}};\ BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AH} = 4\sqrt{2},\ AB = AC = \sqrt{AH^2+\frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{97}{2}}.$$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x+1)^2+(y-4)^2=\dfrac{97}{2}\\ x-y-4=0\end{cases}$

Giải hệ ta được $(x;y)=\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

Vậy $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 1.4.27. Cho tam giác ABC nhọn, viết phương trình đường thẳng AC, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $A_1(-1;-2)$, $B_1(2;2), C_1(-1;2)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\widehat{CB_1x} = \widehat{AB_1C_1}$ (1)

Tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AB_1C_1} = \widehat{AHC_1}$ (2) và $\widehat{AHC_1} = \widehat{A_1HC}$ (3)

Tứ giác A_1HB_1C nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1HC} = \widehat{A_1B_1C}$ (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra: $\widehat{CB_1x} = \widehat{A_1B_1C} \Rightarrow$ AC là phân giác ngoài góc B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$.

Ta có: $A_1B_1: 4x-3y-2=0; B_1C_1: y-2=0$

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng A_1B_1, B_1C_1

$$\frac{|4x-3y-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = |y-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2y+2=0\\ 2x+y-6=0\end{array}\right.$$

Vậy phương trình cạnh $AC: 2x+y-6=0$.

Bài 1.4.28. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(2;1), đường cao kẻ từ B có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến kẻ từ C có phương trình $x+y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B,C của tam giác.

Hướng dẫn giải.

Phương trình đường cao $BH: x-3y-7=0$ và

$AC: 3x+y-7=0$. Vì $B \in BH \Rightarrow B(3y+7;y)$.

Tọa độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{3y+9}{2};\frac{y+1}{2}\right)$, vì I thuộc trung tuyến kẻ từ đỉnh C $\Rightarrow \frac{3y+9}{2}+\frac{y+1}{2}+1=0 \Leftrightarrow y=-3 \Rightarrow B(-2;-3)$.

Từ đó tìm được $C(4;-5)$.

Bài 1.4.29. Cho tam giác ABC có phân giác trong $AD: x-y=0$, đường cao $CH: 2x+y+3=0$, AC đi qua $M(0;-1)$ và $AB=2AM$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường phân giác AD khi đó $N \in AB$.

Ta có $N(-1;0)$.

Cạnh AB đi qua N và vuông góc với $CH \Rightarrow AB: x-2y+1=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y=0\\ x-2y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$. Vậy $A(1;1)$.

Phương trình cạnh $AC: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x-y-1=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y+3=0\\ 2x-y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-2\end{cases}$.

Vậy $C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$.

Ta có $AM=\sqrt{(1+1)^2+1}=\sqrt{5}; AB=2AM=2\sqrt{5}$.

Gọi $B(2y_0-1;y_0) \in AB$.

$AB=\sqrt{(2y_0-2)^2+(y_0-1)^2}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (y_0-1)^2=4 \Leftrightarrow y_0=-1, y_0=3$.

Với $y_0=3$ thì $B(5;3)$ không thoả mãn vì hai điểm B,C ở cùng phía so với đường phân giác AD.

Với $y_0=-1$ thì $B(-3;-1)$ thỏa mãn.

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác là: $A(1;1), B(-3;-1), C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$.

Bài 1.4.30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2;1)$, lấy điểm $B \in Ox$ có hoành độ không âm và điểm $C \in Oy$ có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

Gọi $B(x;0)\in Ox; C(0;y)\in Oy, x\ge 0, y\ge 0$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x-2;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;y-1)$

Tam giác ABC vuông tại A suy ra

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2x-y+5=0\Rightarrow y=5-2x\ge 0\Rightarrow x\le\dfrac{5}{2}$

Diện tích tam giác ABC :

$$S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}.\sqrt{4+(y-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}.\sqrt{4+(5-2x-1)^2}=x^2-4x+5.$$

Với $0\le x\le\dfrac{5}{2}\Rightarrow S=x^2-4x+5\le 5$

$\max S=5$ khi $x=0$. Vậy $B(0;0), C(0;5)$.

Bài 1.4.31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A biết phương trình đường thẳng Δ chứa cạnh BC là: $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$; điểm A, B thuộc trục hoành. Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2.

Hướng dẫn giải.

Dễ thấy $B(1;0)$. Vì $C\in\Delta\Rightarrow C\left(a;\sqrt{3}(a-1)\right)$

A, B thuộc trục hoành và tam giác ABC vuông nên $A(a;0)$

$\overrightarrow{AB}=(a-1;0), \overrightarrow{AC}=\left(0;\sqrt{3}(a-1)\right)$, ABC là tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $a\ne 1$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có $S_{ABC}=pr=\dfrac{1}{2}AB.AC$

suy ra $2(AB+BC+CA)=AB.AC$

Mặt khác $AB=|a-1|, BC=2|a-1|, CA=\sqrt{3}|a-1|$

Nên ta có $2\left(3+\sqrt{3}\right)|a-1|=\sqrt{3}(a-1)^2$ suy ra $a=1$ (loại), $a=3+2\sqrt{3}$ hoặc $a=-1-2\sqrt{3}$

Vậy có hai trường hợp xảy ra ta tìm được tọa độ trọng tâm trong hai trường hợp đó là: $G_1\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$, $G_2\left(\dfrac{-1-4\sqrt{3}}{3};\dfrac{-2\sqrt{3}-6}{3}\right)$

Bài 1.4.32. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AH, trung tuyến CM và phân giác trong BD. Biết $H(-4;1), M\left(\dfrac{17}{5};12\right)$ và BD có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng Δ qua H và $\perp$ BD có phương trình:

$x-y+5=0$. $\Delta\cap BD=I\Rightarrow I(0;5)$.

Giả sử $\Delta\cap AB=H'$. Tam giác BHH' có BI là phân giác và cũng là đường cao nên BHH' cân $\Rightarrow$ I là trung điểm của $HH'\Rightarrow H'(4;9)$

AB đi qua H' và có vtcp $\vec{u}=\overrightarrow{H'M}=\left(-\dfrac{3}{5};3\right)$ nên có pt là $5x+y-29=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}5x+y=29\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow B(6;-1)$.

M là trung điểm của $AB\Rightarrow A\left(\dfrac{4}{5};25\right)$.

Bài 1.4.33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(0,4), trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và trực tâm trùng với gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh B,C và diện tích tam giác ABC biết $x_B<x_C$.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ nên $M(2;-1)$

Gọi $B(x;y)$, C và B đối xứng qua M nên $C(4-x;-2-y)$

Suy ra $\overrightarrow{OA}=(0;4)$, $\overrightarrow{MB}=(x-2;y+1)$, $\overrightarrow{OB}=(x;y)$, $\overrightarrow{AC}=(4-x;-6-y)$

Do O là trực tâm nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MB}=0\\\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(y+1)=0\\x(4-x)+y(-6-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x^2-4x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=-1, x=5\end{cases}$$

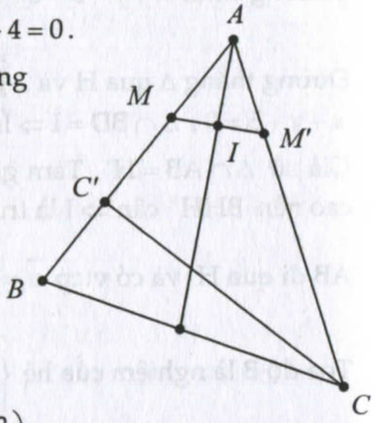
Vì $x_B<x_C$ nên $x<4-x\Rightarrow x<2\Rightarrow x=-1$.

Vậy $B(-1;-1)$, $C(5;-1)$ và $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d(A,BC).BC=15$.

Bài 1.4.34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm M(3;1) nằm trên đường thẳng AB, phương trình đường phân giác trong của góc A có phương trình: $x-y-1=0$ và đường cao qua C có phương trình:

$2x+y+4=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải.



Gọi $d: x-y-1=0$, đường cao $CC': 2x+y+4=0$.

Vì AB đi qua M và $AB \perp CC'$ nên phương trình AB là: $x-2y-1=0$

Tọa độ điểm

$$A: \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0).$$

Gọi M' đối xứng với M qua d, suy ra phương trình $MM': x+y-4=0$

$$MM' \cap d = I: \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Vì I là trung điểm MM′ nên $M'(2;2)$

Ta có: $\overrightarrow{AM'}=(1;2)$, phương trình $AC: 2x-y-2=0$

$$\text{Tọa độ điểm } C: \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2};-3\right) \Rightarrow AC=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC}=\frac{9}{2} \Rightarrow d(B,AC).AC=9 \Rightarrow d(B,AC)=\frac{6}{\sqrt{5}}$

$$B \in AB \Rightarrow B(2b+1;b) \Rightarrow d(B,AC)=\frac{|3b|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow b=\pm 2$$

Suy ra $B(5;2)$ hoặc $B(-3;-2)$.

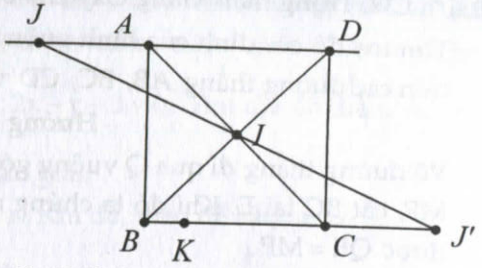
Bài 1.4.35. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $I(1;1)$, $J(-2;2)$, $K(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD.

Hướng dẫn giải.

Gọi J' đối xứng với J qua I, ta có $J'(4;0)$ và $J' \in CD$.

Ta có: $\overrightarrow{KJ'}=(2;2)$, suy ra phương trình $CD: x-y-4=0$.

Vì AB//CD nên phương trình $AB: x-y+4=0$.



Do $d(I,AB)=2\sqrt{2}$ nên suy ra

$AB=4\sqrt{2} \Rightarrow IA=4$

$A \in AB \Rightarrow A(a;4+a)$,

Do đó:

$IA=4 \Leftrightarrow (a-1)^2+(a+3)^2=16$

$\Leftrightarrow a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=1, a=-3$

- Với $a=1$, ta có $A(1;3)$, $B(-3;1)$, $C(1;-1)$, $D(5;1)$
- Với $a=-3$, ta có $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(5;1)$, $D(1;-1)$.

Bài 1.4.36. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=10$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông MNPQ, biết M trùng với tâm của đường tròn (C); hai đỉnh N, Q thuộc đường tròn (C); đường thẳng PQ đi qua $E(-3;6)$ và $x_Q>0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $M(2;1)$ và EQ là tiếp tuyến của (C).

Phương trình EQ có dạng: $a(x+3)+b(y-6)=0 \Leftrightarrow ax+by+3a-6b=0$

Vì $d(M,EQ)=\sqrt{10}$ nên ta có: $\frac{|5a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{10}$.

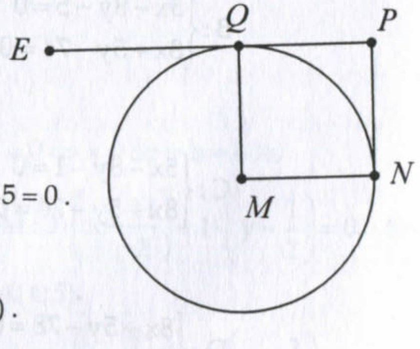
$\Leftrightarrow (5a-5b)^2=10(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0 \Leftrightarrow a=3b, b=3a$.

- $a=3b$, ta có phương trình $EQ: 3x+y+3=0$.

  Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ

  $$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=10 \\ 3x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}.$$

  Trường hợp này ta loại vì $x_Q>0$.



- $b=3a$, ta có phương trình $EQ: x+3y-15=0$.

  Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ

  $$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=10 \\ 3x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow Q(3;4).$$

Ta có $P(15-3x;x)$ và $QP=MQ \Rightarrow (12-3x)^2+(4-x)^2=10 \Leftrightarrow x=3, x=5$

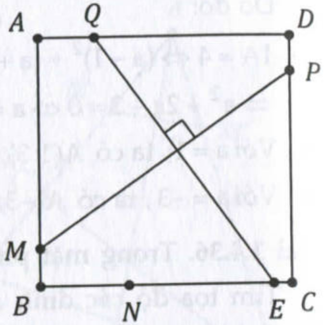
- $x=3$, ta có $P(6;3)$, suy ra tâm của hình vuông $I(4;2)$ nên $N(5;0)$
- $x=5$, ta có $P(0;5)$, suy ra tâm của hình vuông $I(1;3)$ nên $N(-1;2)$.

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$M(2;1), N(5;0), P(6;3), Q(3;4)$ và $M(2;1), N(-1;2), P(0;5), Q(3;4)$.

Bài 1.4.37. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $M(1;0)$, $N(8;2)$, $P(5;3)$, $Q(6;6)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD và DA.

Hướng dẫn giải.



Vẽ đường thẳng đi qua Q vuông góc với MP, cắt BC tại E. Khi đó ta chứng minh được $QE = MP$.

Ta có: $\overrightarrow{MP} = (4;3)$, phương trình $QE: 4x + 3y - 42 = 0$.

Suy ra $E\left(x;\dfrac{42-4x}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = \left(x-6;\dfrac{24-4x}{3}\right)$.

Do đó $QE = MP \Leftrightarrow (x-6)^2 + \dfrac{16}{9}(x-6)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3, x = 9$.

- Với $x = 3 \Rightarrow E(3;10) \Rightarrow \overrightarrow{EN} = (5;-8) \Rightarrow$ phương trình $BC: 8x + 5y - 74 = 0$.

  Phương trình $AB: 5x - 8y - 5 = 0$, phương trình $CD: 5x - 8y - 1 = 0$.

  Phương trình $AD: 8x + 5y - 78 = 0$.

  Do đó: $$A: \begin{cases} 5x - 8y - 5 = 0 \\ 8x + 5y - 78 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{649}{89} \\ y = \dfrac{350}{89} \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{649}{89};\dfrac{350}{89}\right);$$

  $$B: \begin{cases} 5x - 8y - 5 = 0 \\ 8x + 5y - 74 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{617}{89} \\ y = \dfrac{330}{89} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{617}{89};\dfrac{330}{89}\right);$$

  $$C: \begin{cases} 5x - 8y - 1 = 0 \\ 8x + 5y - 74 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{597}{89} \\ y = \dfrac{362}{89} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{597}{89};\dfrac{362}{89}\right);$$

  $$D: \begin{cases} 8x + 5y - 78 = 0 \\ 5x - 8y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{629}{89} \\ y = \dfrac{382}{89} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{629}{89};\dfrac{382}{89}\right).$$

- Với $x = 9 \Rightarrow E(9;2) \Rightarrow \overrightarrow{EN} = (-1;0) \Rightarrow$ phương trình $BC: y - 2 = 0$.

  Phương trình $AB: x - 1 = 0$, phương trình $CD: x - 5 = 0$, phương trình $AD: y - 6 = 0$.

  Do đó, ta tìm được: $A(1;6)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$, $D(5;6)$.

Bài 1.4.38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $AN: 2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Hướng dẫn giải.

Giả sử hình vuông ABCD có cạnh là a. Khi đó, theo đề bài, ta có

$$AN = \sqrt{DA^2 + DN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}a}{3},$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2},$$

$$NM = \sqrt{CN^2 + CM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{5a}{6}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANM, ta có:

$$\cos\widehat{NAM} = \frac{AN^2 + AM^2 - NM^2}{2\cdot AN\cdot AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó, phương trình đường thẳng AM qua M và tạo với AN một góc thỏa $\cos\widehat{NAM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử đường thẳng AM có pháp vector là $\vec{n} = (a,\ b)$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. Khi đó, ta tính được: $\cos\widehat{NAM} = \dfrac{|2a - b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Từ đây, do $\cos\widehat{NAM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta có

$$\sqrt{2}|2a - b| = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3b \vee b = -3a.$$

- Với $a = 3b$: Chọn $b = 1$, $a = 3$, ta có $AM: 3\cdot\left(x - \dfrac{11}{2}\right) + 1\cdot\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, tức $3x + y - 17 = 0$. Từ đây dễ dàng tìm được $A(4;5)$.
- Với $b = -3a$: Chọn $a = 1$, $b = -3$, ta có $AM: 1\cdot\left(x - \dfrac{11}{2}\right) - 3\cdot\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0$, tức $x - 3y - 4 = 0$.

  Với kết quả này, ta tìm được $A(1;-1)$.

Vậy có tất cả hai điểm A thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $A(4;5)$ và $A(1;-1)$.

Bài 1.4.39. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của AB là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải.

Ta có $d_1 \cap d_2 = I: \begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

Gọi M là giao của đường thẳng d_1 với Ox, suy ra $M(3;0)$.

Vì $AB \perp MI$ nên suy ra phương trình $AB: x+y-3=0$

Mặt khác: $AD = 2MI = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{S_{ABCD}}{AD} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = 2$

Mà $A \in AB \Rightarrow A(a;3-a) \Rightarrow AM^2 = 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow a = 2, a = 4$, ta chọn (2; 1), B(4; –1).

Do I là tâm của hình chữ nhật nên C(7;2), D(5;4).

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: A(2;1), B(4;–1), C(7;2), D(5;4).

Bài 1.4.40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, phương trình $AC: x+3y=0$, $AD: x-y+4=0$, đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$

Phương trình $AB: x+y+2=0$.

Gọi $D(d;d+4)$, suy ra phương trình $CD: x+y-2d-4=0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y-2d-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3d+6 \\ y=-d-2 \end{cases}$

Suy ra $C(3d+6;-d-2)$.

Phương trình $BC: x-y-4d-8=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4d-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2d+3 \\ y=-2d-5 \end{cases}$

Suy ra $B(2d+3;-2d-5)$

Do đó: $\overrightarrow{BD} = (-d-3;3d+9)$ nên phương trình BD là: $3x+y-4d-4=0$

Mà $M \in BD$ nên $-4d-4=0 \Leftrightarrow d=-1$.

Vậy A(–3;1), B(1;–3), C(3;–1), D(–1;3).

Bài 1.4.41. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có $\cos\widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, O là giao điểm của hai đường chéo. Đường thẳng AB, BC lần lượt đi qua các điểm $M(1;1)$, $N(0;4)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết B có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\cos\widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = 2BC \Rightarrow d(O,BC) = 2d(O,AB)$ (*).

Giả sử phương trình AB có dạng: $a(x-1)+b(y-1)=0$

Khi đó, phương trình $BC: ax+b(y-4)=0$

Nên (*) $\Leftrightarrow \frac{|4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 2|b| = |a+b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-3b \end{array}\right.$.

- Với $a=-3b \Rightarrow AB: x-3y+2=0$, $BC: 3x+y-4=0$

  Suy ra $B: \begin{cases} x-3y+2=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ trường hợp này loại do $x_B > 0$.

- Với $a=b \Rightarrow AB: x+y-2=0$, $BC: x-y+4=0$

  Suy ra $B: \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(-1;3) \Rightarrow D(1;-3)$.

Phương trình $AD: x-y-4=0 \Rightarrow A(3;-1) \Rightarrow C(-3;1)$.

Vậy A(3;–1), B(–1;3), C(–3;1), D(1;–3).

Bài 1.4.42. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 4x+y-9=0$, $d_2: 2x-y+6=0$, $d_3: x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết hình thoi ABCD có diện tích bằng 15, các đỉnh A, C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

Hướng dẫn giải.

Vì $BD \perp AC$ nên phương trình $BD: y=-x+m$

$B = BD \cap d_1$, suy ra $B\begin{cases} y=-x+m \\ 4x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{9-m}{3};\frac{4m-9}{3}\right)$

Tương tự $D = BD \cap d_2 \Rightarrow D\left(\frac{m-6}{3};\frac{2m+6}{3}\right)$.

Suy ra tọa độ trung điểm của BD là $I\left(\frac{1}{2};\frac{2m-1}{2}\right)$.

Vì $I \in AC \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2m-1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Suy ra $B(2;1), D(-1;4), I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Ta có: $S_{\Delta BAD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Rightarrow AI=\frac{15}{BD}=\frac{5}{\sqrt{2}}\Rightarrow AI^2=\frac{25}{2}$

Mà $A\in d_3\Rightarrow A(a;a+2)\Rightarrow AI^2=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$

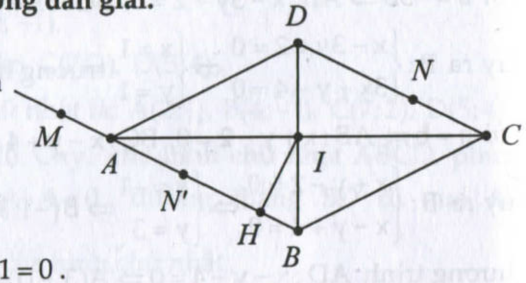
nên ta có: $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow a=3,a=-2$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi là:

$A(3;5),B(2;1),C(-2;0),D(-1;4)$ hoặc $A(-2;0),B(2;1),C(3;5),D(-1;4)$.

Bài 1.4.43. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB; điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải.



Gọi N' là điểm đối xứng của N qua tâm I thì ta có $N'(4;-5)$ và N' thuộc cạnh AB.

Suy ra $\overrightarrow{MN'}=\left(4;-\frac{16}{3}\right)$

nên phương trình $AB:4x+3y-1=0$.

Vì $AC=2BD$ nên $AI=2BI$. Gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có:

$$IH=d(I,AB)=\frac{|8+3-1|}{5}=2 \text{ và } \frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{5}{4IB^2}\Rightarrow IB=\frac{IH\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

Mặt khác $B\in AB\Rightarrow B(b;\frac{1-4b}{3}),b>0\Rightarrow IB^2=(b-2)^2+\left(\frac{4b+2}{3}\right)^2=5\Leftrightarrow b=1$

Vậy $B(1;-1)$.

Bài 1.4.43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình đường thẳng AC là $x+7y-31=0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1:x+y-8=0$, $d_2:x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải.

Ta có $B\in d_1\Rightarrow B(b;8-b)$, $D\in d_2\Rightarrow D(2d-3;d)$. Suy ra

$\overrightarrow{BD}=(-b+2d-3;b+d-8)$ và trung điểm BD $I\left(\frac{b+2d-3}{2};\frac{-b+d+8}{2}\right)$

Theo tính chất hình thói, suy ra

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{u_{AC}}=0\\ I\in AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8b+13d-13=0\\ -2b+3d-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ d=1\end{cases}$$

Suy ra $B(0;8)$, $D(-1;1)$, $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Ta có: $A\in AC:x+7y-31=0\Rightarrow A(-7a+31;a)$

Mặt khác $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD\Rightarrow AC=\frac{2S}{BD}=15\sqrt{2}\Rightarrow IA=\frac{15}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow\left(-7a+\frac{63}{2}\right)^2+\left(a-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{225}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\Rightarrow A(10;3)\\ a=6\Rightarrow A(-11;6)\end{array}\right.$$

Vì $x_A<0$ nên ta có $A(-11;6)\Rightarrow C(10;3)$.

Bài 1.4.45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AC:3x+5y-13=0$, đường thẳng AD đi qua $E(1;4)$ và $5AB=3AD$. Tìm tọa độ A.

Hướng dẫn giải.

Đặt $AB=3m\Rightarrow AD=5m$

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=m\sqrt{34}\Rightarrow\cos\widehat{DAC}=\frac{CD}{AC}=\frac{3}{\sqrt{34}}$.

Giả sử $\vec{n}=(a;b)$ là một VTPT của đường thẳng AD. Ta có:

$$\cos\widehat{DAC}=\frac{|3a+5b|}{\sqrt{34(a^2+b^2)}}=\frac{3}{\sqrt{34}}\Leftrightarrow|3a+5b|=3\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow(3a+5b)^2=9(a^2+b^2)\Leftrightarrow16b^2+30ab=0\Leftrightarrow b=0,b=-\frac{15}{8}a.$$

- Với $b=0$, suy ra phương trình $AD:x-1=0$

  nên $A:\begin{cases}x-1=0\\ 3x+5y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$.

- Với $b=-\frac{15}{8}a$, ta chọn $a=8,b=-15$. Phương trình $AD:8x-15y+52=0$

Suy ra $A:\begin{cases}8x-15y+52=0\\ 3x+5y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{13}{17}\\ y=\frac{52}{17}\end{cases}\Rightarrow A\left(-\frac{13}{17};\frac{52}{17}\right)$.

CHƯƠNG 2.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

I. Quan hệ song song

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian:

Trong không gian cho hai đường thẳng Δ và Δ'.

- Nếu Δ và Δ' cùng thuộc một mặt phẳng khi đó giữa Δ và Δ' có ba vị trí tương đối là song song, trùng nhau, cắt nhau.
- Nếu không có mặt phẳng nào đi qua Δ và Δ' thì ta gọi hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau.

2. Các tính chất:

Định lí 1: Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đôi một song song hoặc chúng đồng quy.

Định lí 2: Nếu hai mp phân biệt chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của chúng nếu có sẽ song song với hai đường thẳng đó.

3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

a. **Định nghĩa:** Đường thẳng $a\,//(P)$ khi chúng không có điểm chung

b. **Các tính chất**

- *Định lí 1:* Nếu đường thẳng a không nằm trong (P) và a song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P).

  Chú ý: Từ định lí này ta rút ra được phương pháp để chứng minh đường thẳng a song song với $mp(P)$ ta chỉ cần chứng minh a song song với một đường thẳng nằm trong $mp(P)$.

- *Định lí 2:* Nếu đường thẳng $a\,//(P)$ thì mọi mp đi qua a sẽ cắt (P) theo một giao tuyến song song với a.

  Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng nếu có sẽ song song với đường thẳng đó.

  Chú ý: Định lí 2 và hệ quả giúp chúng ta trong việc tìm giao tuyến của hai mặt phẳng mà trong đó có ít nhất một mp song song với một đường thẳng cho trước.

- *Định lí 3:* Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó luôn tồn tại duy nhất một mp chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

- *Định lí 4: (Định lí Talet trong không gian)*

  Điều kiện cần và đủ để các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 cùng song song với một mặt phẳng là $\frac{BA}{BC}=\frac{B_1A_1}{B_1C_1}$, trong đó bộ ba điểm (A, B, C) và (A_1, B_1, C_1) lần lượt thuộc hai đường thẳng chéo nhau a và b.

4. Hai mặt phẳng song song

a. **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung

b. **Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song**

- *Định lí 1:* Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mp(Q) thì (P)//(Q)

c. **Các tính chất:**

- *Tính chất 1:* Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng , có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

  Hệ quả 1: Nếu đường thẳng $a//(P)$ thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng (Q) đi qua a và song song với $mp(P)$.

  Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

  Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

II. Quan hệ vuông góc

1. Véc tơ trong không gian

- Véc tơ trong không gian và các phép toán được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.
- Ba véc tơ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Cho $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

  Khi đó $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n \in \mathbb{R} : \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

  Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

  Khi đó: $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0$.

- Cho ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khi đó với mọi véc tơ $\vec{d}$ trong không gian, ta luôn có sự phân tích: $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

2. Hai đường thẳng vuông góc

a) Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau:

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau, khi đó chúng sẽ chia mặt phẳng thành bốn miền góc. Góc nhọn trong bốn góc đó gọi là góc giữa hai đường thẳng a và b. Kí hiệu: $\widehat{(a,b)}$.

b) Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Từ một điểm O ta dựng các đường thẳng a' và b' lần lượt song song với a và b. Khi đó góc giữa hai đường thẳng a' và b' gọi là góc giữa hai đường thẳng a và b.

Chú ý: Nếu hai đường thẳng a,b lần lượt có $\vec{u},\vec{v}$ là véc tơ chỉ phương thì

$\cos\widehat{(a,b)} = \left|\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\right|$.

c) Hai đường thẳng vuông góc

* Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Kí hiệu: $a \perp b$.

* Nếu u,v là VTCP của hai đường thẳng a,b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa: Đường thẳng a gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu a vuông với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

Tính chất:

- Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).
- Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng d đi qua một điểm O và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.
- Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Điều kiện cần và đủ để a vuông góc với b là b vuông góc với hình chiếu a′ của a lên (P) (Định lí ba đường vuông góc).

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P)

- Nếu $a \perp (P)$ thì ta nói góc giữa a và (P) bằng 90^0
- Nếu a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a′ của a lên (P) gọi là góc giữa a và (P).

4. Hai mặt phẳng vuông góc

a) Góc giữa hai mặt phẳng:

* **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

* **Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng.**

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Dựng một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ, cắt hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a,b. Khi đó góc giữa a và b chính là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

* **Công thức hình chiếu.**

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H′ của H lên mặt phẳng (P′) thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P′).

b) Hai mặt phẳng vuông góc

* **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

* **Tính chất**

- Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

III. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng Δ và điểm M. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ. Khi đó độ dài đoạn MH là khoảng cách từ M đến Δ.

Để tính khoảng cách này ta gắn MH vào một tam giác nào đó rồi sử dụng những kết quả của hình học phẳng để tính MH.

2. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:

Cho *mp(P)* và điểm *M* nằm ngoài *mp(P)*. Gọi *H* là hình chiếu của *M* lên *mp(P)*, khi đó *MH* là khoảng cách từ *M* đến *(P)*.

3. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng mang yếu tố song song

a) Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mp song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này đến mp.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc mp này đến mp kia.

4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau chính là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Do đó để tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta cần tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

b) Ngoài ra nếu có một mp chứa đường thẳng này song song với đường thẳng kia thì khoảng cách giữa hai đường thẳng đó chính bằng khoảng cách từ đường thẳng song song đó đến mp nói trên.

IV. Thể tích khối đa diện

1. Công thức tính thể tích

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=\frac{1}{3}Bh$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=Bh$.
- Thể tích của khối hộp có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=Bh$.
- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V=abc$.
- Thể tích khối lập phương : $V=a^3$.
- Tỉ số thể tích: Nếu A',B',C' thuộc các cạnh SA, SB, SC của hình chóp S.ABC thì : $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SA.SC}$.

V. Mặt tròn xoay – Mặt cầu

1. Mặt nón – hình nón – khối nón

a. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l cắt nhau tại O và tạo với nhau một góc α. Khi cho mặt phẳng (P) quay quanh đường thẳng Δ, hình tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng l gọi là mặt nón tròn xoay hay còn gọi là mặt nón

* Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón .

* Đường thẳng l gọi là đường sinh của mặt nón.

* Giao điểm O của Δ và l gọi đỉnh của mặt nón.

* Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và l khi đó 2α gọi là góc ở đỉnh.

b. Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi tam giác vuông OAB quay quanh trục là cạnh góc vuông OA

* $OB=l$ là đường sinh hình nón .

* $AB=R$ gọi là bán kính hình nón.

* $OA=h$ là chiều cao hình nón .

c. Hình nón với phần không gian bên trong gọi là khối nón.

d. Công thức tính diện tích và thể tích.

* Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq}=\pi Rl$

* Diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp}=S_{xq}+S_d=\pi R(l+R)$.

* Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

2. Mặt trụ - hình trụ - khối trụ

a. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng l và Δ song song với nhau và cách nhau một khoảng R. Khi quay (P) quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi mà mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

* Đường thẳng Δ là trục của mặt trụ.

* Đường thẳng *l* là gọi là đường sinh của mặt trụ.

* Khoảng cách giữa hai đường sinh *l* và trục Δ gọi là bán kính của mặt trụ.

b. Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng song song phân biệt và vuông góc với trục mặt trụ cùng với hai hình tròn thiết diện được gọi là hình trụ.

* Hai hình tròn $(O;R),(O';R)$ là hai đáy của hình trụ .

* Đoạn thẳng *OO′* là trục của hình trụ , và cũng là chiều cao của hình trụ.

* Bán kính *R* của mặt trụ là bán kính hình trụ.

c. Hình trụ với phần không gian bên trong gọi là khối trụ .

d. Công thức tính diện tích và thể tích hình trụ .

Một hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao *h*.

* Diện tích mặt xung quanh của hình trụ $S_{xq}=2\pi Rh$.

* Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp}=S_{sq}+2.S_d=2\pi R(R+h)$.

* Thể tích khối trụ : $V=\pi R^2h$.

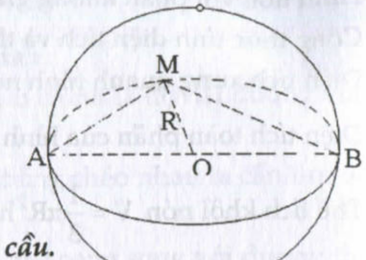
3. Mặt cầu

a. Khái niệm mặt cầu.

- Mặt cầu tâm O bán kính R ($S(O,R)$) là tập hợp các điểm *M* trong không gian thỏa mãn $S(O,R)=\{M\,|\,OM=R\}$.
- Nếu AB là đường kính mặt cầu $S(O,R)$ thì với mọi điểm M thuộc mặt cầu (trừ A và B) thì $\widehat{AMB}=90^0$.
- Ngược lại với mọi điểm M nằm trong không gian thỏa mãn $\widehat{AMB}=90^0$ thì điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB.

b. Vị trí tương đối của một điểm với mặt cầu.

Cho mặt cầu S(O,R) và một điểm A bất kì trong không gian.



- Nếu OA > R thì A ở ngoài mặt cầu
- Nếu OA = R thì A ở trên mặt cầu
- Nếu OA < R thì A ở trong mặt cầu

c. Vị trí tương đối của một hình phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu S(O,R) và một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

- Nếu OH > R thì (P) không cắt mặt cầu
- Nếu OH = R thì (P) và (S) có một điểm chúng duy nhất là H.

Khi đó ta nói: (P) tiếp xúc với mặt cầu và (P) gọi là mặt phẳng tiếp diện, H gọi là tiếp điểm.

- Nếu OH < R thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-OH^2}$.

Nếu O nằm trên (P) thì (C) gọi là đường tròn lớn và có bán kính R.

d. Vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu S(O,R) và một đường d bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên d.

- Nếu OH > R thì d và mặt cầu không có điểm chung.
- Nếu OH = R thì d và mặt cầu (S) có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói d tiếp xúc với mặt cầu và d gọi là tiếp tuyến cảu mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu HO < R thì d và mặt cầu có đúng hai điểm chung. Khi đó ta nói d cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

e. Mặt cầu ngoại tiếp và hình cầu nội tiếp hình đa diện.

- Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện.
- Mặt cầu nội tiếp hình đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.

f. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Diện tích hình cầu bán kính R: $S=4\pi R^2$

Thể tích khối cầu bán kính R: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

§ 1. CÁC BÀI TOÁN VỀ GIAO ĐIỂM, GIAO TUYẾN

1. Giao tuyến của hai mặt phẳng

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta có các cách sau:

Cách 1: Tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.

Cách 2: Tìm một điểm chung và phương của giao tuyến

- Nếu $\begin{cases}(\alpha)//a\\(\beta)//a\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=b//a$
- Nếu $\begin{cases}a//(\alpha)\\a\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=b//a$
- Nếu $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\alpha)\cap(\gamma)=a\end{cases}\Rightarrow(\beta)\cap(\gamma)=b//a$
- Nếu $\begin{cases}a\perp(\alpha)\\a\subset(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=b\perp a$.

Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau:

Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M=a\cap b$ chính là điểm chung của (α) và (β).

2. Giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng

Để tìm giao điểm của đường thẳng a với (α) ta thực hiện các bước sau

- Tìm một mp(β) chứa a sao cho giao tuyến $b=(\alpha)\cap(\beta)$ dễ tìm
- Tìm giao điểm của $A=a\cap b$

Khi đó $A=a\cap(\alpha)$.

3. Thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng.

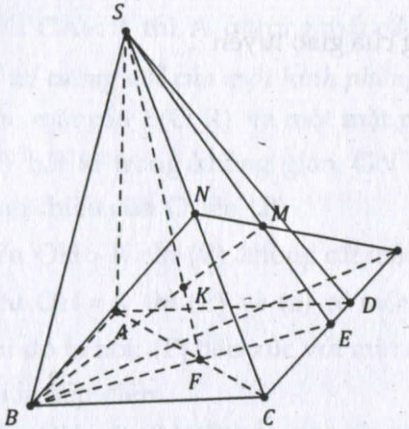
Để tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng, ta đi tìm giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt của hình chóp. Các **đoạn giao tuyến** tạo nên một đa giác. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm.

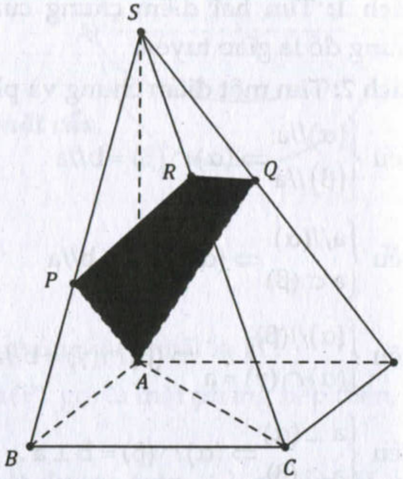
Ví dụ 2.1.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. M là một điểm nằm trong tam giác SCD, N là trung điểm SC.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD) với (BMN) biết MN không song song với CD
2. Tìm giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).

3. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC.

Lời giải.





1. Hai mặt phẳng (ABCD) và (BMN) có B là điểm chung thứ nhất
   Trong mặt phẳng (ABCD) hai đường thẳng CD và MN cắt nhau tại I
   Ta có I là điểm chúng thứ hai của hai mặt phẳng (ABCD) và (BMN).
   Vậy BI là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD) và (BMN).
2. Trong mặt phẳng (SCD) hai đường thẳng SM và CD cắt nhau tại E
   Trong mặt phẳng (ABCD) hai đường thẳng AC và BE cắt nhau tại F.
   Khi đó ta có SF là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) với (SAC).
   Trong mặt phẳng (SBE) hai đường thẳng SF và BM cắt nhau tại K.
   Ta có: K là giao điểm của BM với (SAC).
3. Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại P, R, Q. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác APRQ.
   Vì $(\alpha)\perp SC \Rightarrow SC\perp AP$
   Mặt khác: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SAB) \Rightarrow BC\perp AP$
   Nên ta suy ra $AP\perp (SBC)\Rightarrow AP\perp SB$.
   Tương tự ta cũng có $BQ\perp SD$.
   Dễ thấy các tam giác APR và AQR là các tam giác vuông tại P và Q.
   Do đó $S_{APRQ}=S_{\Delta APR}+S_{\Delta AQR}=\frac{1}{2}(AP.PR+AQ.QR)$

Áp dụng công thức đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{AP^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow AP=\frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{AQ^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{7}{12a^2}\Rightarrow AQ=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

$$\frac{1}{AR^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}\Rightarrow AR=a\sqrt{2}$$

Suy ra: $PR=\sqrt{AR^2-AP^2}=\frac{a\sqrt{30}}{5}$, $QR=\sqrt{AR^2-AQ^2}=\frac{a\sqrt{14}}{7}$.

Vậy diện tích thiết diện cần tính là: $S_{APRQ}=\frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$ (đvdt).

Ví dụ 2.1.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, BC, CD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

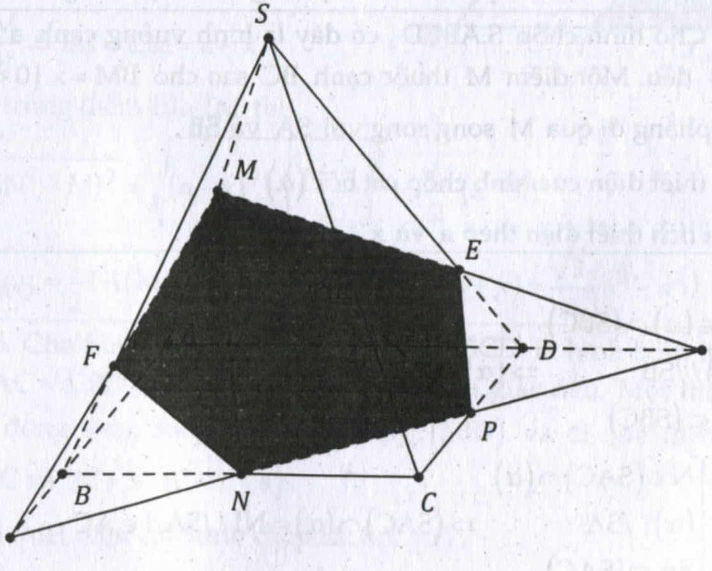
Gọi I, J lần lượt là giao điểm của NP với AB và AD. Khi đó

$(MNP)\cap(ABCD)\equiv NP$, $(MNP)\cap(SAD)=MJ$, $(MNP)\cap(SAB)=MI$

Đường thẳng $MJ\cap SD=\{E\}$, $MI\cap SB=\{F\}$

Khi đó: $(MPN)\cap(SBC)=NF$, $(MNP)\cap(SCD)=EP$.

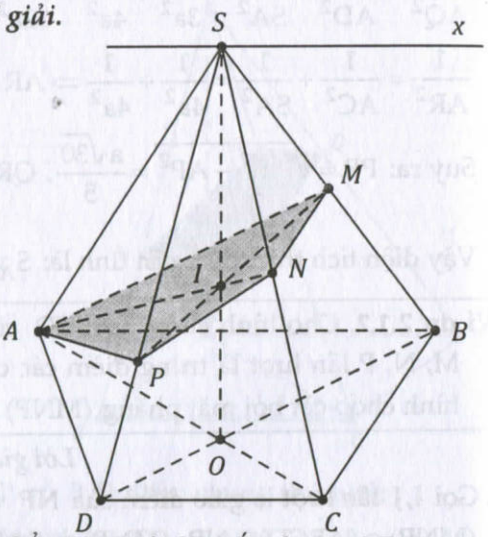
Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác MEPNF.



Ví dụ 2.1.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SC.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
2. Tìm thiết diện của hình chóp cắt ởi mặt phẳng (AMN).

Lời giải.



1. Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có S là điểm chung và AB//CD

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx song song với AB.

2. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Suy ra SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng SO và AN cắt nhau tại I.

Trong mặt phẳng (SBD) hai đường thẳng MI và SD cắt nhau tại P.

Khi đó:

$(AMN)\cap(SAB)=AM,\ (AMN)\cap(SBC)=MN,$

$(AMN)\cap(SCD)=NP,\ (AMN)\cap(SDA)=PA$

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác AMNP.

Ví dụ 2.1.4. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x\ (0<x<a)$, (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB.

1) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α)

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

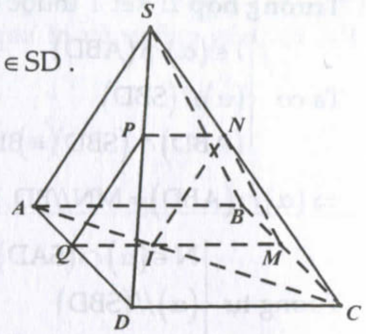
Lời giải.

1) Ta có $\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(SBC)\\ (\alpha)//SB\\ SB\subset(SBC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SBC)=MN//SB,\ N\in SC.$

Tương tự $\begin{cases} N\in(SAC)\cap(\alpha)\\ (\alpha)//SA\\ SA\subset(SAC)\end{cases} \Rightarrow (SAC)\cap(\alpha)=NI//SA, I\in AC$

Trong (ABCD) gọi $Q = MI\cap AD$, thì ta có

$\begin{cases} Q\in(SAD)\cap(\alpha)\\ (\alpha)//SA\\ SA\subset(SAD)\end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(\alpha)=QP//SA, P\in SD.$



Thiết diện là tứ giác MNPQ.

b) Do $MN//SB \Rightarrow \dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CN}{CS}$ (1)

Lại có $IN//SA \Rightarrow \dfrac{CI}{CA}=\dfrac{CN}{CS}$ (2).

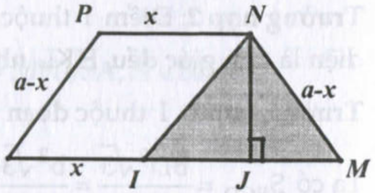
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CI}{CA} \Rightarrow IM//AB$ mà $AB//CD \Rightarrow IM//CD$.

Ba mặt phẳng (α), (ABCD) và (SCD) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MQ, CD, NP với $MQ//CD \Rightarrow MQ//NP$.

Vậy MNPQ là hình thang.

Ta có $\dfrac{MN}{SB}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{PQ}{SA}$, mà $SA=SB=a \Rightarrow MN=PQ$.

Do đó MNPQ là hình thang cân.



Từ $\dfrac{MN}{SA}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MN=a-x$,

$\dfrac{PN}{DC}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{BM}{BC} \Rightarrow PN=BM=x$,

$\dfrac{IM}{AB}=\dfrac{CM}{CB} \Rightarrow IM=CM=a-x$

Gọi J là trung điểm của IM thì

$$NJ=\sqrt{MN^2-MJ^2}=\sqrt{(a-x)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$$

Vậy $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}NJ(MQ+NP)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(a+x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-x^2\right)$.

Ví dụ 2.1.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O có AC = a, BD = b. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và AI = x $(0<x<a)$.

1) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

2) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.

Lời giải.

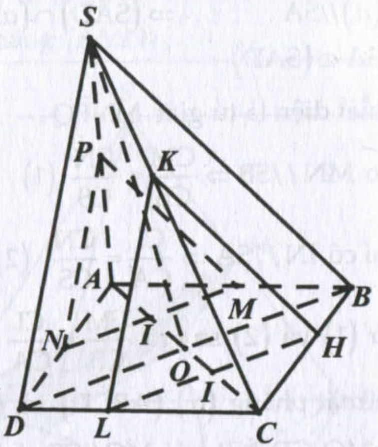
1) **Trường hợp 1**: Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN // BD, I \in MN$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) // (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP // SD, P \in SN$.



Thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \Rightarrow MP // SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases}$.

Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2: Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như (hv).

b) **Trường hợp 1**: I thuộc đoạn OA

Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN // BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2: I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$$S_{MNP} = \left(\frac{HL}{BD}\right)^2 S_{BCD} = [\frac{2(a-x)}{a}]^2 \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Vậy $S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OA) \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OC) \end{cases}$.

Ví dụ 2.1.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a, AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Đặt $AM = x(0 < x < a)$.

1) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.

1) Ta có $\begin{cases} B \notin (\alpha) \\ BC \perp AB \Rightarrow BC // (\alpha) \\ (\alpha) \perp AB \end{cases}$.

Tương tự $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ SA \perp AB \Rightarrow SA // (\alpha) \\ (\alpha) \perp AB \end{cases}$.

Do $\begin{cases} M \in (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ // BC, Q \in CD \\ BC // (\alpha) \end{cases}$.

Tương tự $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \qquad \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN // SA, N \in SB \\ SA // (\alpha) \end{cases}$.

$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \qquad \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP // BC, P \in SC \\ BC // (\alpha) \end{cases}$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

2) Ta có $\begin{cases} MQ / / BC \\ NP / / BC \end{cases} \Rightarrow MQ / / NP$ nên tứ giác MNPQ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} MQ / / AB \\ MN / / SA \Rightarrow MQ \perp MN \\ SA \perp AB \end{cases}$ suy ra thiết diện là một hình thang vuông tại M và N.

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP)MN$

Gọi I là trung điểm của AD và $K = CI \cap MQ$.

Do MN//SA nên $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA}$

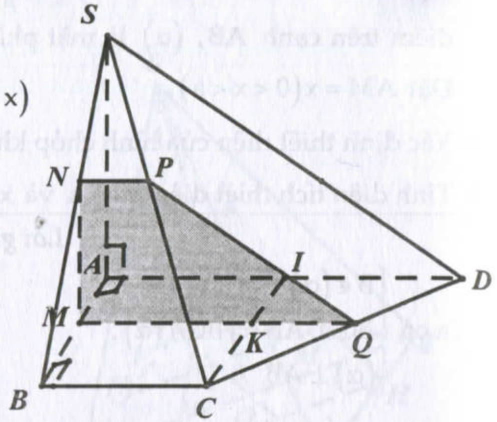
$\Rightarrow MN = \frac{BM.SA}{BA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB}$

$\Rightarrow NP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$.

Xét trong hình thang ABCD ta có :

$\frac{KQ}{ID} = \frac{CK}{CI} = \frac{AM}{AB}$



$\Rightarrow KC = \frac{ID.BM}{BA} = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$; $MQ = MK + KQ = a + (a-x) = 2a - x$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a - x + x)2(a-x) = 2a(a-x)$.

Ví dụ 2.1.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a, AD = DC = a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

1) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp S.ABCD.
2) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Lời giải.

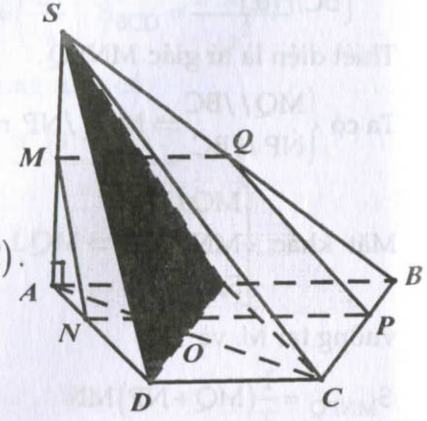
1) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì ADCE là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.

Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.



Ta có $SO = \sqrt{OA^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$BC = DE = a\sqrt{2}$, do $DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp AO$

$\Rightarrow S_{SDE} = \frac{1}{2}SO.DE = \frac{1}{2}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

2) Ta có $\begin{cases} AB \perp (SAD) \\ (\beta) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB//(\beta)$.

Vậy $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ AB//(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MQ//AB, Q \in SB$.

Tương tự, $\begin{cases} N \in (\beta) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ AB//(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (ABCD) = NP//AB, P \in BC$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Do $\begin{cases} NP//AB \\ MQ//AB \end{cases} \Rightarrow NP//MQ$ (1).

Lại có $\begin{cases} MN \subset (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN$ (2)

Từ (1),(2) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(NP + MQ)MN$.

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$, $MQ = \frac{1}{2}AB = a$

$\frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} \Rightarrow NP = \frac{AB.DN}{DA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

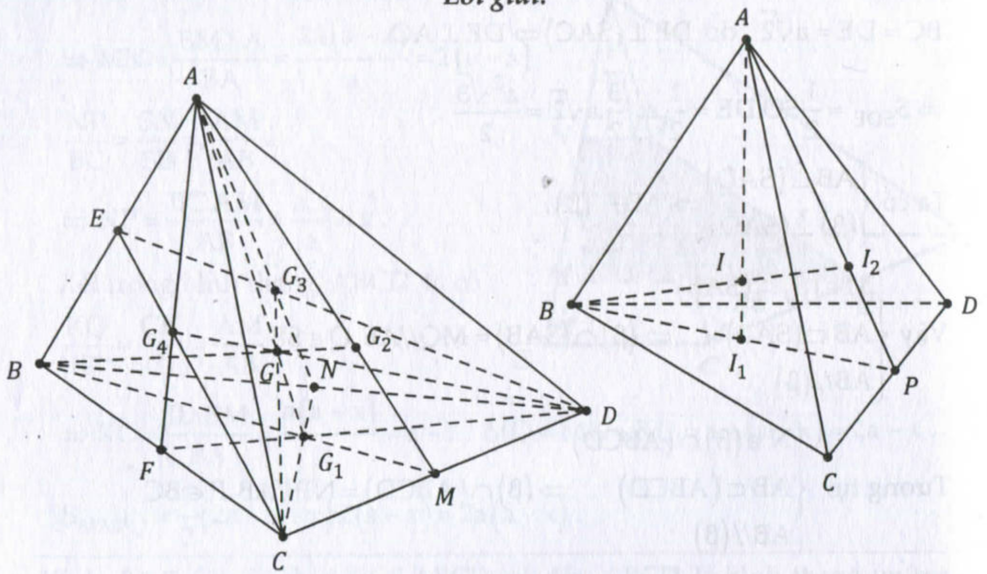
Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2(a-x) + a)\frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2} = \frac{(3a-x)\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$.

Ví dụ 2.1.8. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 và I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng:

1) Các đường thẳng AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 đồng quy.

2) Nếu $AB.CD = AC.BD = AD.BC$ thì các đường thẳng AI_1, BI_2, CI_3, DI_4 đồng quy.

Lời giải.



1) Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DB.

Vì AG_1 và DG_4 cùng nằm trong mặt phẳng (SDF) nên chúng cắt nhau tại G

Ta có: $G \in GG_4 \Rightarrow G \cap (CED)$ và $G \in AG_1 \Rightarrow G \in (SCN)$

Suy ra $G \in (CED) \cap (SCN) = CG_3$. Do đó CG_3 đi qua G.

Chứng minh tương tự, BG_2 đi qua G.

Vậy các đường thẳng AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 đồng quy tại G.

2) Gọi P, P' lần lượt là chân đường phân giác trong góc A và B của tam giác ACD và BCD.

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{AD}{AC}; \dfrac{P'D}{P'C} = \dfrac{BD}{BC}$.

Mặt khác $AD.BC = BD.AC \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ nên suy ra $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{P'D}{P'C} \Rightarrow P \equiv P'$

Hay hai đường thẳng AI_1, BI_2 cắt nhau tại I nằm trong mặt phẳng (ABP).

Tương tự, ta chứng minh được các đường thẳng CI_3, DI_4 cũng đi qua điểm I.

Vậy các đường thẳng AI_1, BI_2, CI_3, DI_4 đồng quy tại I.

---

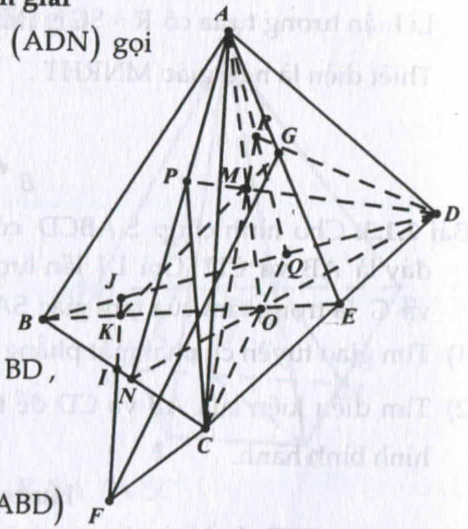
3) Bài tập vận dụng

Bài 2.1.1. Cho tứ diện ABCD, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO.

1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC), (ABD).

2) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Hướng dẫn giải



1) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi

$$P = DM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC)$

$\Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$$

D là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

2) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$; trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Có $\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$, $\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD)$. Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

Bài 2.1.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của MN với BA, BC, BD.

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H = KP \cap SB$.

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T = EH \cap SA$

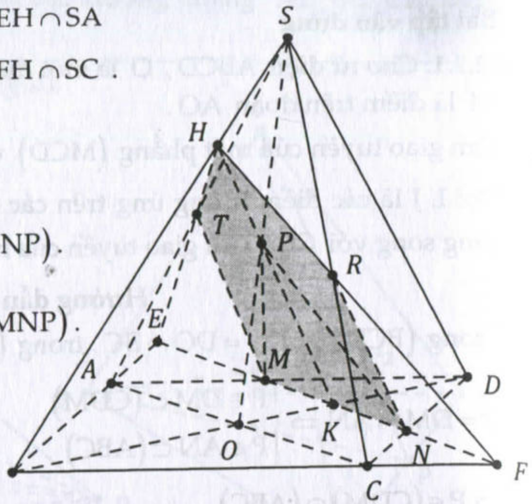
Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R = FH \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP)$,

$\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP)$.

Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác MNRHT.

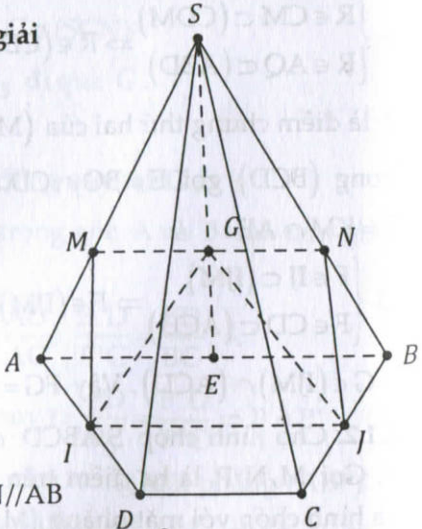


Bài 2.1.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB.

1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

2) Tìm điều kiện của AB và CD để thiết diện của (IJG) và hình chóp là một hình bình hành.

Hướng dẫn giải



1) Ta có ABCD là hình thang và I, J là trung điểm của AD, BC nên IJ//AB.

Vậy $\begin{cases} G \in (SAB) \cap (IJG) \\ AB \subset (SAB) \\ IJ \subset (IJG) \\ AB // IJ \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (IJG) = MN // IJ // AB$

với $M \in SA, N \in SB$.

2) Dễ thấy thiết diện là tứ giác MNJI.

Do G là trọng tâm tam giác SAB và MN//AB

nên $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$ (E là trung điểm của AB) $\Rightarrow MN = \dfrac{2}{3}AB$.

Lại có $IJ = \dfrac{1}{2}(AB + CD)$.

Vì MN//IJ nên MNIJ là hình thang, do đó MNIJ là hình bình hành khi MN = IJ.

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

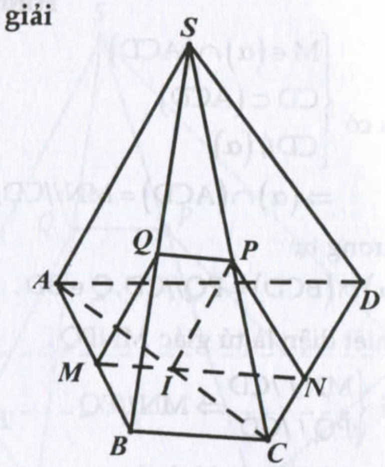
Vậy thiết diện là hình bình hành khi $AB = 3CD$.

Bài 2.1.4. Cho hình chóp S.ABCD, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

1) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi (α).

2) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

Hướng dẫn giải



1) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MQ // SA, Q \in SB$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap MN$

$\begin{cases} I \in MN \subset (\alpha) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SAC)$

Vậy $\begin{cases} I \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = IP // SA, P \in SC$

Từ đó ta có $(\alpha) \cap (SBC) = PQ, (\alpha) \cap (SAD) = NP$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

2) Tứ giác MNPQ là một hình thang khi MN//PQ hoặc MQ//NP.

Trường hợp 1:

Nếu MQ//NP thì ta có $\begin{cases} MQ // NP \\ MQ // SA \end{cases} \Rightarrow SA // NP$

mà $NP \subset (SCD) \Rightarrow SA // (SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2:

Nếu MN//PQ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD), (\alpha), (SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, BC, PQ nên MN//BC.

Đảo lại nếu MN//BC thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$

nên tứ giác MNPQ là hình thang.

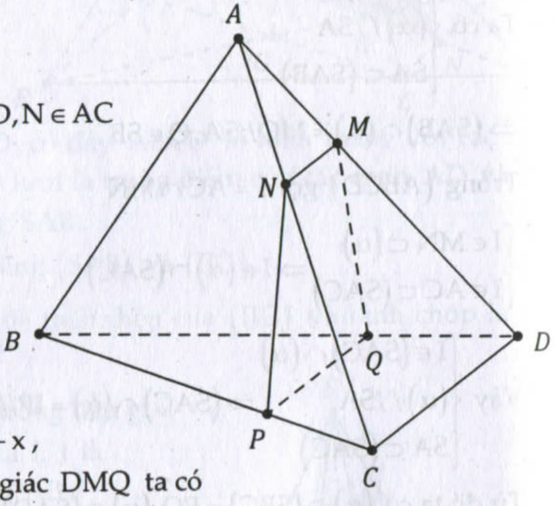
Vậy để tứ giác MNPQ là hình thang thì điều kiện là $MN//BC$.

Bài 2.1.5. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho $MA = PC = x$, $(0 < x < a)$. Một mặt phẳng qua MP song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

1) Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

2) Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



1) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ACD) \\ CD \subset (ACD) \\ CD // (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MN // CD, N \in AC$

Tương tự

$(\alpha) \cap (BCD) = PQ // CD, Q \in BD$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

Vì $\begin{cases} MN // CD \\ PQ // CD \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$

nên MNPQ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = CP = x$, $DM = a - x$,

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác DMQ ta có

$MQ^2 = DM^2 + DQ^2 - 2DM.DQ\cos 60^0$

$\Rightarrow MQ^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\frac{1}{2} = 3x^2 - 3ax + a^2$

$\Rightarrow MQ = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$.

Tương tự ta cũng tính được $NP = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2} \Rightarrow MP = NQ$.

Vậy MNPQ là hình thăng cân.

Dễ thấy $MN = x, PQ = a - x$, đường cao hình thang $h = \frac{1}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}[a + (a-x)].\frac{1}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2}$.

2) Ta có $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \ge \frac{a^2}{2}$

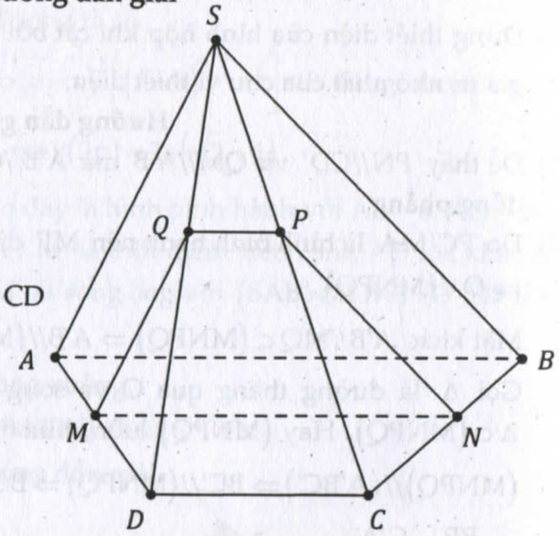
Vậy $\min S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Bài 2.1.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AB//CD), $AB = 3a, AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

1) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

2) Đặt $x = AM$ $(0 < x < a)$. Tính x để MNPQ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

Hướng dẫn giải



1) Do $\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \end{cases}$

$\Rightarrow MN // AB$ (1).

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases}$

$\Rightarrow PQ // CD$ (2).

Lại có $AB // CD$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có

$MN // AB // CD // PQ$ nên MNPQ là hình thang (*)

Dễ thấy rằng $MQ // SA$, $NP // SB$ do đó $\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}; \frac{NP}{SB} = \frac{CN}{CB}$

Mà $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$ nên $\frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SB}$.

Mặt khác ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SA = SB \Rightarrow MQ = NP$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra MNPQ là hình thang cân.

2) MNPQ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow MQ + NP = MN + PQ$

Ta có $\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x) \Rightarrow NP = 2(a-x)$

Lại có $\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$

Không khó khăn ta tính được $MN = 3a - 2x$

Do đó $MQ + NP = MN + PQ \Leftrightarrow 4(a-x) = 3a - 2x + x \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$.

Khi đó tính được $r=\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

Bài 2.1.7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M,N,P,Q sao cho $AM=C'N=C'P=AQ=x\left(0\le x\le a\right)$.

1) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.
2) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.
3) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Hướng dẫn giải

1) Dễ thấy $PN//CD'$ và $QM//A'B$ mà $A'B//C'D$ nên $PN//QM$ hay M,N,P,Q đồng phẳng.

2) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.

$\Rightarrow O\in(MNPQ)$.

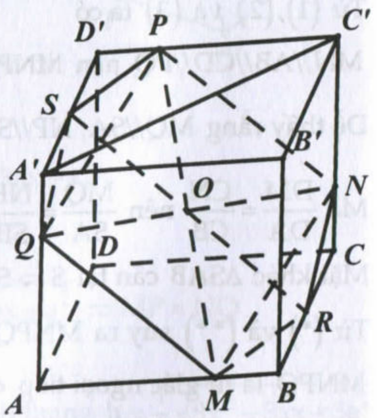
Mặt khác $A'B//MQ\subset(MNPQ)\Rightarrow A'B//(MNPQ)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta\subset(MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$(MNPQ)//(A'BC')\Rightarrow BC'//(MNPQ)\Rightarrow BC'//NR$

$\Leftrightarrow\dfrac{BR}{BC}=\dfrac{C'N}{CC'}\Rightarrow x=\dfrac{a}{2}$.

Đảo lại $x=\dfrac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ)//(A'BC')$.



3) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác MPNPSQ.

Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ=NP, MR=NS, RN=SQ$

do đó chu vi thiết diện là $2p=2\left(RM+MQ+QS\right)$.

Ta có $MR=QS=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\left(a-x\right)^2}$, $QM=x\sqrt{2}$

Vậy $2p=2\left(x\sqrt{2}+2\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\left(a-x\right)^2}\right)$.

Đặt $f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+4(a-x)^2}\,;x\in[0;a]$.

Theo CauChy -SChwarz

$$\sqrt{\left(a^2+4\left(a-x\right)^2\right)\left(1^2+1^2\right)}\ge a+2\left(a-x\right)\Rightarrow\sqrt{a^2+4\left(a-x\right)^2}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3a-2x\right)$$

Nên $f(x)\ge x\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(3a-2x\right)=\dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{a}{2}$

Vậy $\min\left(2p\right)=3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

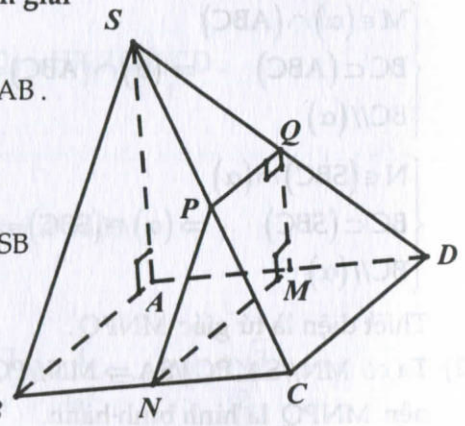
$x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+4\left(a-x\right)^2}\le\sqrt{2}a+a\Leftrightarrow\left(a-x\right)^2\left[\left(a-x\right)^2-a^2\right]\le 0$ đúng $\forall x\in\left[0;a\right]$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=a$. Vậy $\max\left(2p\right)=2a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Bài 2.1.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC, SC. SD lần lượt tại N,P,Q.

1) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.
2) Đặt $AM=x$. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

Hướng dẫn giải



1) Ta có $\begin{cases}(\alpha)//(SAB)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\Rightarrow MN//AB.\\(\alpha)\cap(ABCD)=MN\end{cases}$

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)//(SAB)\\(SBC)\cap(SAB)=SB\Rightarrow NP//SB\\(\alpha)\cap(SBC)=NP\end{cases}$

$\begin{cases}(\alpha)//(SAB)\\(SAD)\cap(SAB)=SA\Rightarrow MQ//SA\\(\alpha)\cap(SAD)=MQ\end{cases}$

Dễ thấy $MN//PQ//AB//CD$ nên MNPQ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases}MN//AB\\MQ//SA\ \Rightarrow MN\perp MQ.\\AB\perp SA\end{cases}$

Vậy MNPQ là hình thang vuông.

2) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$, $PQ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}$.

Bài 2.1.9. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x\ (0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB

1) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC với (α).

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\begin{cases}(\alpha) \perp AB \\ SA \perp AB\end{cases} \Rightarrow SA//(\alpha)$

Do đó $\begin{cases}M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA//(\alpha)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN//SA$.

Tương tự $\begin{cases}(\alpha) \perp AB \\ BC \perp AB\end{cases} \Rightarrow BC//(\alpha)$

$\begin{cases}M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ BC//(\alpha)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ//BC, Q \in AC$

$\begin{cases}N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC//(\alpha)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP//BC, P \in SC$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.

2) Ta có $MN//SA, PQ//SA \Rightarrow MN//PQ$ và $MQ//BC, NP//BC \Rightarrow MQ//NP$ nên MNPQ là hình bình hành.

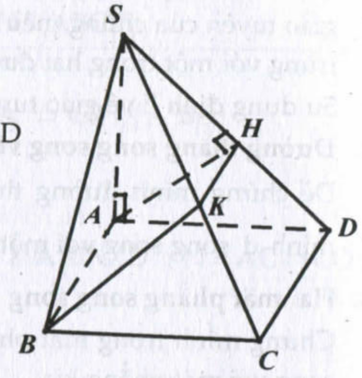
Mặt khác $\begin{cases}MN//SA \\ NP//BC \\ SA \perp BC\end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$. Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

Ta có $MQ = AM = x$, $\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{MB.SA}{AB} = \frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}(a-x)x = \sqrt{3}[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2] \le \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x = \frac{a}{2}$.

Bài 2.1.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Goi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Xác định và tính thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi (α).



Hướng dẫn giải

Kẻ $AH \perp SD$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$, lại có $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases}AH \perp SD \\ AH \perp CD\end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABH) \perp (SCD)$.

Vậy (ABH) chính là mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases}AB \subset (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ AB//CD \\ H \in (\alpha) \cap (SCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HK//AB//CD$.

Thết diện là tứ giác AHKB.

Dễ thấy AHKB là hình thang vuông tại A và H

nên $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSCD có HK//CD nên

$\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SH.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow HE = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a$.

Vậy $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AB + HK)AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{4}\right)\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

§ 2. QUAN HỆ SONG SONG

1. Hai đường thẳng song song

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể làm theo một trong các cách sau:

- Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng rồi dùng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) ta chứng minh d song song với một đường thẳng d' nằm trong (α).

3. Hai mặt phẳng song song

- Chứng minh trong mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\\ a//(\beta)\\ b//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta).$$

- Chứng minh hai mặt phẳng đó cùng song song với mặt mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases}(\alpha)//(\gamma)\\ (\beta)//(\gamma)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta).$$

4. Định lí Talet trong không gian

Định lí Ta-lét(Thales)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)//(\chi)\\ d_1\cap(\alpha)=A_1, d_1\cap(\beta)=B_1, d_1\cap(\chi)=C_1\\ d_2\cap(\alpha)=A_2, d_2\cap(\beta)=B_2, d_2\cap(\chi)=C_2\end{cases}\Rightarrow\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

Định lí Ta-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ 2.2.1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trọng tâm tam giác AA'B', N là giao điểm của AC' với mặt phẳng (CB'D'). Chứng minh rằng:

1) (A'BD)//(CB'D') 2) MN//(ABCD).

Lời giải.

1) Ta có: CDA'B' là hình bình hành nên $CB'//DA'\Rightarrow CB'//(A'BD)$

Tương tự, ta có B'D'//(A'BD).

Suy ra (CB'D')//(A'BD).

2) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy ABCD và A'B'C'D', $N=AC'\cap CO'$.

Khi đó N là giao điểm của AC' với (CB'D').

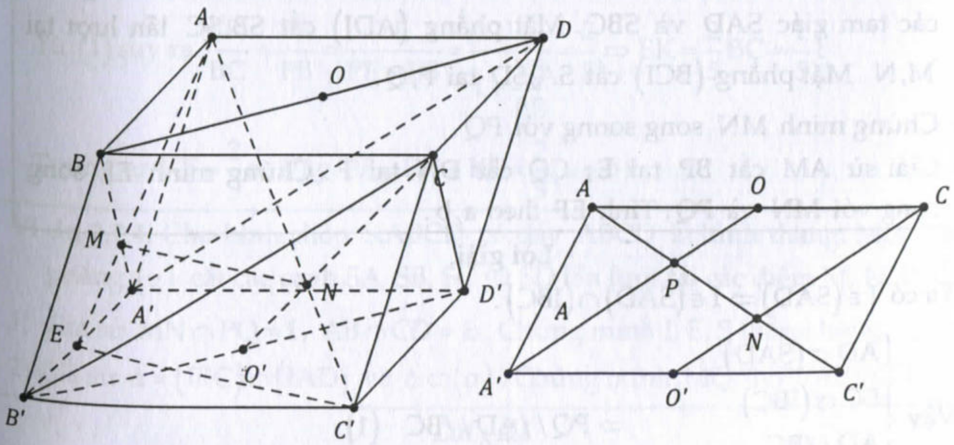
Tương tự, gọi $P=A'O\cap AC'$.

Vì O là trung điểm AC và $OP//CN\Rightarrow P$ là trung điểm AN.

Tương tự: N là trung điểm C'P. Suy ra $\frac{AN}{AC'}=\frac{2}{3}$

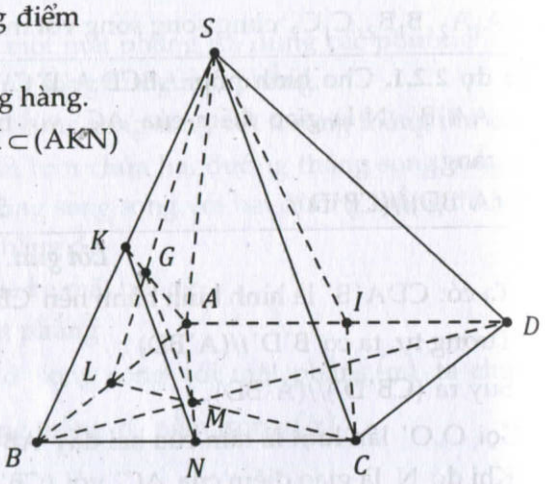
Gọi E là trung điểm cạnh A'B', suy ra $\frac{AM}{AE}=\frac{2}{3}=\frac{AN}{AC'}\Rightarrow MN//EC'$.

Suy ra MN//(A'B'C'D') hay MN//(ABCD).



Ví dụ 2.2.2. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, M là điểm thuộc đoạn BD sao cho $DM = 2BM$ và I là trung điểm cạnh AD. Chứng minh rằng $GM//(SCI)$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi N, K lần lượt là trung điểm cạnh BC, SC.

Khi đó ta có được A, M, N thẳng hàng.

Và $G \in AK \Rightarrow G \in (ANK) \Rightarrow GM \subset (AKN)$

Mặt khác, ta có:

$KN//SC \Rightarrow KN//(SCI)$,

$AN//CI \Rightarrow AN//(SCI)$

Suy ra $(AKN)//(SCI)$

$\Rightarrow MG//(SCI)$.

Cách 2. Gọi L là trung điểm cạnh AB, khi đó L, M, C thẳng hàng.

Ta có: $\dfrac{LM}{MC} = \dfrac{BM}{DM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{LM}{LC} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, G là trọng tâm tam giác SAB

nên $\dfrac{LG}{LS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{LG}{LS} = \dfrac{LM}{LC} \Rightarrow GM//SC$

Do đó $GM//(SCI)$.

Ví dụ 2.2.3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

1) Chứng minh MN song song với PQ.

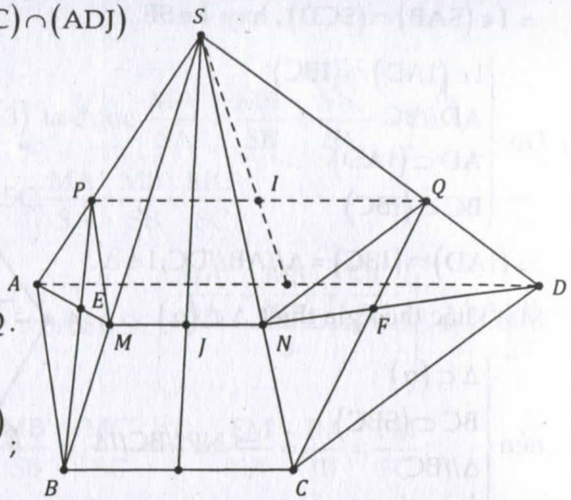
2) Giả sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a, b.

Lời giải.

1) Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD//BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ//AD//BC \quad (1)$$

Tương tự $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$



$$\text{Vậy } \begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD//BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$$

$\Rightarrow MN//AD//BC \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $MN//PQ$.

2) Ta có

$$E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases};$$

$$F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ) \end{cases}$$

Do đó $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$.

$$\text{Mà } \begin{cases} AD//BC \\ MN//PQ \end{cases} \Rightarrow EF//AD//BC//MN//PQ.$$

Tính EF: Gọi $K = CP \cap EF \Rightarrow EF = EK + KF$

Ta có $EK//BC \Rightarrow \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB}$ (1), $PM//AB \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{PM}{AB}$

Mà $\dfrac{PM}{AB} = \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{2}{3}$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PE}{PE + EB} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{EB}{PE}} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EK = \dfrac{2}{5}BC = \dfrac{2}{5}b$

Tương tự $KF = \dfrac{2}{5}a$. Vậy $EF = EK + KF = \dfrac{2}{5}(a + b)$.

Ví dụ 2.2.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC và SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q.

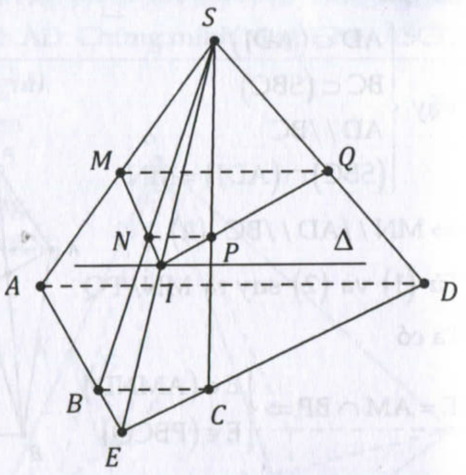
1) Giả sử $MN \cap PQ = I$, $AB \cap CD = E$. Chứng minh I, E, S thẳng hàng.

2) Giả sử $\Delta = (IBC) \cap (IAD)$ và $\Delta \subset (\alpha)$. Chứng minh $MQ//NP//AB//CD$.

Lời giải.

1) Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$, $I = MN \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MN \subset (SAB) \\ I \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAB)\cap(SCD)$, hay $I \in SE$.



2) Do $\begin{cases} I\in(IAD)\cap(IBC)\\ AD//BC\\ AD\subset(IAD)\\ BC\subset(IBC)\end{cases}$

$\Rightarrow (IAD)\cap(IBC)=\Delta//AB//DC, I\in\Delta$.

Mặt khác theo giả thiết $\Delta\subset(\alpha)$

nên $\begin{cases}\Delta\subset(\alpha)\\ BC\subset(SBC)\\ \Delta//BC\\ (\alpha)\cap(SBC)=NP\end{cases} \Rightarrow NP//BC//\Delta$

Tương tự ta cũng có $MQ//AD//\Delta$.

Vậy $MQ//NP//BC//AD//\Delta$.

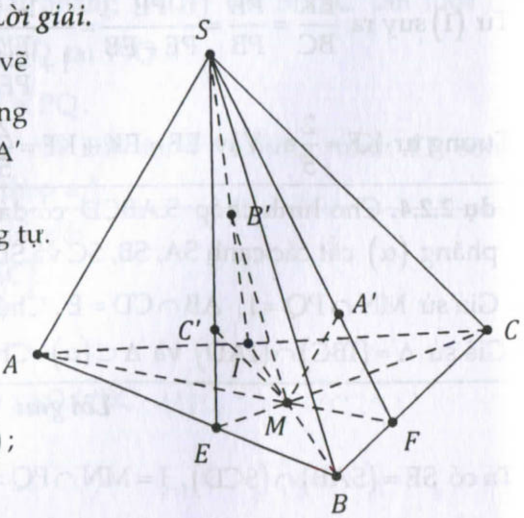
Ví dụ 2.2.5. Cho hình chóp S.ABC, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M và song song SA, SB và SC cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) lần lượt tại các điểm A', B', C'.

1) Nêu cách dựng các điểm A', B', C'.

2) Chứng minh $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi khi O di động trong tam giác ABC.

3) Xác định vị trí của điểm M để tích MA'.MB'.MC' lớn nhất.

Lời giải.



1) Gọi $E = AM\cap BC$, trong (SAE) vẽ đường thẳng đi qua M và song song với SA cắt SE tại A' thì A' là điểm cần dựng.

Các điểm B', C' được dựng tương tự.

2) Ta có MA'//SA

nên $\frac{MA'}{SA}=\frac{EM}{AE}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$ (1)

Tương tự $\frac{MB'}{SB}=\frac{IM}{IB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}$ (2);

$\frac{MC'}{SC}=\frac{FM}{FC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ (3)

Cộng các đẳng thức (1),(2),(3) ta được $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$

3) Ta có $MA'.MB'.MC'=SA.SB.SC.\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$

$$\le SA.SB.SC\left(\frac{\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}}{3}\right)^3=\frac{SA.SB.SC}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{EM}{EA}=\frac{IM}{IB}=\frac{FM}{FC}$

$\Rightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC.

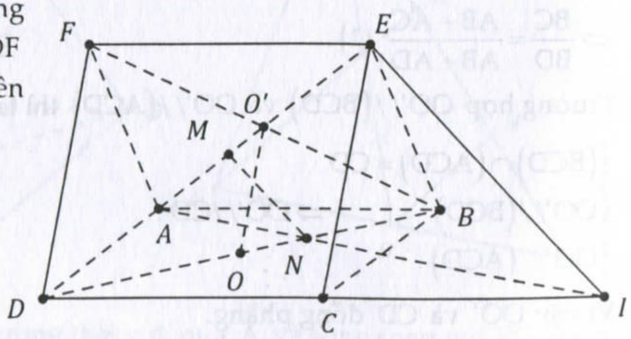
Vậy $\max(MA'.MB'.MC')=\frac{SA.SB.SC}{27}$.

Ví dụ 2.2.6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

1) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

2) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$, $BN=\frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với (CDEF).

Lời giải.



1) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF ứng với cạnh DF nên $OO'//DF$, $DF\subset(ADF)$

$\Rightarrow OO'//(ADF)$.

Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác ACE ứng với cạnh CE nên $OO'//CE$, $CE\subset(CBE)\Rightarrow OO'//(BCE)$.

2) Trong (ABCD), gọi $I = AN\cap CD$.

Do AB//CD nên $\frac{AN}{AI}=\frac{BN}{BD}\Rightarrow\frac{AN}{AI}=\frac{1}{3}$.

Lại có $\frac{AM}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AN}{AI}=\frac{AM}{AE}\Rightarrow MN//IE$.

Mà $I\in CD\Rightarrow IE\subset(CDEF)\Rightarrow MN//(CDEF)$.

Ví dụ 2.2.7. Cho tứ diện ABCD. Gọi O,O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

1) $OO'//(BCD)$ là $\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}$.

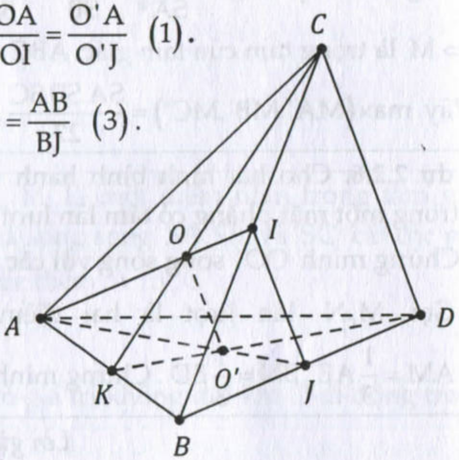
2) $OO'//(CBD)$ và $OO'//(ACD)$ là $BC=BD$ và $AC=AD$.

Lời giải.

1) Gọi $I=AO\cap BC, J=AO'\cap BD$ ta có $(AOO')\cap(BCD)=IJ$.

Do đó $OO'//(BCD)\Leftrightarrow OO'//IJ\Leftrightarrow\frac{OA}{OI}=\frac{O'A}{O'J}$ (1).

Mặt khác ta có $\frac{OA}{OI}=\frac{AB}{BI}$ (2), $\frac{O'A}{O'J}=\frac{AB}{BJ}$ (3).



Từ (1),(2),(3) suy ra $BI=BJ$.

Lại có $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{IB}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}$

và $\frac{JB}{JD}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{JB}{BD}=\frac{AB}{AB+AD}$

nên $IB=JB\Leftrightarrow\frac{AB.BC}{AB+AC}=\frac{AB.BD}{AB+AD}$

$\Leftrightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}$ (1).

2) Trường hợp $OO'//(BCD)$ và $OO'//(ACD)$ thì ta có

$$\begin{cases}(BCD)\cap(ACD)=CD\\ OO'//(BCD)\\ OO'//(ACD)\end{cases}\Rightarrow OO'//CD.$$

Vì vậy OO' và CD đồng phẳng.

Xét ba mặt phẳng $(ABC),(ABD),(CDOO')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là AB,CO,DO' nên ba giao tuyến này đồng quy. Gọi K là điểm đồng quy này thì K là chân các đường phân giác của các góc C,D trong các tam giác CAB, DAB tương ứng. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{KA}{KB}=\frac{DA}{DB}$ và $\frac{KA}{KB}=\frac{CA}{CB}$

Suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$ (2)

Kết hợp với đẳng thức (1) ta có:

$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB+AC-AC}{AB+AD-AD}=\frac{AB}{AB}=1$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau).

Vậy $BC=BD, AC=AD$.

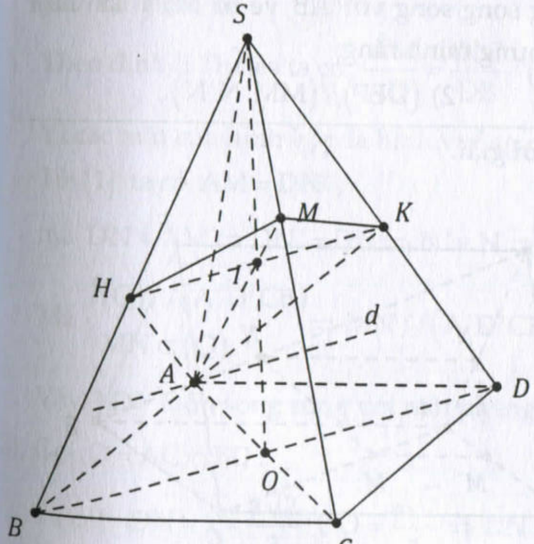
Ví dụ 2.2.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là một điểm di động trên cạnh SC, (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

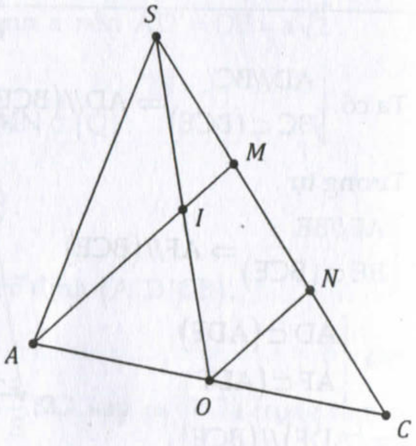
1) Chứng minh (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

2) Tìm các giao điểm H, K của (α) với SB, SD. Chứng minh $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

3) Thiết diện của hình chóp với (α) có thể là hình thang được không?

Lời giải.





1) Trong (ABCD) gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BD thì d cố định

Ta có $\begin{cases}A\in(\alpha)\\ A\in d\\ d//BD\end{cases}\Rightarrow d\subset(\alpha)$. Vậy (α) luôn chứa đường thẳng d cố định.

2) Gọi $I = AM \cap HK$, thế thì $\frac{SB}{SH}=\frac{SD}{SK}=\frac{SO}{SI}$ nên $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}=\frac{2SO}{SI}$ (1).

Gọi N là trung điểm của MC, ta có

$$\frac{SC}{SM}=\frac{SN+NC}{SM}=\frac{SN}{SM}+\frac{NC}{SM}=\frac{SN}{SM}+\frac{SN-SM}{SM}=2\frac{SN}{SM}-1=2\frac{SO}{SI}-1 \ (2).$$

Từ (1),(2) ta có $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}=2\frac{SO}{SI}-\left(2\frac{SO}{SI}-1\right)=1$.

3) Xét các mặt phẳng $(\alpha),(SAB),(SCD)$ ta thấy

$(\alpha)\cap(SAB)=AH, (\alpha)\cap(SCD)=MK$,

$(SAB)\cap(SCD)=d//AB//CD$.

Do đó nếu $AH//MK \Rightarrow AH//MK//d \Rightarrow AH//AH$ (vô lí).

Tương tự, nếu $AK//MH$ cũng dẫn đến vô lí.

Vậy thiết diện không thể là hình thang.

Ví dụ 2.2.9. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh rằng:

1) $(ADF)//(BCE)$ 2) $(DEF)//(MM'N'N)$.

Lời giải.

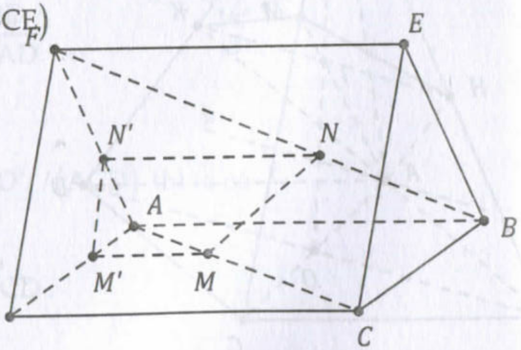
1) Ta có $\begin{cases} AD//BC \\ BC\subset(BCE)\end{cases} \Rightarrow AD//(BCE)$

Tương tự

$\begin{cases} AF//BE \\ BE\subset(BCE)\end{cases} \Rightarrow AF//(BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD\subset(ADF) \\ AF\subset(ADF)\end{cases}$

$\Rightarrow (ADF)//(BCE)$.



2) Vì ABCD và (ABEF) là các hình vuông nên AC = BF (1).

Ta có $MM'//CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD}=\frac{AM}{AC}$ (2) và $NN'//AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF}=\frac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta được $\frac{AM'}{AD}=\frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N'//DF \Rightarrow DF//(MM'N'N)$.

Lại có $NN'//AB \Rightarrow NN'//EF \Rightarrow EF//(MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF//(MM'N'N) \\ EF//(MM'N'N)\end{cases} \Rightarrow (DEF)//(MM'N'N)$.

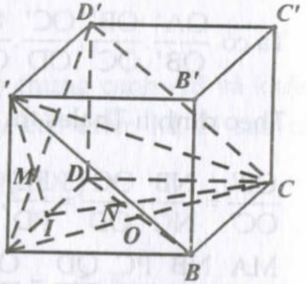
Ví dụ 2.2.10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho

$$AM = DN = x \ \left(0 < x < a\sqrt{2}\right).$$

1) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

2) Chứng minh khi $x=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN//A'C$.

Lời giải.



1) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với (A'D'CB). Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với (A'D'CB). Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{AM}{AD'}=\frac{DN'}{DB}$ (1)

Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có AM = DN',

mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases} (Q)//(A'D'CB) \\ MN\subset(Q)\end{cases} \Rightarrow MN//(A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định (A'D'CB).

2) Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có : $DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.

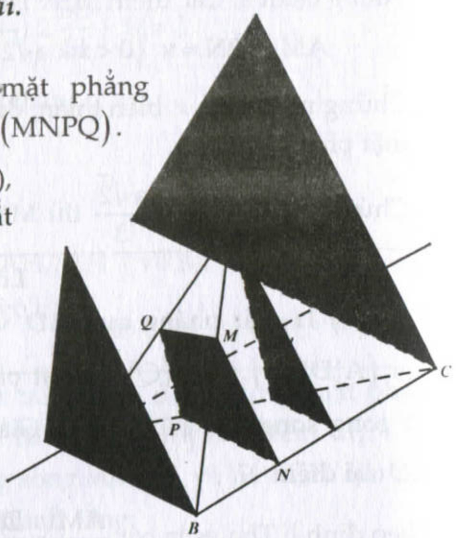
Tương tự M là trọng tâm của tam giác A'AD.

Gọi I là trung điểm của AD ta có

$\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3}, \frac{IM}{IA'}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IN}{IC}=\frac{IM}{IA'} \Rightarrow MN//A'C$.

Ví dụ 2.2.11. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là các điểm trên các đường thẳng AB,BC,CD,DA của tứ diện ABCD (M,N,P,Q khác với A,B,C,D) thì M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$ (Định lí Menelaus).

Lời giải.



- Giả sử M,N,P,Q đồng phẳng.

Từ các đỉnh A, B, C dựng các mặt phẳng $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ theo thứ tự song song với $(MNPQ)$.

Từ D dựng đường thẳng d cắt (α), (β), (γ) theo thứ tự tại A',B',C' và cắt (MNPQ) tại O.

Ta có $\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1$

Theo định lí Thales thì $\frac{OA'}{OB'}=\frac{MA}{MB}$

$\frac{OB'}{OC'}=\frac{NB}{NC},\frac{OC'}{OD}=\frac{PC}{PD},\frac{OD}{OA'}=\frac{QD}{QA}$

$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=\frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD}.\frac{OD}{OA'}=1.$

- Giả sử $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$. Gọi $E=(MNP)\cap AD$ theo chứng minh trên, do M,N,P,E đồng phẳng nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{ED}{EA}=1\Rightarrow\frac{QD}{QA}=\frac{ED}{EA}\Rightarrow E\equiv Q$.

Vậy M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2.2.12. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB,SAC,SBC cùng nằm trong một mặt phẳng.

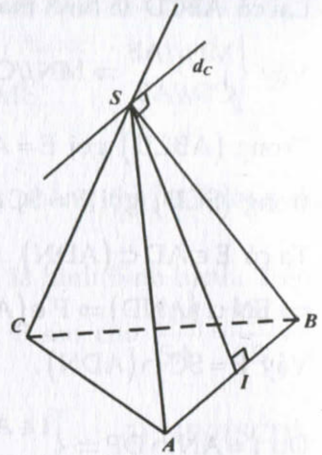
Lời giải.

Gọi d_C là đường phân giác ngoài của góc S trong tam giác SAB và I là trung điểm của AB.

Do tam giác SAB cân tại S nên $SI\perp AB$ và SI là phân giác trong của góc S nên $SI\perp d_C$.

Vậy trong (SAB), ta có $\begin{cases}d_C\perp SI\\AB\perp SI\end{cases}\Rightarrow d_C//AB\Rightarrow d_C//(ABC)$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua S và song song với (ABC).



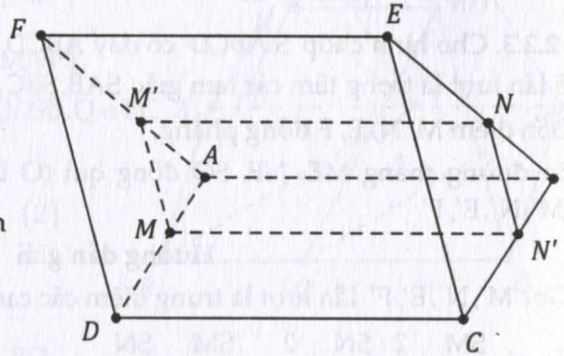
Vậy $\begin{cases}S\in d_C\\d_C//(ABC)\\(\alpha)//(ABC)\\S\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow d_C\subset(\alpha)$.

Tương tự , gọi d_A,d_B là các đường phân giác ngoài góc S của các tam giác SBC,SCA thì d_A và d_B cũng nằm trong mặt phẳng (α) nên các đường thẳng d_A,d_B,d_C cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua S và song song với mặt phẳng (ABC).

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.2.1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Trên các cạnh AD, BE lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BE}=k\ (0<k<1)$. Chứng minh rằng MN//(CDE).

Hướng dẫn giải



Qua M vẽ đường thẳng song song với DF, cắt AF tại M′. Qua N vẽ đường thẳng song song với CE cắt BC tại N′.

Vì CDFE là hình bình hành nên DF//CE ⇒ MM'//NN' và MM'/ /(CDE).

Mặt khác $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BE}=\frac{BN'}{BC}\Rightarrow MN'//CD\Rightarrow MN'//(CDE)$

Từ đó, suy ra (MNN')//(CDE) ⇒ MN//(CDE) (đpcm).

Bài 2.2.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

1) Chứng minh MN song song với CD.
2) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Hướng dẫn giải

1) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên MN//AB.

Lại có ABCD là hình thang $\Rightarrow AB//CD$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l} MN//AB \\ CD//AB \end{array}\right. \Rightarrow MN//CD$.

2) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$,

trong (SCD) gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset (ADN)$

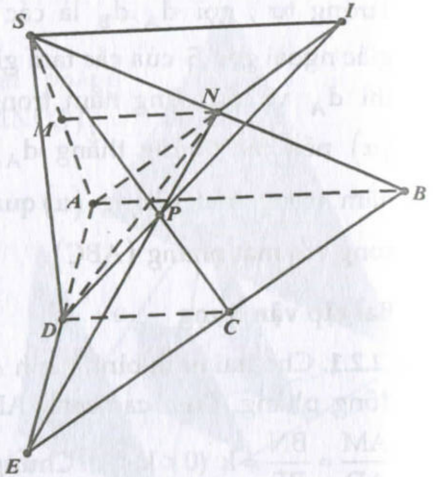
$\Rightarrow EN \subset (AND) \Rightarrow P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I \in AN \\ I \in DP \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{array}\right.$

$\Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB//CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{array}\right. \Rightarrow SI//CD$.



Bài 2.2.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA. Chứng minh:

1) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

2) Ba đường thẳng ME, NF, SO đồng qui (O là giao điểm của AC và BD) M', N', E', F'

Hướng dẫn giải

1) Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA.

Ta có $\frac{SM}{SM'} = \frac{2}{3}, \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'}$

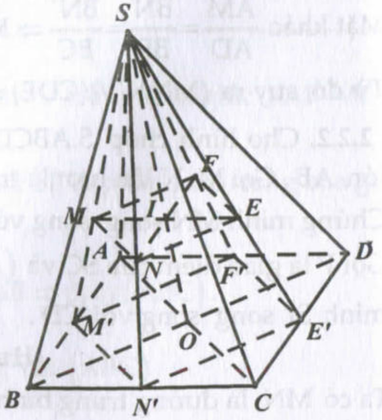
$\Rightarrow MN//M'N'$ (1).

Tương tự $\frac{SE}{SE'} = \frac{SF}{SF'} \Rightarrow EF//E'F'$ (2)

Lại có $\left\{\begin{array}{l} M'N'//AC \\ E'F'//AC \end{array}\right. \Rightarrow M'N'//E'F'$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra MN//EF.

Vậy bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.



2) Dễ thấy M'N'E'F' cũng là hình bình hành và $O = M'E' \cap N'F'$.

Xét ba mặt phẳng $(M'SE'), (N'SF')$ và $(MNEF)$ ta có:

$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$; $(M'SE') \cap (MNEF) = ME$;

$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$; $ME \cap NF = I$.

Do đó theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng ME, NF, SO đồng qui.

Bài 2.2.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$.

Chứng minh rằng:

1) $MN//(ABCD)$ 2) $SD//(MNP)$ 3) $NP//(SCD)$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN//AB$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l} MN//AB \\ AB \subset (ABCD) \end{array}\right. \Rightarrow MN//(ABCD)$.

2) Tương tự $\frac{SM}{SA} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow SD//MP$,

mà $MP \subset (MNP) \Rightarrow SD//(MNP)$.

3) Kẻ $NR//BC, R \in SC$, kẻ $RQ//SB, Q \in BC$ thì ta có

$\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC}$ (1) và $\frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}$ (2),

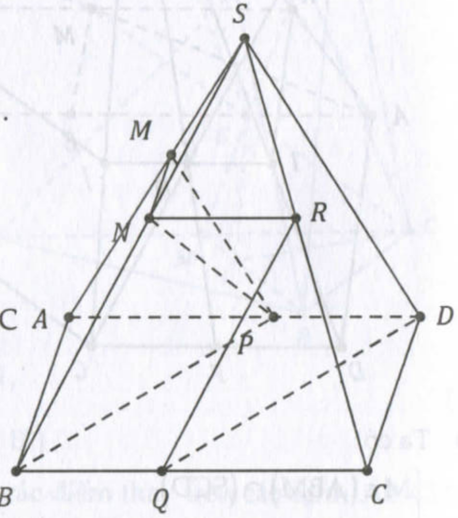
Mặt khác $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD} \Rightarrow BQ = PD$.

Lại có $NR = BQ \Rightarrow NR = PD$

Thêm nữa $\left\{\begin{array}{l} NR//BQ \\ PD//BQ \end{array}\right. \Rightarrow NR//PD$ nên PDRN là hình bình hành, từ đó ta có

$\left\{\begin{array}{l} NP//DR \\ DR \subset (SCD) \end{array}\right. \Rightarrow DR//(SCD)$.



Bài 2.2.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB.

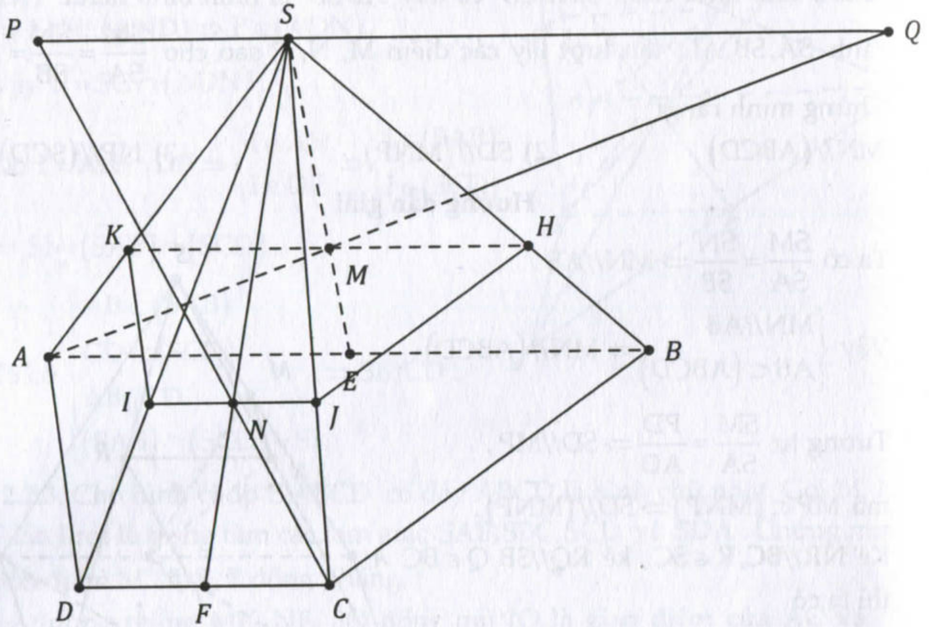
1) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (ABM) và (SCD); (SMN) và (ABC).

2) Chứng minh $MN//(ABC)$.

3) Gọi d là giao tuyến của (SCD) và (ABM) còn I, J lần lượt là các giao điểm của d với SD, SC. Chứng minh $IN//(ABC)$.

4) Tìm các giao điểm P, Q của MC với (SAB), AN với (SCD). Chứng minh S,P,Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



1)

- Ta có

$$\begin{cases} M\in(ABM)\cap(SCD)\\ AB//(SCD)\\ AB\cap(ABM)\end{cases}\Rightarrow(ABM)\cap(SCD)=IJ//AB//CD,\ M\in IJ, I\in SD, J\in SC.$$

- Gọi $E=SN\cap AB, F=SM\cap CD\Rightarrow EF=(SMN)\cap(ABCD)$.

2) Do M, N là trọng tâm của các tam giác SCD và SAB nên

$$\frac{SM}{SF}=\frac{2}{3},\frac{SN}{SE}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{SM}{SF}=\frac{SN}{SE}\Rightarrow MN//EF,\ EF\subset(ABCD)\Rightarrow MN//(ABCD).$$

3) Ta có

$$IJ//CD\Rightarrow\frac{SI}{SD}=\frac{SM}{SF}=\frac{SN}{SE}\Rightarrow IN//DE,\ DE\subset(ABC)\Rightarrow MN//(ABCD).$$

4) Gọi $\Delta=(SAB)\cap(SCD)$

$$P=CM\cap\Delta\Rightarrow\begin{cases}P\in\Delta\subset(SAB)\\ P\in CM\end{cases}\Rightarrow P=CM\cap(SAB).$$

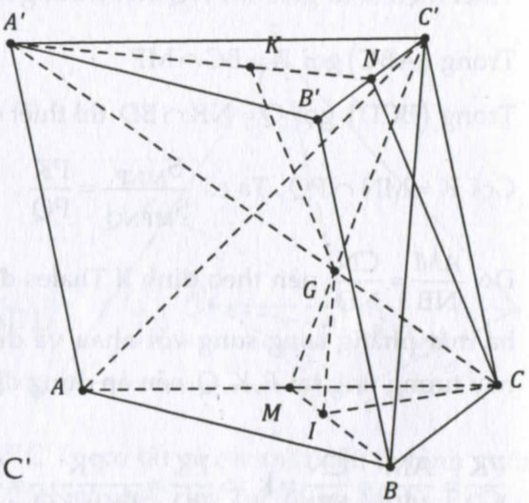
Tương tự gọi $Q=AN\cap\Delta$ thì $Q=AN\cap(SCD)$.

Ta có S,P,Q thuộc Δ nên chúng thẳng hàng.

Bài 2.2.6. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. I, G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC' và A'B'C'. Chứng minh

1) $IG//(ABC')$ 2) $GK//(BB'C'C)$

Hướng dẫn giải



1) Gọi M là trung điểm của cạnh AC thì $\frac{IM}{IB}=\frac{1}{3}$ và $\frac{MG}{MC'}=\frac{1}{3}$.

Do đó $\frac{IM}{IB}=\frac{MG}{MC'}\Rightarrow IG//BC'$

Vậy $IG//BC'\subset(ABC')$

$\Rightarrow IG//(ABC')$.

2) Dễ thấy C,G,A' thẳng hàng và $AC//A'C'\Rightarrow\frac{A'G}{GC}=\frac{C'G}{GM}=2$

Gọi N là trung điểm của B'C'

Ta có K là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$

nên $\frac{A'K}{A'N}=2\Rightarrow\frac{A'G}{GC}=\frac{A'K}{A'N}\Rightarrow GK//CN$.

Vậy $GK//CN\subset(BCC'B')\Rightarrow GK//(BCC'B')$.

Bài 2.2.7. Cho tứ diện ABCD và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

1) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

2) Cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}>0$ và P là một điểm trên cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

3) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

Hướng dẫn giải

1) Do $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN,AC,BD cùng song song với một mặt phẳng (β).

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)//(\beta)$ suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

2) Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này MP//BC nên BC//(MNP).

Ta có: $\begin{cases} N\in(MNP)\cap(BCD)\\ BC//(MNP)\\ BC\subset(BCD)\end{cases}\Rightarrow(BCD)\cap(MNP)=NQ//BC, Q\in BD$.

Thiết diện là tứ giác MPNQ. Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}\neq k$

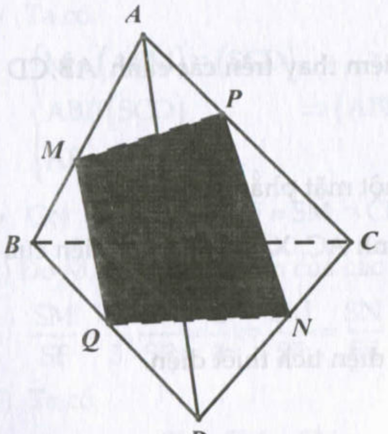
Trong (ABC) gọi $R=BC\cap MP$

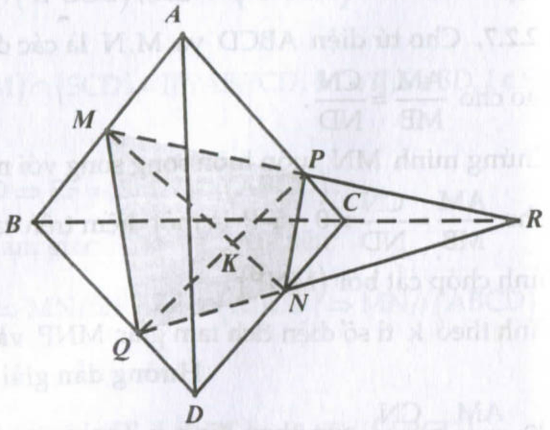
Trong (BCD) gọi $Q=NR\cap BD$ thì thiết diện là tứ giác MPNQ.

Gọi $K=MN\cap PQ$. Ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}}=\frac{PK}{PQ}$.

Do $\frac{AM}{NB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

$$\frac{PK}{KQ}=\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}=k\Rightarrow\frac{PK}{PQ}=\frac{PK}{PK+KQ}=\frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ}+1}=\frac{k}{k+1}.$$





Bài 2.2.8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF//(SAD).

Hướng dẫn giải

Kẻ FI//SA, $I\in AB\Rightarrow IF//(SAD)$. Ta có $\frac{FS}{FB}=\frac{IA}{IB}$ (1)

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{FS}{FB}=\frac{SA}{AB}=\frac{AD}{AC}$ (2)

(Do các tam giác ASD, ABC cân tại A nên SA = AD, AB = AC)

Mặt khác $\frac{ED}{EC}=\frac{AD}{AC}$ (3).

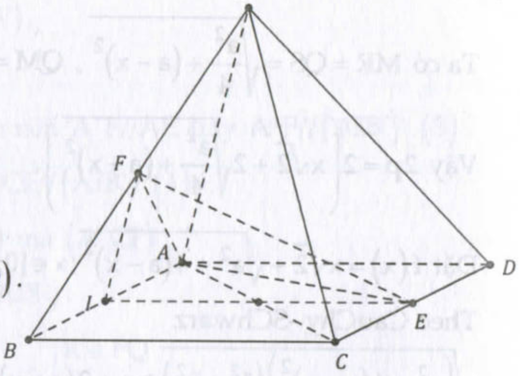
Từ (1),(2) và (3)

suy ra $\frac{IA}{IB}=\frac{ED}{EC}\Rightarrow IE//AD$.

Mà $AD\subset(SAD)\Rightarrow IE//(SAD)$.

Ta có $\begin{cases}IE//(SAD)\\ IF//(SAD)\end{cases}\Rightarrow(IEF)//(SAD)$.

Mà $EF\subset(IEF)\Rightarrow EF//(SAD)$.



Bài 2.2.9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh AB, CC', C'D' và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM=C'N=C'P=AQ=x\ (0\le x\le a)$.

1) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

2) Chứng minh (MNPQ) đi qua một đường thẳng cố định.

3) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (MNPQ). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Hướng dẫn giải

1) Dễ thấy PN//CD' và QM//A'B mà A'B//C'D nên PN//QM hay M, N, P, Q đồng phẳng.

2) Do PC'MA là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC' $\Rightarrow O\in(MNPQ)$.

Mặt khác $A'B//MQ\subset(MNPQ)\Rightarrow A'B//(MNPQ)$.

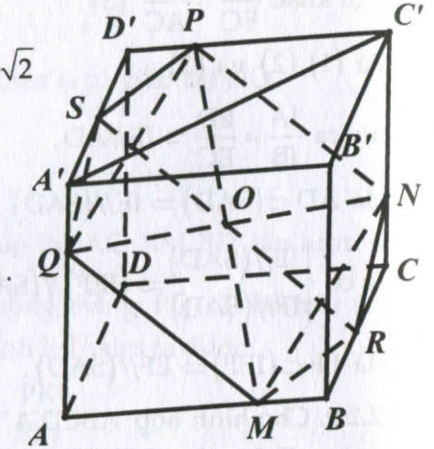
Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với A'B thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay (MNPQ) luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$$(MNPQ)//(A'BC') \Rightarrow BC'//(MNPQ) \Rightarrow BC'//NR \Leftrightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Đảo lại $x = \frac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ)//(A'BC')$.

3) Dễ thấy Δ cắt BC, A'D' tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác MPNPSQ. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là $2p = 2(RM + MQ + QS)$.



Ta có $MR = QS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}$, $QM = x\sqrt{2}$

Vậy $2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0;a]$.

Theo CauChy -SChwarz

$$\sqrt{\left(a^2 + 4(a-x)^2\right)\left(1^2 + 1^2\right)} \ge a + 2(a-x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$$

Nên $f(x) \ge x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \frac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a}{2}$

Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \le \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \le 0 \text{ đúng } \forall x \in [0;a].$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = a$. Vậy $\max(2p) = 2a(\sqrt{2} + 1)$.

Bài 2.2.10. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'

1) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, A'B'C' và ACC'. Chứng minh rằng: $(IGK)//(BB'C'C)$ và $(A'KG)//(AIB)$.

2) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

Hướng dẫn giải

1) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung điểm của AC', AC, BC, B'C'.

- Chứng minh $(IGK)//(BCC'B')$.

Ta có $\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG//CC' \subset (BCC'B') \Rightarrow IG//(BCC'B')$ (1)

Tương tự $\frac{A'G}{A'C} = \frac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C} = \frac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \frac{2}{3}$.

Lại có

$$\frac{A'K}{A'F} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A'G}{A'C} = \frac{A'K}{A'F} \Rightarrow GK//CF \subset (BCC'B') \Rightarrow GK//(BCC'B') \quad (2).$$

Từ (1),(2) suy ra $(IGK)//(BCC'B')$.

- Chứng minh $(A'KG)//(AIB')$.

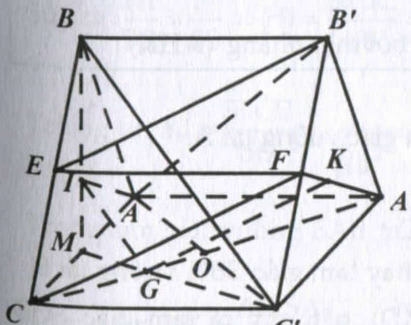
Dễ thấy AA'FE là hình bình hành nên $A'F//AE$ hay $A'F//(AIB')$ (3).

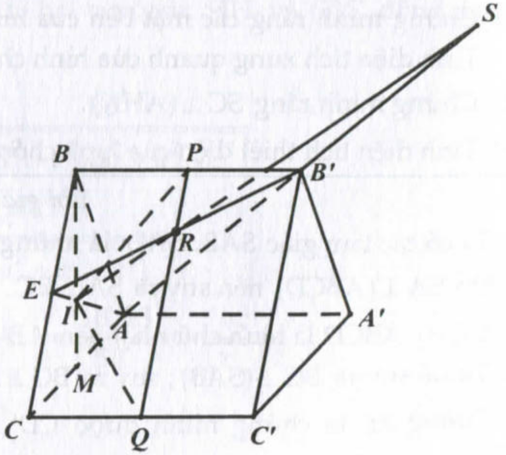
Cũng dễ thấy $CF//EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF//(AIB')$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $(A'CF)//(AIB')$ mà $(A'CF)$ chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG)//(AIB')$.

2) Trong (BCC'B') gọi $R = PQ \cap B'E \Rightarrow \begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E) \end{cases}$

Trong (AB'E) gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.





§ 3. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1. **Hai đường thẳng vuông góc**

Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta có các cách sau

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Cách 2: Chứng minh có một mặt phẳng (P) chứa AB và vuông góc với CD.

Cách 3: Sử dụng các kết quả đã biết trong hình học phẳng.

2. **Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.**

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường đi chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

Chú ý: Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

3. **Hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến Δ và vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với Δ thì đường thẳng đó sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2.3.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với độ dài các cạnh $AB=a$, $AD=b$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=c$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên các đường thẳng SB, SD.

1) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh của hình chóp theo a,b,c.

2) Chứng minh rằng $SC\perp(AHK)$.

3) Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AHK).

Lời giải.

1) Ta có các tam giác SAB, SAD là những tam giác vuông tại A.

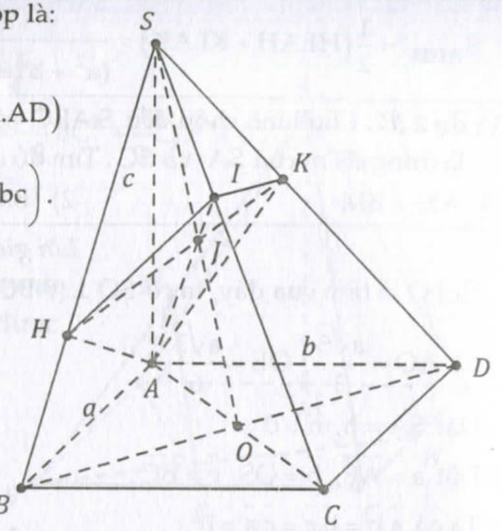
Do $SA\perp(ABCD)$ nên suy ra $SA\perp BC$.

Lại có ABCD là hình chữ nhật nên $AB\perp BC$.

Từ đó suy ra $BC\perp(SAB)$, suy ra $BC\perp AB$ hay tam giác SBC vuông tại B.

Tương tự, ta chứng minh được $CD\perp(SAD)$ nên suy ra tam giác SCD vuông tại D.

Vậy các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác vuông.



Diện tích xung quanh của hình chóp là:

$$S=S_{\Delta SAB}+S_{\Delta SBC}+S_{\Delta SCD}+S_{\Delta SDA}$$

$$=\frac{1}{2}(SA.AB+SB.BC+SD.CD+SA.AD)$$

$$=\frac{1}{2}\left(ac+b\sqrt{a^2+c^2}+a\sqrt{c^2+b^2}+bc\right).$$

2) Ta có: $BC\perp(SAB)$ và $AH\subset(SAB)$

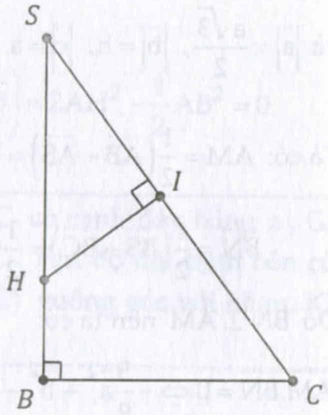
nên $AH\perp BC$.

Mặt khác $AH\perp SB$

nên ta có $AH\perp(SBC)$

Suy ra $AH\perp SC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AK\perp SC$. Từ đó suy ra $SC\perp(AHK)$.



3) Gọi I là giao điểm của SC với mặt phẳng (AHK), ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AHK) là tứ giác AHIK.

Ta có hai tam giác AHI và AKI là hai tam giác vuông tại H và K.

Do $AI\perp SC$

nên $SI.SC=SA^2\Rightarrow SI=\frac{SA^2}{SC}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Vì $SC\perp(AHK)$ nên $HI\perp SC$, do đó hai tam giác SIH và SBC đồng dạng với nhau.

Suy ra $\frac{HI}{BC}=\frac{SI}{SB}\Rightarrow HI=\frac{SI.BC}{SB}=\frac{bc^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

Tương tự: $KI=\frac{SI.CD}{SD}=\frac{ac^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

Trong tam giác vuông SAB ta có: $AH=\frac{AB.AS}{SB}=\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$

Tương tự: $AK=\frac{AD.SA}{AD}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

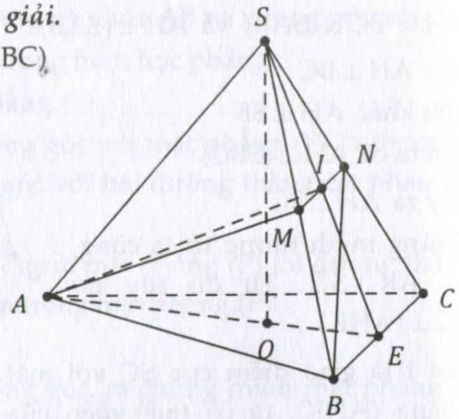
Vậy diện tích thiết diện cần tính là:

$$S_{AHIK}=\frac{1}{2}(HI.AH+KI.AK)=\frac{abc^3}{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}.$$

Ví dụ 2.3.2. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Tìm độ dài cạnh bên của hình chóp, biết:

1) $AN\perp BM$ 2) $(BMN)\perp(SAC)$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO\perp(ABC)$

và $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OE=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Đặt SA = h, h > 0

1) Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OS}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$

và $\left|\vec{a}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\left|\vec{b}\right|=h$, $\left|\vec{c}\right|=a$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OS}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)$

Do $BN\perp AM$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}=0\Leftrightarrow-\frac{5}{9}\vec{a}^2+\vec{b}^2-\frac{3}{4}\vec{c}^2=0\Leftrightarrow-\frac{5}{9}.\frac{3a^2}{4}+h^2-\frac{3}{4}a^2=0\Leftrightarrow h^2=\frac{7}{6}a^2$$

Suy ra $SA^2=AO^2+OS^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{7a^2}{6}=\frac{23a^2}{12}\Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{69}}{6}$.

2) Gọi I là trung điểm MN, ta có $AI\perp MN$. Mặt khác $(AMN)\perp(SBC)$ nên $AI\perp(AMN)$

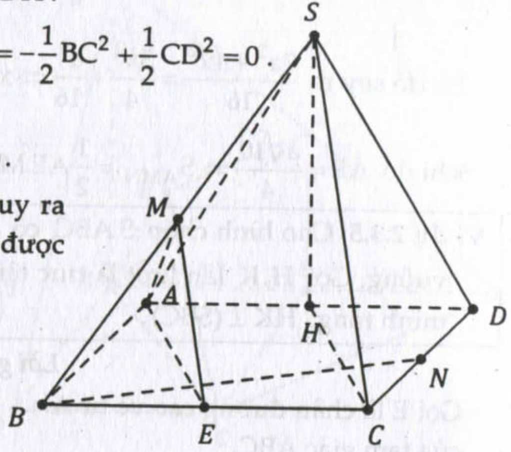
Suy ra $AI\perp SE\Rightarrow\Delta SAE$ là tam giác cân nên $SA=AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.3.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Chứng minh rằng $AM\perp BN$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi H là trung điểm cạnh AD, suy ra $SH\perp AD$.

Mà $(SAD)\perp(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)$



Suy ra $SH\perp BN$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}$.

Suy ra $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}CD^2=0$.

Nên $BN\perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BN\perp(SHC)$.

Gọi E là trung điểm của BC, ta suy ra được (AME)//(SHC), nên ta có được $BN\perp(AME)$

Suy ra $BN\perp AM$ (đpcm).

Cách 2: Ta có:

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HS}$

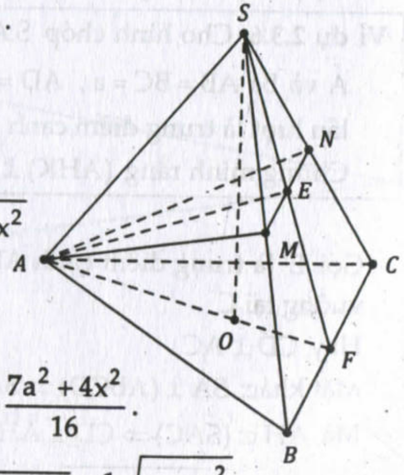
$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Suy ra $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HS}\right)\left(2\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=2AH^2-\frac{1}{2}AB^2=0$

Suy ra $AM\perp BP$.

Ví dụ 2.3.4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a . Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SB,SC . Tìm độ dài cạnh bên của hình chóp để hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) vuông góc với nhau. Khi đó hãy tính diện tích tam giác AMN .

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của $MN\Rightarrow AE\perp MN$.

Do đó $(AMN)\perp(SBC)\Leftrightarrow AE\perp SE$.

Đặt SA = x, x > 0 .

Trong tam giác AMN có

$$AM=AN=\sqrt{\frac{AS^2+AB^2}{2}-\frac{SB^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+x^2}$$

và $MN=\frac{a}{2}$

Suy ra $AE^2=AM^2-ME^2=\frac{2a^2+x^2}{4}-\frac{a^2}{16}=\frac{7a^2+4x^2}{16}$.

Trong tam giác SAE có $SE=\frac{1}{2}SF=\frac{1}{2}\sqrt{SB^2-BF^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}$

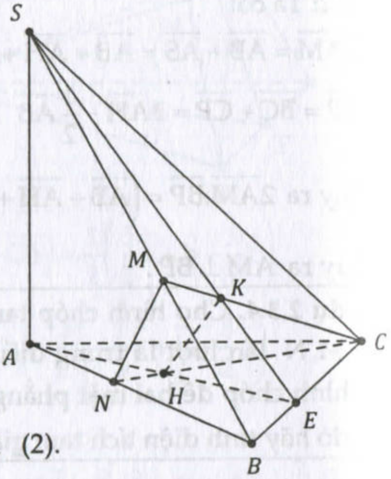
Suy ra $AE^2 = SA^2 - SE^2 = x^2 - \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{3x^2}{4} + \frac{a^2}{16}$.

Từ đó suy ra $\frac{7a^2 + 4x^2}{16} = \frac{3x^2}{4} + \frac{a^2}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $AE = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AE.MN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt).

Ví dụ 2.3.5. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng: $HK \perp (SBC)$.

Lời giải.



Gọi E là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} AE \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

$\Rightarrow BC \perp SE \Rightarrow K \in SE$.

Suy ra $HK \perp BC$ (1).

Mặt khác: $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$

Lại có $CK \perp AB \Rightarrow SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $HK \perp (SBC)$ (đpcm).

Ví dụ 2.3.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh SC và SD.

Chứng minh rằng $(AHK) \perp (SCD)$ và tính diện tích tam giác AHK.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm cạnh AD, ta có: $EC = EA = ED = a$ nên tam giác ACD vuông tại C

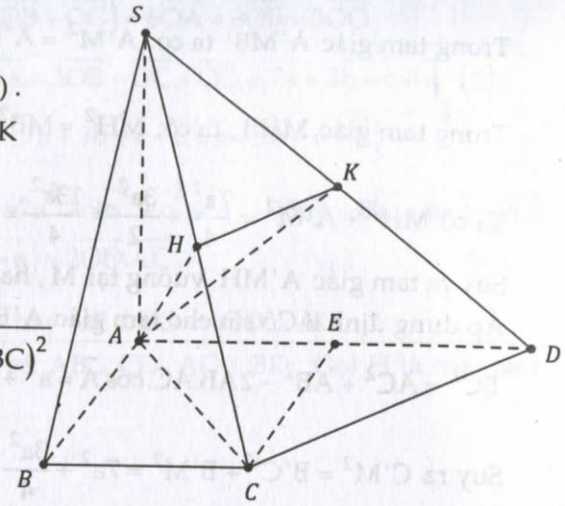
Hay $CD \perp AC$

Mặt khác: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$. Từ đó suy ra $CD \perp (SAC)$

Mà $AH \subset (SAC) \Rightarrow CD \perp AH$ (1).

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} = SA$

$\Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A và H là trung điểm SC.



Nên suy ra $AH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra được:

$AH \perp (SCD) \Rightarrow (AHK) \perp (SCD)$.

Ta có: $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp HK$

$\Rightarrow S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}AH.HK$.

Mà $AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{2} = a$,

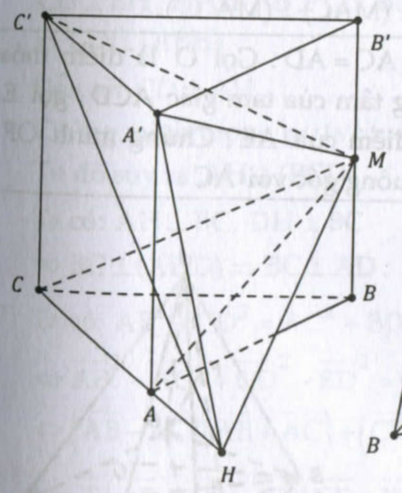
$HK = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2}$

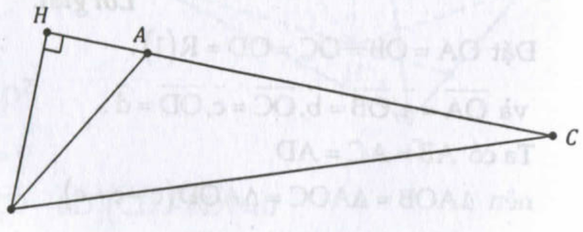
$= \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ (đvdt).

Ví dụ 2.3.7. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB'. Chứng minh rằng (MAC) và (MA'C') vuông góc với nhau.

Lời giải.





Gọi H là hình chiếu của B lên AC.

Ta có $AH = AB.\cos\widehat{BAH} = a.\cos 60^0 = \frac{a}{2}, HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác A'AH vuông tại A nên $A'H^2 = A'A^2 + AH^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$.

Trong tam giác A'MB' ta có: $A'M^2 = A'B'^2 + B'M^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

Trong tam giác MHB, ta có: $MH^2 = MB^2 + BH^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$.

Ta có $MH^2 + A'M^2 = \frac{7a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} = \frac{13a^2}{4} = A'H^2$

Suy ra tam giác A'MH vuông tại M, hay $A'M \perp MH$ (1).

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác A'B'C', ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A} = a^2 + 4a^2 + 2a.2a.\frac{1}{2} = 7a^2$$

Suy ra $C'M^2 = B'C'^2 + B'M^2 = 7a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{31a^2}{4}$.

$$C'H^2 = C'C^2 + CH^2 = 3a^2 + \left(2a + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{37a^2}{4}.$$

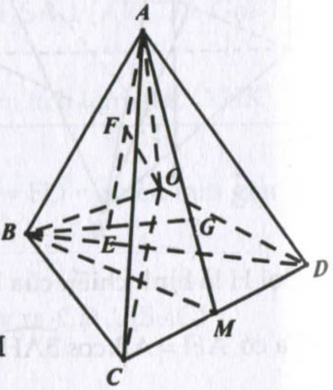
Do đó: $C'M^2 + MH^2 = \frac{31a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} = \frac{37a^2}{4} = C'H^2$

Suy ra $HM \perp C'M$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $HM \perp (MA'C')$ nên $(MAC) \perp (MA'C')$.

Ví dụ 2.3.8. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Gọi O là điểm thỏa mãn OA = OB = OC = OD và G là trọng tâm của tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE. Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.

Lời giải.



Đặt OA = OB = OC = OD = R(1).

và $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Ta có AB = AC = AD

nên $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta AOD$ (c – c – c)

suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{AOD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{d}$ (3).

Gọi M là trung điểm của CD và do AG = 2GM

nên $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

$$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b} \quad (4)$$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AE, BG ta có

$$12\overrightarrow{OF} = 6\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG}$$

$$= 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 7\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = \left(7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)\left(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

$$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 18\vec{a}\vec{b} + 8\vec{a}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{d} + 2\vec{c}\vec{d}.$$

Theo (3) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 2\vec{d}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$ hay $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

Ví dụ 2.3.9. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Gọi H là trực tâm tam giác BCD.

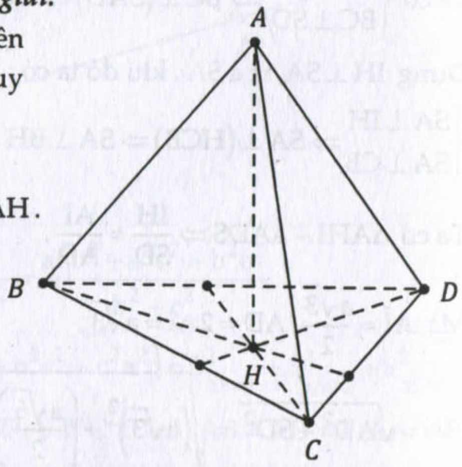
Chứng minh rằng:

1) $AH \perp (BCD)$ và $AD \perp BC$

2) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

3) Các góc xuất phát từ một đỉnh của hình chóp cùng nhọn, cùng vuông hoặc cùng tù.

Lời giải.



1) Vì H là trực tâm tam giác BCD nên $CD \perp BH$, lại có $AB \perp CD$ nên ta suy ra $CD \perp (ABH)$

Dẫn tới $CD \perp AH$.

Chứng minh tương tự, ta có: $BD \perp AH$.

Từ đó suy ra $AH \perp (BCD)$

Ta có: $AH \perp BC$, $DH \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp AD$.

2) Ta có: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = 0$ (luôn đúng)

Tương tự ta cũng chứng minh được cho hai đẳng thức còn lại.

3) Xét tại góc A. Ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC};\ \cos\widehat{CAD} = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC.AD};$$

$$\cos\widehat{DAB} = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2.AD.AB}$$

Mặt khác, ta có: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

Nên $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$; $AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$

Do đó: $AB.AC.\cos\widehat{BAC} = AC.AD.\cos\widehat{CAD} = AD.AB.\cos\widehat{DAB}$

Từ đó ta suy ra được $\cos\widehat{BAC}$, $\cos\widehat{CAD}$, $\cos\widehat{DAB}$ cùng dương, cùng âm hoặc cùng triệt tiêu.

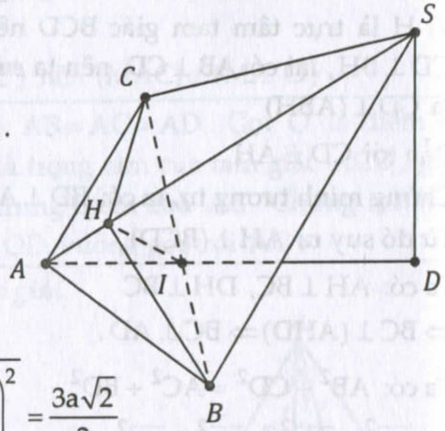
Từ đó ta suy ra đpcm.

Ví dụ 2.3.10. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời Giải.

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.



Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có:

$\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$,

$$SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$.

Suy ra $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$.

Vậy $BH \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$.

Bài tập vận dụng

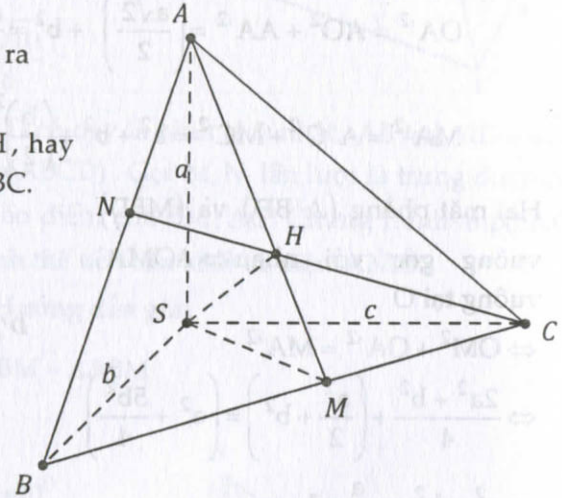
Bài 2.3.1. Cho hình chóp S.ABC có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).

1) Chứng minh rằng H là trực tập của tam giác ABC

2) Tính SH theo a, b, c.

3) Chứng minh rằng: $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$.

Hướng dẫn giải



1) Ta có $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $SH \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow AH \perp BC$.

Tương tự ta cũng có $AB \perp CH$, hay H là trực tâm của tam giác ABC.

2) Ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2}$$
$$= \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Suy ra $SH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

3) Ta có: $SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2}$

Suy ra $S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}AM^2.BC^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) = S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$.

Bài 2.3.2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

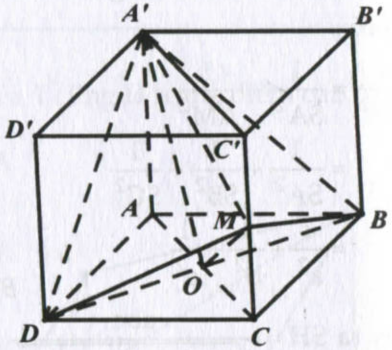
Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$, $\begin{cases} AC \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases} \Rightarrow (ACC'A') \perp BD$.

Vậy $\begin{cases}(ACC'A')\perp BD\\(ACC'A')\cap(A'BD)=OA'\\(ACC'A')\cap(MBD)=OM\end{cases}$ do đó góc giữa hai đường thẳng OM, OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM=\frac{AC'}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$;

$$OA'^2=AO^2+AA'^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{2}+b^2;$$

$$MA'^2=A'C'^2+MC'^2=a^2+b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{5b^2}{4}.$$



Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \Delta OMA'$ vuông tại O

$\Leftrightarrow OM^2+OA'^2=MA'^2$

$\Leftrightarrow \frac{2a^2+b^2}{4}+\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)=\left(a^2+\frac{5b^2}{4}\right)$

$\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$

$(A'BD)\perp(MBD)$ khi $\frac{a}{b}=1$ (Khi đó ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương).

Bài 2.3.3. Cho hình chóp đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$.

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC và $I=SK\cap MN$.

Từ giả thiết ta có $MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$, $MN//BC\Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow$ Hai trung tuyến tương ứng $AM=AN$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A\Rightarrow AI\perp MN$.

Mặt khác $\begin{cases}(SBC)\perp(AMN)\\(SBC)\cap(AMN)=MN\\AI\subset(AMN)\\AI\perp MN\end{cases}$

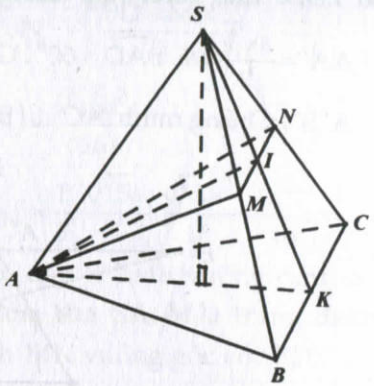
$\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow AI\perp SK\Rightarrow \Delta SAK$ cân tại A

$\Rightarrow SA=AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SK^2=SB^2-BK^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow AI=\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{SK}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

Ta có $S_{AMN}=\frac{1}{2}MN.AI=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.



Bài 2.3.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=\sqrt{2}a$, $SA=a$ và vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC, Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \Delta ABM\sim\Delta ABM$

$\Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{BCA}$

$\Rightarrow \widehat{ABM}+\widehat{BAC}=\widehat{BCA}+\widehat{BAC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=90^0\Rightarrow BM\perp AC$ (1)

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BM$ (2)

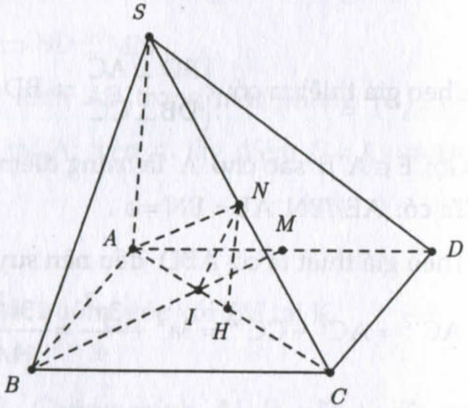
Từ (1) và (2) suy ra:

$MB\perp(SAC)\Rightarrow(SMB)\perp(SAC)$.

Gọi H là trung điểm của AC

$\Rightarrow NH//SA\Rightarrow NH\perp(ABI)$

và $NH=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.



Ta có AI là đường cao của ΔABM vuông tại A

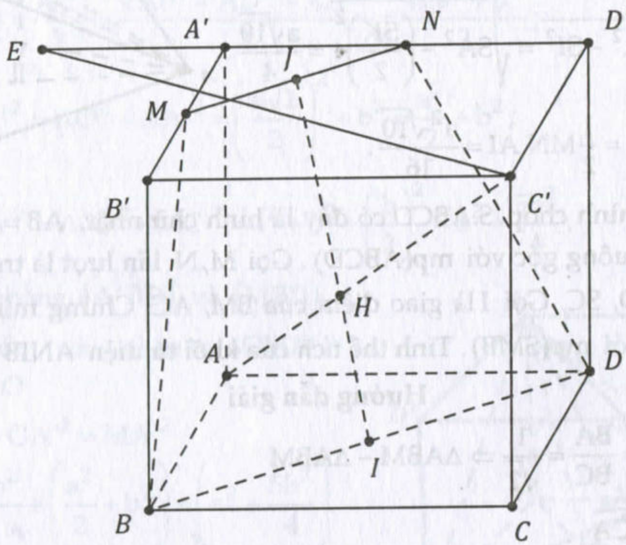
$\Rightarrow \frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{\sqrt{3}a}{3}$

$BI=\sqrt{AB^2-AI^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Thể tích tứ diện ANIB: $V_{ANIB}=\frac{1}{3}NH.\frac{1}{2}.IA.IB=\frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}a}{3}.\frac{\sqrt{6}a}{3}=\frac{\sqrt{2}a^3}{36}$.

Bài 2.3.5. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh $AB = AD = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của A'D' và A'B'. Chứng minh $AC' \perp (BDMN)$ và tính thể tích khối chóp A.BDMN.

Hướng dẫn giải



Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ DB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC'$ (1)

Gọi $E \in A'B'$ sao cho A' là trung điểm của EN.

Ta có: $AE//BN, AE = BN = a$.

Theo giả thiết ta có ABD đều nên suy ra $AC = \sqrt{3}a$.

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}.$$

$$EC'^2 = B'E^2 + B'C'^2 - 2B'E'.B'C'.\cos 120^0 = \frac{19a^2}{4}$$

$AE^2 + AC'^2 = EC'^2 \Rightarrow AE \perp AC' \Rightarrow BN \perp AC'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $AC' \perp (BDMN)$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BD, MN và $H = AC' \cap IJ$

Ta có AH là đường cao của hình chóp A.BDMN

Tứ giác HICC' nội tiếp $\Rightarrow AH.AC' = AI.AC \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{2AC'} = \frac{\sqrt{15}a}{5}$

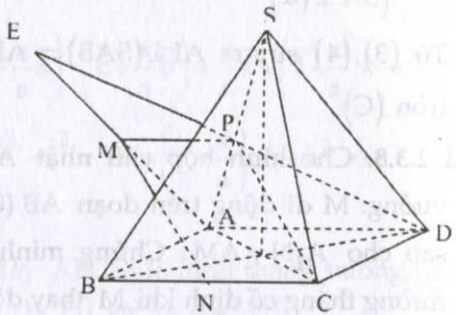
Tứ giác BDMN là hình thang cân ta có : $IJ = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD - MN}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}a}{4}$.

Diện tích hình thang BDMN : $S = \frac{1}{2}IJ(BD + MN) = \frac{\sqrt{15}a^2}{16}$.

Thể tích khối chóp A.BDMN : $V = \frac{1}{3}AH.S_{BDMN} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{15}a}{5}.\frac{\sqrt{15}a^2}{16} = \frac{a^3}{16}$.

Bài 2.3.6. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD.

Hướng dẫn giải



Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của tam giác EAD

$\Rightarrow MP//AD \Rightarrow MP//NC$.

Và $MN = \frac{1}{2}AD = NC$

Suy ra MNCP là hình bình hành

$\Rightarrow MN//CP \Rightarrow MN//(SAC)$.

Ta dễ chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$.

Bài 2.3.7. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S \neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A, B).

1) Chứng minh $MB \perp (SAM)$.

2) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK \perp (SBM), SB \perp (AHM)$

3) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Hướng dẫn giải

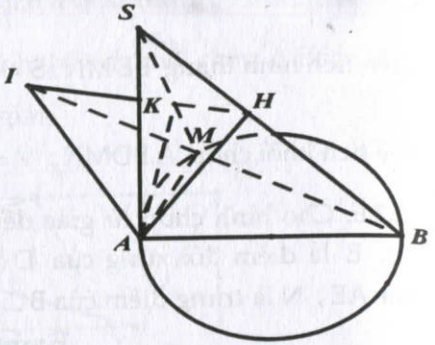
1) Ta có $\begin{cases} SA \perp (\alpha) \\ MB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SA \perp MB$ (1)

Lại có $MB \perp MA$ (2) (tính chất góc chắn nửa đường tròn).

Từ (1),(2) suy ra $MB \perp (SAM)$.

2) Ta có $AK \perp SM$, $MB \perp (SAM), AK \subset (SAM) \Rightarrow MB \perp AK$.

Suy ra $AK \perp (SBM)$.



Tương tự $\begin{cases} AK \perp (SBM) \\ SB \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow AK \perp SB$,

lại có $AH \perp SB$ suy ra $SB \perp (AHK)$.

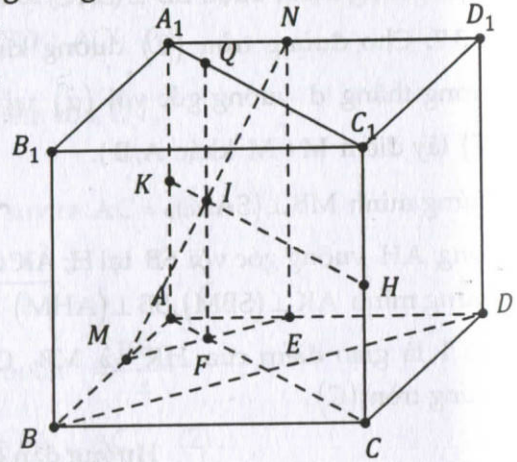
3) Ta có $\begin{cases} AI \subset (AHK) \\ SB \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SB$ (3)

và $\begin{cases} AI \subset (\alpha) \\ SA \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SA$ (4).

Từ (3),(4) suy ra $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Bài 2.3.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình vuông. M di động trên đoạn AB $(0 < AM < AB)$. Lấy N thuộc cạnh A_1D_1 sao cho $A_1N = AM$. Chứng minh MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Hướng dẫn giải



Qua M vẽ ME//BD ($E \in AD$) cắt AC tại F. Ta có F là trung điểm của ME và $ME \perp AC$

Do $AM = A_1N \Rightarrow AE = A_1N$

$\Rightarrow NE // AA_1$.

Gọi I là trung điểm của MN, vẽ FI cắt A_1C_1 tại Q, ta có I là trung điểm đoạn FQ

Gọi K, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA_1, CC_1, suy ra K, I, H thẳng hàng.

Mặt khác $KH \perp FQ$, $HK // AC \Rightarrow HK \perp ME$.

Suy ra $KH \perp (MEN) \Rightarrow KH \perp MN$.

Vậy khi M thay đổi thì đường thẳng MN luôn vuông góc và cắt đường thẳng cố định HK.

Bài 2.3.9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x (0 \le x \le a)$. Chứng minh rằng:

1) $AC' \perp B'D'$ 2) $AC' \perp MN$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

1) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{c}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp B'D'.$$

2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$

$$= \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})[\left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}]$

$$= \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0.$$

Vậy $AC' \perp MN$.

Bài 2.3.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

1) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp S.ABCD.

2) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (β).

Hướng dẫn giải

1) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì ADCE là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.

Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.

Ta có $SO = \sqrt{OA^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$BC = DE = a\sqrt{2}$, do $DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp AO$

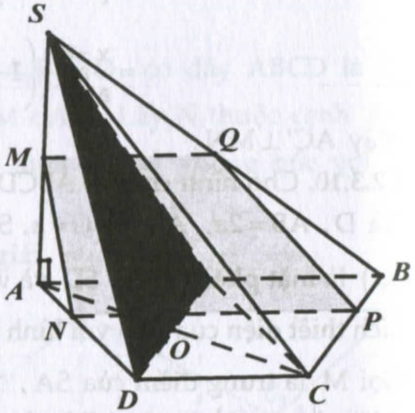
$$\Rightarrow S_{SDE} = \frac{1}{2}SO.DE = \frac{1}{2}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

2) Ta có $\begin{cases} AB \perp (SAD) \\ (\beta) \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB//(\beta)$.

Vậy $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ AB//(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MQ//AB, Q \in SB$.

Tương tự, $\begin{cases} N \in (\beta) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ AB//(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (ABCD) = NP//AB, P \in BC$.

Thiết diện là tứ giác MNPQ.



Do $\begin{cases} NP//AB \\ MQ//AB \end{cases} \Rightarrow NP//MQ$ (1)

Lại có $\begin{cases} MN \subset (SAD) \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp MN$ (2)

Từ (1),(2) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(NP + MQ)MN$.

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}, MQ = \frac{1}{2}AB = a$$

$$\frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} \Rightarrow NP = \frac{AB.DN}{DA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2(a-x) + a)\frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2} = \frac{(3a-x)\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$.

---

§ 4. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b ta có các cách sau

* **Cách 1:** Tìm góc giữa hai đường thẳng a, b bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng). Từ O dựng các đường thẳng a', b' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với a và b. Góc giữa hai đường thẳng a', b' chính là góc giữa hai đường thẳng a và b.

Chú ý: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

* **Cách 2:** Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng a, b

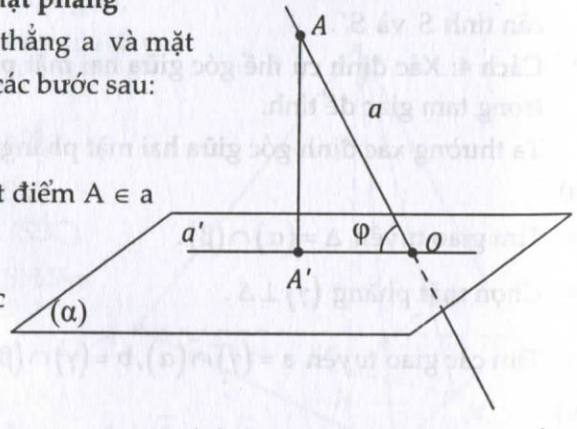
Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b xác định bởi $\cos(a,b) = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Chú ý: Để tính $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$, $\left|\overrightarrow{u_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng, sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

2. Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $\widehat{AOA'} = \varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).



Lưu ý:

- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó AA'//b.
- Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng

a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}\right|}$, trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

* **Cách 1:** Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)}=\widehat{(a,b)}.$$

* **Cách 2:** Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và (β) khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

* **Cách 3:** Sử dụng công thức hình chiếu $S'=S\cos\varphi$, từ đó để tính $\cos\varphi$ thì ta cần tính S và S'.

* **Cách 4:** Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính.

Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

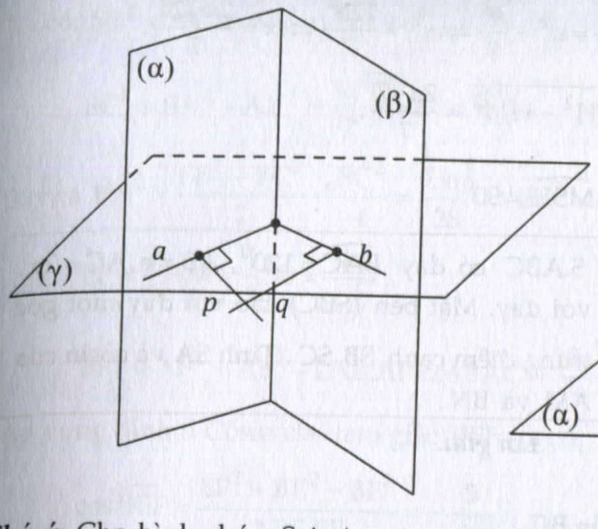
a)

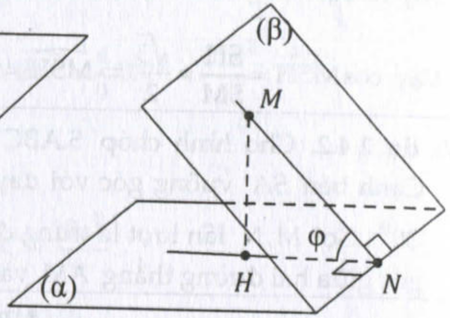
- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$.
- Chọn mặt phẳng $(\gamma)\perp\Delta$.
- Tìm các giao tuyến $a=(\gamma)\cap(\alpha), b=(\gamma)\cap(\beta)$, khi đó : $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)}=\widehat{(a,b)}$.

b)

- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$
- Lấy $M\in(\beta)$. Dựng hình chiếu H của M trên (α)
- Dựng $HN\perp\Delta\Rightarrow MN\perp\Delta$.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.



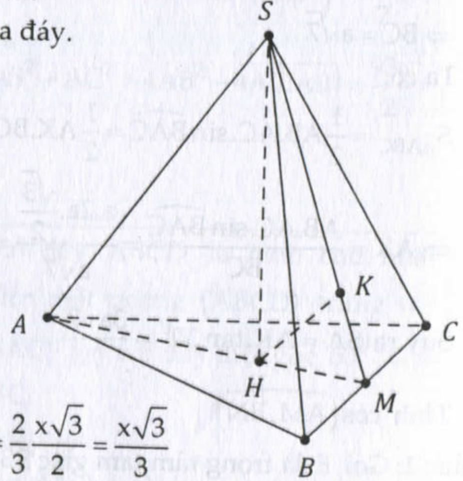


Chú ý: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đường cao SH. Để xác định góc giữa mặt phẳng (SA_iA_j) ($i,j\in\{1,2,...,n\}$; $i\neq j$) với mặt đáy ta làm như sau:

- Từ H vẽ $HK\perp A_iA_j$, $K\in A_iA_j$
- Khi đó $\widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SA_iA_j) và mặt đáy.

Ví dụ 2.4.1. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh bên bằng a. Mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Tính góc giữa đường cao của hình chóp và mặt bên.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, H là tâm của đáy.

Suy ra $SH\perp(ABC)$, $BC\perp(SAM)$

Do đó $\widehat{\left((SBC),(ABC)\right)}=\widehat{SMA}=60^0$.

Gọi K là hình chiếu của H lên SM

$\Rightarrow HK\perp SM, HK\perp BC\Rightarrow HK\perp(SBC)$

Hay SK là hình chiếu của SH lên mặt phẳng (SBC).

Suy ra $\widehat{\left(SH,(SBC)\right)}=\widehat{HSM}$.

Đặt $AB=x, x>0$. Suy ra $AH=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{3}$

Nên $SH^2=SA^2-AH^2=a^2-\frac{x^2}{3}$ (1).

Mặt khác: $HM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{6}\Rightarrow SH=HM.\tan 60^0=\frac{x}{2}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{x^2}{4}=a^2-\frac{x^2}{3}\Rightarrow x^2=\frac{12a^2}{7}\Rightarrow x=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $SH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$, $SM=\sqrt{SH^2+HM^2}=\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $\cos\widehat{MSH}=\frac{SH}{SM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{MSH}=30^0$.

Ví dụ 2.4.2. Cho hình chóp S.ABC có đáy $\widehat{BAC}=120^0$, $AB=a, AC=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SC. Tính SA và côsin của góc giữa hai đường thẳng AM và BN.

Lời giải.

- Tính SA

Gọi K là hình chiếu của A lên BC,

Suy ra $BC\perp(SAK)$ nên $\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{SKA}=30^0$.

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$
$$=a^2+4a^2-2a.2a.\left(-\frac{1}{2}\right)=7a^2$$

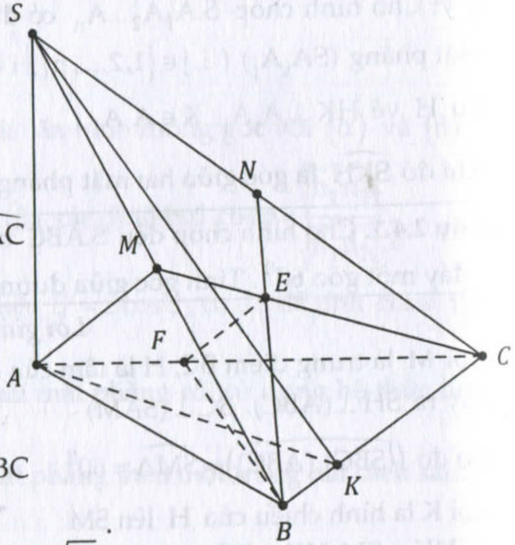
$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$

Ta có:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}AK.BC$$

$$\Rightarrow AK=\frac{AB.AC.\sin\widehat{BAC}}{BC}=\frac{a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Suy ra $SA=AK.\tan 30^0=\frac{3a\sqrt{7}}{7}$.



- Tính $\cos\widehat{(AM,BN)}$

Cách 1: Gọi E là trọng tâm tam giác SBC, F là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $AF=\frac{1}{2}FC$.

Khi đó $\frac{CE}{CM}=\frac{CF}{CA}\Rightarrow EF//AM$ nên $\widehat{(AM,BN)}=\widehat{(EF,BN)}$.

Ta có: $SB^2=SA^2+AB^2=\frac{9a^2}{7}+a^2=\frac{16a^2}{7}$

$$SC^2=SA^2+AC^2=\frac{9a^2}{7}+4a^2=\frac{37a^2}{7}$$

Suy ra $BN^2=\frac{SB^2+BC^2}{2}-\frac{SC^2}{4}=\frac{93a^2}{28}\Rightarrow BE^2=\frac{4}{9}BN^2=\frac{31a^2}{21}$

$$EF=\frac{2}{3}AM=\frac{1}{3}SB=\frac{4a}{3\sqrt{7}}.$$

$$BF^2=AF^2+AB^2-2AB.AF.\cos\widehat{BAC}=\frac{19a^2}{9}.$$

Áp dụng định lí Côsin cho tam giác BEF, ta có:

$$\cos\widehat{BEF}=\frac{EF^2+BE^2-BF^2}{2.BE.EF}=-\frac{3}{\sqrt{93}}.$$

Vậy $\cos(AM,BN)=\frac{3}{\sqrt{93}}$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}\right)$;

$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-2AB^2\right)=\frac{1}{4}\left(AB.AC.\cos\widehat{BAC}-2AB^2+AS^2\right)=-\frac{3}{7}a^2$.

$AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AS^2\right)=\frac{4a^2}{7}$, $BN^2=\frac{1}{4}\left(AS^2+AC^2+4AB^2-4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\right)=\frac{93a^2}{28}$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{AM,BN}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}\right|}{AM.BN}=\frac{3}{\sqrt{93}}$.

Ví dụ 2.4.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BC, SC.

1) Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy
2) Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AN và DM.

Lời giải.

1) Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD, H là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi I là hình chiếu của H lên AC, suy ra $AC \perp (SHI)$ nên góc SIH là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy. Do đó $\widehat{SIH} = 60^0$.

Ta có: $AC = 2a \Rightarrow AO = a$.

$$\frac{1}{2}HI.AO = S_{\Delta AHI} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABO} = \frac{1}{12}S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Do đó: $SH = HI.\tan 60^0 = \frac{a}{2}$.

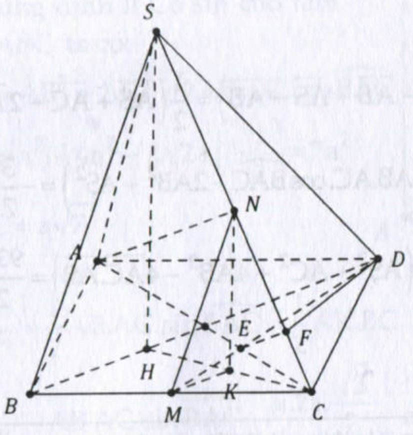
Gọi K là trung điểm $HC \Rightarrow NK // SH$, $NK = \frac{1}{2}SH = \frac{a}{4}$

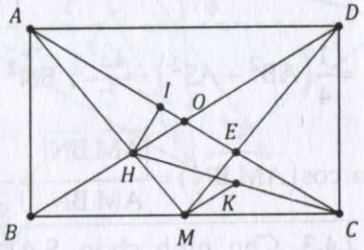
Vì $NK \perp (ABCD)$ nên MK là hình chiếu của MN lên mặt phẳng (ABCD).

Suy ra $\widehat{(MN,(ABCD))} = \widehat{NMK}$.

Vì $MK = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{3}BD = \frac{2a}{3}$ nên $\tan\widehat{NMK} = \frac{NK}{MK} = \frac{3}{8}$.

Suy ra $\widehat{NMK} = \arctan\left(\frac{3}{8}\right) \approx 21^0$.





2) Gọi E là giao điểm của DM và AC. Qua E dựng đường thẳng song song với AN, cắt SC tại F.

Khi đó $(AN, DM) = (EF, DE)$.

Ta có: $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$; $CH = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4} + 3a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$

Suy ra $AK^2 = \frac{AC^2 + AH^2}{2} - \frac{HC^2}{4} = \frac{73a^2}{36}$

Nên $AN^2 = AK^2 + KN^2 = \frac{41a^2}{18} \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{82}}{6} \Rightarrow EF = \frac{1}{3}AN = \frac{a\sqrt{82}}{18}$,

$DE = AH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{13}}{3}\right)^2 = \frac{61a^2}{36} \Rightarrow SC = \frac{a\sqrt{61}}{6}, CF = \frac{1}{6}SC = \frac{a\sqrt{61}}{36}$$

$$SD^2 = SH^2 + HD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{73a^2}{36}$$

Suy ra $\cos\widehat{SCD} = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC.CD} = \frac{2}{\sqrt{61}}$

Do đó $DF^2 = DC^2 + CF^2 - 2DF.CF.\cos\widehat{SCD} = \frac{1213a^2}{1296}$.

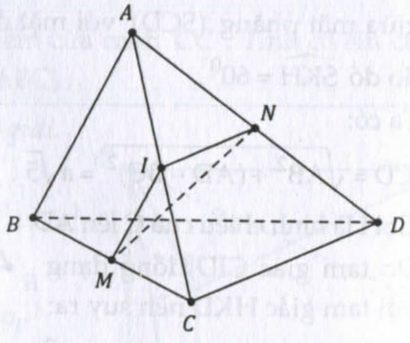
$\cos\widehat{DEF} = \frac{DE^2 + FE^2 - DF^2}{2.DE.FE} = \frac{\sqrt{574}}{224}$.

Vậy $\cos(AN, DM) = \frac{\sqrt{574}}{224}$.

Ví dụ 2.4.4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = CD = a$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Cách 1: Gọi I là trung điểm của AC.



Ta có: $\begin{cases} IM // AB \\ IN // CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$.

Đặt $\widehat{MIN} = \alpha$

Xét tam giác IMN có

$IM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, IN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo định lí côsin, ta có

$$\cos\alpha = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^0$ suy ra $\widehat{(AB, CD)} = 60^0$.

Cách 2: $\cos\left(\widehat{AB,CD}\right)=\cos\left(\widehat{IM,IN}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\Rightarrow\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IM^2+IN^2-2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM};$$

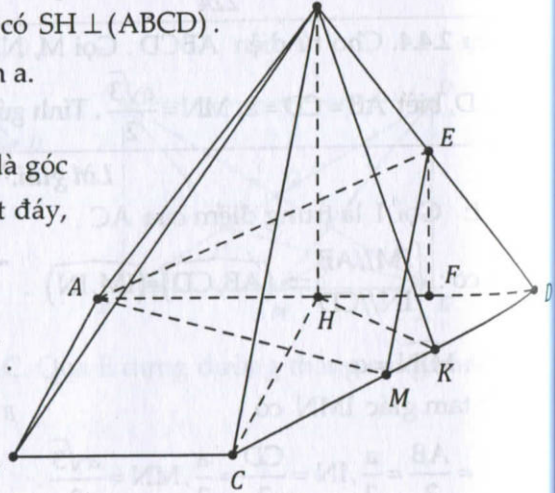
$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2}=-\frac{a^2}{8};$$

$$\cos\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left|\cos\left(\widehat{IM,IN}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\left(\widehat{AB,CD}\right)=60^0$.

Ví dụ 2.4.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=3a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm cạnh AD. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm đoạn CD. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và SC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD, ta có $SH\perp(ABCD)$.

Ta có ABCH là hình vuông cạnh a.

Từ H vẽ $HK\perp CD$, $K\in CD$.

Suy ra $CD\perp(SHK)$, nên $\widehat{SKH}$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy, do đó $\widehat{SKH}=60^0$.

Ta có:

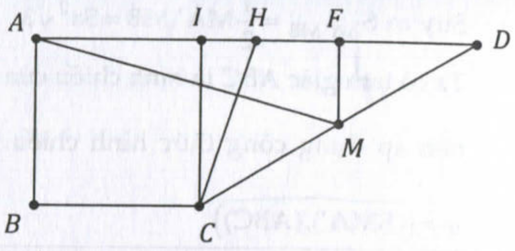
$$CD=\sqrt{AB^2+(AD-BC)^2}=a\sqrt{5}.$$

Gọi I là hình chiếu của C lên AD.

Do tam giác CID đồng dạng với tam giác HKD nên suy ra:

$$\frac{HK}{CI}=\frac{HD}{CD}\Rightarrow HK=\frac{HD.CI}{CD}=\frac{\frac{3a}{2}.a}{a\sqrt{5}}=\frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Do đó $SH=HK\tan 60^0=\dfrac{3a\sqrt{15}}{10}$.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SD và HD.

Ta có ME//SC, EF//SH,

$$EF=\frac{1}{2}SH=\frac{3a\sqrt{15}}{20}$$

và $(AM,SC)=(AM,ME)$.

Gọi I là hình chiếu của C lên AD, ta có:

$$IH=AH-AI=AH-BC=\frac{a}{2}\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Nên $ME=\dfrac{1}{2}SC=\dfrac{1}{2}\sqrt{CH^2+SH^2}=\dfrac{a\sqrt{185}}{20}$, $AF=\dfrac{3}{4}AD=\dfrac{9a}{4}$.

Suy ra $AE^2=AF^2+FE^2=\dfrac{27a^2}{5}$.

Ta có: $MF\perp AD\Rightarrow MF=\dfrac{1}{2}CI=\dfrac{a}{2}$, suy ra $AM=\sqrt{AF^2+MF^2}=\dfrac{a\sqrt{565}}{10}$.

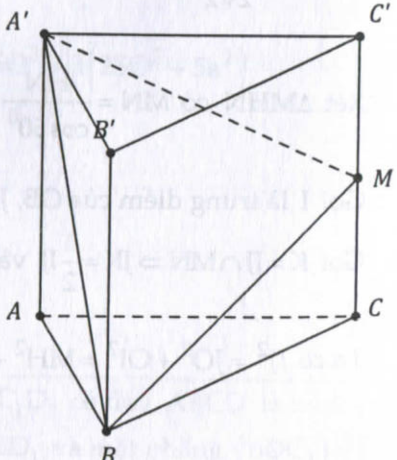
Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác AME, ta có:

$$\cos\widehat{AME}=\frac{AM^2+ME^2-AE^2}{2.MA.ME}=\frac{57}{4\sqrt{4181}}$$

Vậy $\cos(AM,SC)=\dfrac{57}{4\sqrt{4181}}$.

Ví dụ 2.4.6. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB=a$; $AC=2a$; $AA'=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120^o$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (BMA') với (ABC).

Lời giải.



Ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0=7a^2$$
$$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}.$$

$$A'M^2=A'C'^2+C'M^2=4a^2+5a^2=9a^2$$
$$\Rightarrow A'M=3a$$
$$BM^2=BC^2+CM^2=7a^2+5a^2=12a^2$$
$$\Rightarrow BM=2a\sqrt{3}.$$

$$A'B^2=A'A^2+AB^2=21a^2=A'M^2+BM^2$$

Suy ra tam giác A'MB vuông tại M.

Suy ra $S_{\Delta A'MB}=\frac{1}{2}MA'.MB=3a^2\sqrt{3}$.

Ta có tam giác ABC là hình chiếu của tam giác BMA' lên mặt phẳng (ABC), nên áp dụng công thức hình chiếu ta có: $\cos\varphi=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMA'}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3a^2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ với $\varphi=\widehat{((BMA'),(ABC))}$.

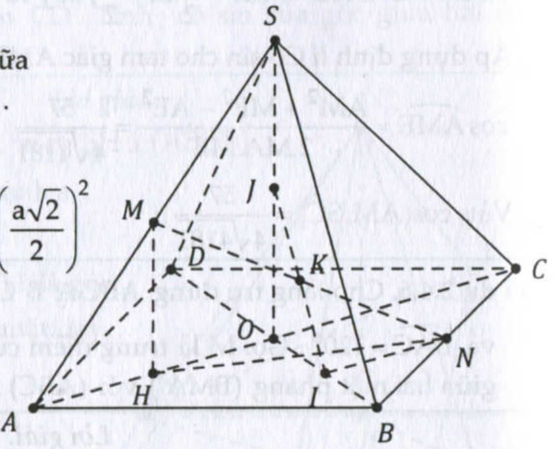
Ví dụ 2.4.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO\perp(ABCD)$; M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Biết góc giữa MN với $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời Giải

- **Cách 1:** Kẻ $MH//SO, H\in OA$.

Do $\begin{cases}MH//SO\\ SO\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow MH\perp(ABCD)$ suy ra NH là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$

$\Rightarrow\widehat{MNH}$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.



Ta có

$$HB^2=OH^2+OB^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow NH=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

Xét ΔMHN có $MN=\frac{HN}{\cos 60^0}=\frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $MH=NH\tan 60^0=\frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì MJ//IN và MJ = IN.

Gọi $K=IJ\cap MN\Rightarrow JK=\frac{1}{2}IJ$ và $MJ\perp(SBD)\Rightarrow\widehat{MKJ}$ là góc giữa MN và (SBD).

Ta có $IJ^2=JO^2+OI^2=MH^2+OI^2=\frac{15a^2}{8}+\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2=2a^2$

$\Rightarrow IJ=a\sqrt{2}$ và $IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\widehat{MKJ}=\varphi\Rightarrow\tan\varphi=\frac{MJ}{JK}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi=\arctan\frac{1}{2}$.

- **Cách 2:**

Ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2=\frac{1}{4}\left(SO^2+AC^2+OB^2\right)=\frac{1}{4}\left(SO^2+\frac{5a^2}{2}\right)\Rightarrow MN=\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}$.

Ta có φ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases}AC\perp SO\\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)$ nên chọn $\vec{n}=\overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\varphi=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}}=\frac{2a}{\sqrt{2SO^2+5a^2}}\quad(*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 nên

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.SO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 8SO^2=3\left(2SO^2+5a^2\right)$$

$\Leftrightarrow 2SO^2=15a^2$.

Thay vào (*) suy ra $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 2.4.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải

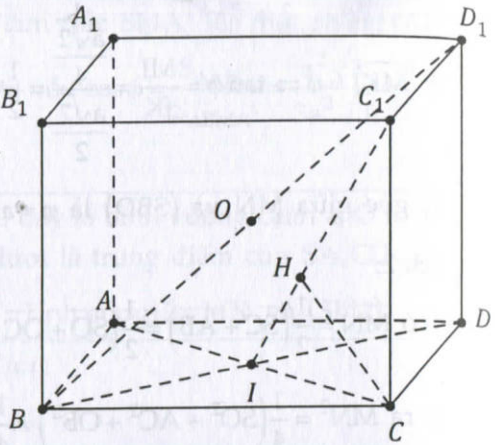
* **Cách 1:**

Gọi $I = AC \cap BD, O$ là trung điểm của BD_1 thì $O \in (CAA_1C_1)$.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CAA_1C_1)$.

Hạ $OH \perp IC_1, H \in IC_1$ thì $OH \perp (BDC_1)$,

vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là góc $\widehat{OBH} = \alpha$.



Đặt $AB = AD = a, AA_1 = b$ thì

$$BD_1 = \sqrt{AB^2 + AB^2 + DD_1^2} = \sqrt{2a^2 + b^2} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}.$$

Dễ thấy $HO = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right) + 5}}$

Do $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \ge 2 \Rightarrow \sin\alpha \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha \le \arcsin\dfrac{1}{3}$ (do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$).

Vậy $\max\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$ khi $a = b$.

* **Cách 2:** Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{x}, \overrightarrow{CD} = \vec{y}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = a, |\vec{z}| = b$

$\overrightarrow{BD_1} = -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, $\left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH \perp C_1I$ và $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (BDC_1)$.

Ta có $\dfrac{C_1H}{IH} = \dfrac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1} = \dfrac{CC_1^2}{CI^2} = \dfrac{b^2}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{2b^2}{a^2}$ nên

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{1 + \frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1} + \frac{\frac{2b^2}{a^2}}{1 + \frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI} = \frac{a^2}{a^2 + 2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2 + 2b^2}.\overrightarrow{2CI}$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + 2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2 + 2b^2}\overrightarrow{CI} = \frac{b^2}{a^2 + 2b^2}\vec{x} + \frac{b^2}{a^2 + 2b^2}\vec{y} + \frac{a^2}{a^2 + 2b^2}\vec{z}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \sqrt{\frac{b^4}{(a^2 + 2b^2)^2}\vec{x}^2 + \frac{b^4}{(a^2 + 2b^2)^2}\vec{y}^2 + \frac{a^4}{(a^2 + 2b^2)^2}\vec{x}^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CH}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|} = \dfrac{\left|\left(-\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)\left(\dfrac{b^2}{a^2 + 2b^2}\vec{x} + \dfrac{b^2}{a^2 + 2b^2}\vec{y} + \dfrac{a^2}{a^2 + 2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2 + b^2}\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

$$= \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)(2a^2 + b^2)}}.$$

Theo BĐT AGM ta có $\dfrac{ab}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)(2a^2 + b^2)}} \le \dfrac{ab}{\sqrt{3\sqrt[4]{a^2b^4}\,3\sqrt[4]{b^2a^4}}} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha \le \arcsin\dfrac{1}{3} \Rightarrow \max\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$ khi $a = b$.

Ví dụ 2.4.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải.

1) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$.

$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$.

Do đó $\widehat{BED}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy ABCD là nửa lục giác đều nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

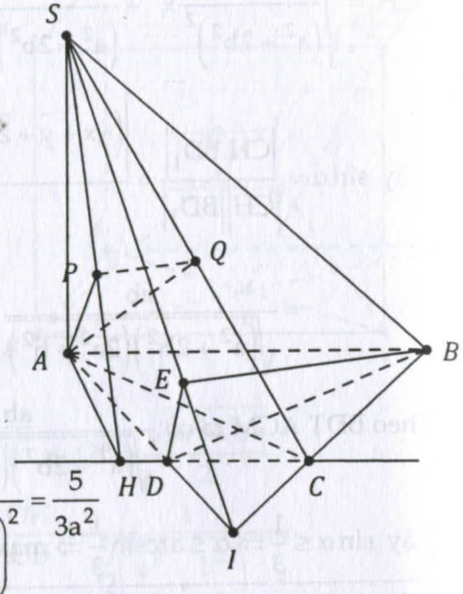
Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \dfrac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có :

$$\tan\widehat{BED} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{7} \Rightarrow \widehat{BED} = \arctan\sqrt{7}.$$

Vậy $\widehat{((SAD),(SBC))} = \arctan\sqrt{7}$



2) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD$

$\Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$

thì $AQ \perp (SBC)$.

Do đó $\widehat{PAQ} = \widehat{((SBC),(SCD))}$.

Trong tam giác SAH ta có :

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do $AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos\widehat{APQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{APQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

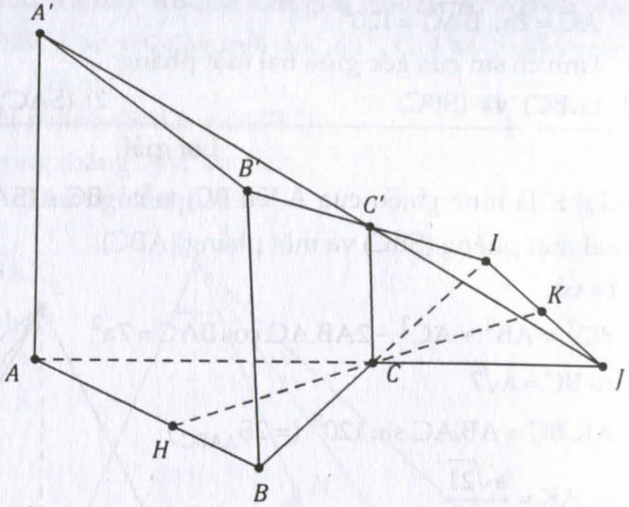
Vậy $\widehat{((SBC),(SCD))} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 2.4.10. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A, B, C lần lượt lấy các điểm A', B', C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $CH \perp AB, CH = a, AH = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $BAC = 45^0$.



Gọi $I = B'C' \cap BC$,

$J = A'C' \cap AC$.

Ta có $CC' = \frac{1}{2}BB'$

$\Rightarrow BC = CI$,

$CC' = \frac{1}{3}AA'$.

$\Rightarrow CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔBCH ta có

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Mặt khác: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.AB\cos C$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = -\frac{1}{10}.$$

Xét ΔICJ ta có: $IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos\widehat{ICJ} = \frac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC' \perp (ICJ)$ nên $C'K \perp IJ$.

Vậy $\widehat{C'KC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}$.

Ta có $S_{ICJ} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{3a^2}{4}$, mặt khác

$$S_{ICJ} = \frac{1}{2}IJ.CK \Rightarrow CK = \frac{2S_{ICJ}}{IJ} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{26}}.$$

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan\widehat{C'KC} = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1 + \tan^2\widehat{C'KC} = \frac{1}{\cos^2\widehat{C'KC}} \Rightarrow \cos\widehat{C'KC} = \frac{3}{\sqrt{35}}$.

Vậy $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC} \Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{S_{ABC}}{\cos\widehat{C'KC}} = \frac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

Ví dụ 2.4.11. Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$.

Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng:

1) (ABC) và (SBC) 2) (SAC) và (SBC).

Lời giải.

1) Gọi K là hình chiếu của A lên BC, ta có $BC\perp(SAK)$ nên $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7a^2$

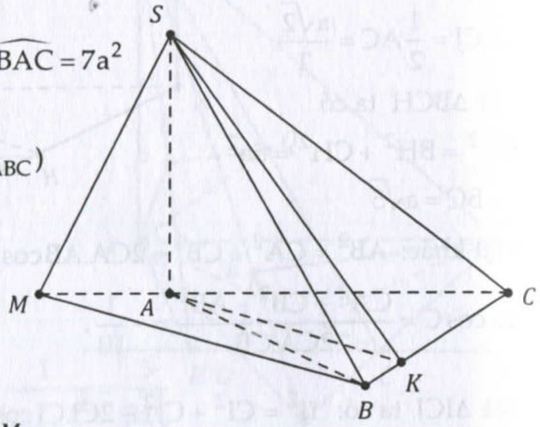
$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$

$AK.BC=AB.AC.\sin120^0\ (=2S_{\Delta ABC})$

$\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

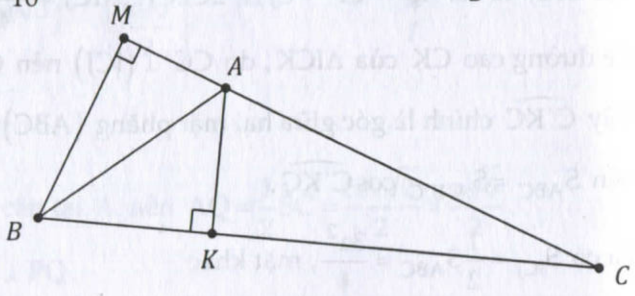
$\Rightarrow SK=\sqrt{SA^2+AK^2}=\frac{a\sqrt{70}}{7}$

Suy ra $\cos\widehat{SKA}=\frac{AK}{SK}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.



2) Gọi M là hình chiếu của B lên AC, ta có $BM\perp(SAC)$

Suy ra tam giác SMC là hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAC)



Theo công thức hình chiếu, ta có: $\cos\varphi=\frac{S_{\Delta SMC}}{S_{\Delta SBC}}$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

Ta có : $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SK.BC=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{70}}{7}.a\sqrt{7}=\frac{a^2\sqrt{10}}{2}$.

Do $\widehat{BAM}=60^0\Rightarrow AM=AB\cos60^0=\frac{a}{2}\Rightarrow S_{\Delta SMC}=\frac{1}{2}SA.MC=\frac{3a^2}{4}$

Vậy $\cos\varphi=\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Bài tập vận dụng

Bài 2.4.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB=a$ và $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và AC. Tính:

1) Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

2) Cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và BN.

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm BC, suy ra $AK\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAK)$

Do đó $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), hay $\widehat{SKA}=60^0$

Ta có: $\widehat{BAK}=60^0$

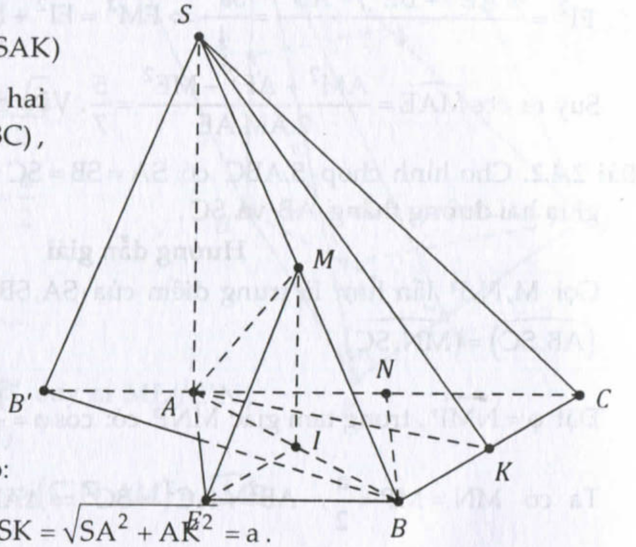
$\Rightarrow AK=AB.\cos60^0=\frac{a}{2}$,

$BK=AB.\sin60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAK, ta có:

$SA=AK.\tan60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SK=\sqrt{SA^2+AK^2}=a$.



1) Gọi B′ là hình chiếu của B lên AC, suy ra $BB'\perp(SAC)$ nên tam giác SB'C là hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAC). Do đó $\cos\varphi=\frac{S_{\Delta SB'C}}{S_{\Delta SBC}}$.

Ta có: $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SK.BC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

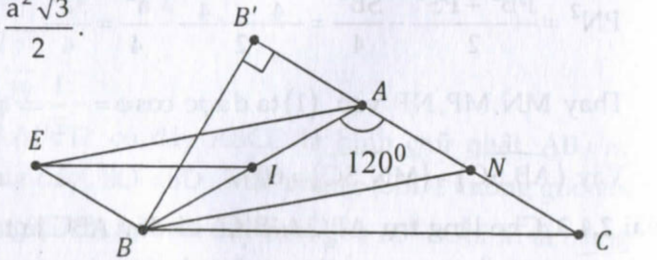
Do $\widehat{BAB'}=60^0$

$\Rightarrow AB'=AB\cos60^0=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow CB'=\frac{3a}{2}$

Nên $S_{\Delta SB'C}=\frac{1}{2}SA.CB'=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$

Vậy $\cos\varphi=\frac{3}{4}$.



2) Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình bình hành ANBE, suy ra AE//BN.

Do đó (AM, BN) = (AM, AE).

Ta có: $AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$,

$$AE = AN = \sqrt{AB^2 + AN^2 - 2AB.AN.\cos 120^0} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Gọi I là trung điểm AB, suy ra $MI//SA$, $MI = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$EI^2 = \frac{2(AE^2 + BE^2) - AB^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow EM^2 = EI^2 + MI^2 = \frac{15a^2}{16}$$

Suy ra $\cos\widehat{MAE} = \frac{AM^2 + AE^2 - ME^2}{2.AM.AE} = \frac{5}{7}$. Vậy $\cos(AM, BN) = \frac{5}{7}$.

Bài 2.4.2. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC, khi đó MN//AB nên $\left(\widehat{AB,SC}\right) = \left(\widehat{MN,SC}\right)$.

Đặt $\varphi = \widehat{NMP}$, trong tam giác MNP có: $\cos\varphi = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP}$ (1).

Ta có $MN = MP = \frac{a}{2}$, $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy

$PB^2 = AP^2 + AC^2 = \frac{5a^2}{4}$, $PS^2 = \frac{3a^2}{4}$. Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2 = \frac{PB^2 + PS^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

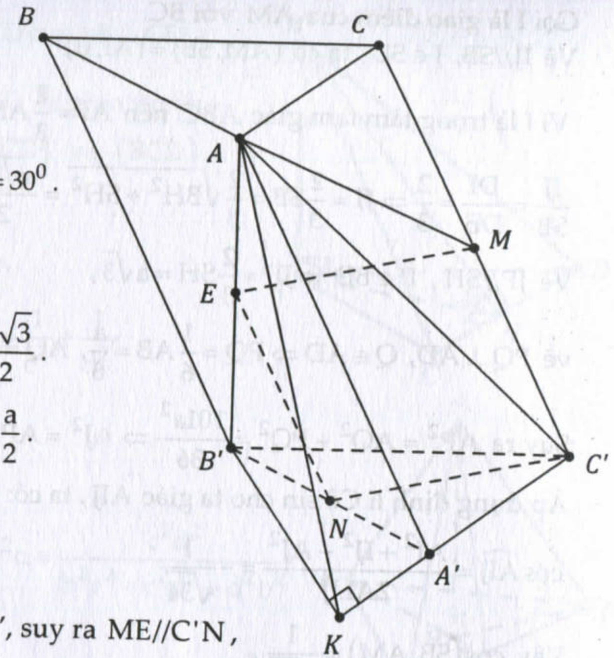
Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$.

Vậy $\left(\widehat{AB,SC}\right) = \left(\widehat{MN,SC}\right) = 60^0$.

Bài 2.4.3. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$ và AB' vuông góc với đáy (A'B'C'). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và A'B', mặt phẳng (AA'C') tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và C'N.

Hướng dẫn giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$



Gọi K là hình chiếu của B′ lên A′C′, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó

$\widehat{AKB'} = \left((A'B'C'),(AA'C')\right) = 30^0$.

Trong tam giác A'KB' có

$\widehat{KA'B'} = 60^0$, $A'B' = a$

Nên $B'K = A'B'\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AB' = B'K.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ:

$V = AB'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi E là trung điểm của AB′, suy ra ME//C'N, nên (C'N, AM) = (EM, AM)

Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM \Rightarrow (C'N, AM) = \widehat{AME}$

Ta có:

$$AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}.$$

Vậy $\cos\widehat{AME} = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Bài 2.4.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi O là tâm của đáy, $SO = SD$. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm đoạn BC. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và SB.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của OD, suy ra $SH \perp BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vẽ $HK \perp AB$, $K \in AB$. Suy ra $AB \perp (SKH) \Rightarrow \widehat{AKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$.

Ta có: $HK = \frac{3}{4}AB = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = HK.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là giao điểm của AM với BC.

Vẽ IJ//SB, $J \in SD$, ta có $(AM,SB) = (AI,IJ)$

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên $AI = \frac{2}{3}AM = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{IJ}{SB} = \frac{DI}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow JI = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{BH^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

Vẽ JP//SH, $P \in BD \Rightarrow JP = \frac{2}{3}SH = a\sqrt{3}$,

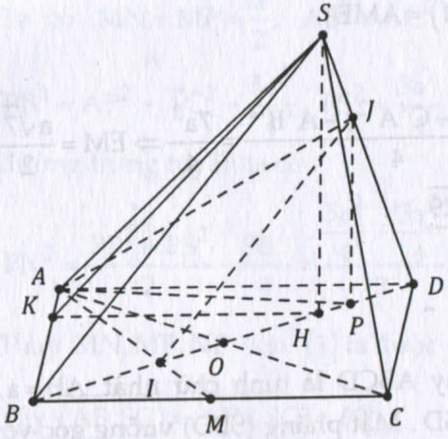
vẽ $PQ \perp AD$, $Q \in AD \Rightarrow PQ = \frac{1}{6}AB = \frac{a}{6}$, $AQ = \frac{5}{6}AD = \frac{5a}{3}$

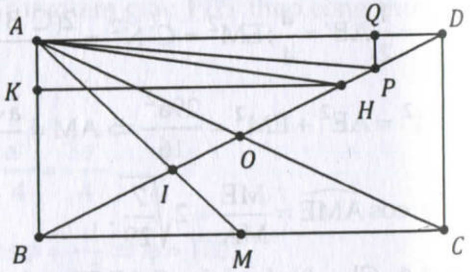
Suy ra $AP^2 = AQ^2 + PQ^2 = \frac{101a^2}{36} \Rightarrow AJ^2 = AP^2 + JP^2 = \frac{209a^2}{36}$

Áp dụng định lí Cô sin cho ta giác AIJ, ta có:

$$\cos\widehat{AIJ} = \frac{AI^2 + IJ^2 - AJ^2}{2AI.IJ} = -\frac{1}{\sqrt{34}}$$

Vậy $\cos(SB,AM) = \frac{1}{\sqrt{34}}$.





Bài 2.4.5. Cho tứ diện ABCD có $AB = b, AC = c, AD = d$ đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC).

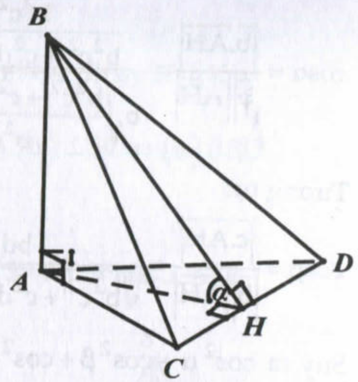
1) Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^0, \beta = 45^0, \gamma = 60^0$.

Hướng dẫn giải

1) Cách 1

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do



$$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD.$$

Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) nên $\alpha = \widehat{AHB}$.

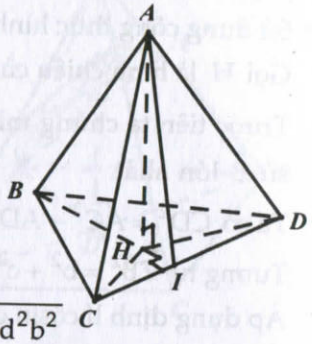
Ta có: $\tan\alpha = \frac{AB}{AH} = \frac{b}{AH}$,

mà $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$

nên $\tan\alpha = \frac{b\sqrt{c^2 + d^2}}{cd}$.

Mặt khác

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}.$$



Tương tự ta có:

$$\cos^2\beta = \frac{b^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2},\ \cos^2\gamma = \frac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH.BI = BA^2 = b^2 \\ IH.IB = IA^2 = \frac{c^2d^2}{c^2 + d^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{IH} = \frac{b^2(c^2 + d^2)}{c^2d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$,

mà $\frac{IC}{ID} = \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{d^2}{c^2 + d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2 + d^2}\overrightarrow{CD}$ nên

$$\overrightarrow{AH} = \frac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}\overrightarrow{AB} + \frac{b^2c^2 + d^2b^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2 + d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2 + d^2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}\vec{b} + \frac{d^2b^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}\vec{c} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}\vec{d}$$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng (ACD),(ABD),(ACB). Từ đó ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{b}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{\dfrac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\dfrac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}}=\frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Tương tự:

$$\cos\beta=\frac{\left|\vec{c}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{bd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}},\cos\gamma=\frac{\left|\vec{d}.\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}=\frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Suy ra $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

2) Sử dụng công thức hình chiếu

Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).

Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn. Không giảm tổng quát, giả sử $\hat{B}$ lớn nhất.

Ta có $CD^2=AC^2+AD^2=c^2+d^2$

Tương tự $CB^2=b^2+c^2, DB^2=b^2+d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có:

$$\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC.BD}=\frac{\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)-\left(c^2+d^2\right)}{2\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}}$$

$=\dfrac{2b^2}{2\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}}>0$. Do đó $\hat{B}$ nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases}AH\perp CD\\AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow BH\perp CD$, tương tự ta có $CH\perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD. Do đó

$$S_{BCD}=S_{HBC}+S_{HBD}+S_{HCD}=S_{ABC}\cos\gamma+S_{ABD}\cos\beta+S_{ACD}\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{2}bc\cos60^0+\frac{1}{2}bd\cos45^0+\frac{1}{2}cd\cos30^0=\frac{bc+\sqrt{2}bd+\sqrt{3}cd}{4}.$$

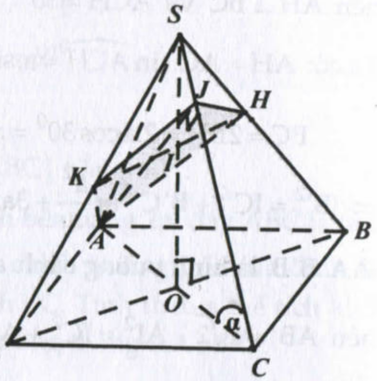
Bài 2.4.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO\perp(ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td}=\frac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K.

Do $\begin{cases}BD\perp SO\\BD\perp AC\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$ mà $(\alpha)\perp SC\Rightarrow(\alpha)//BD$.

Vậy $\begin{cases}BD\subset(SBD)\\BD//(\alpha)\\(SBD)\cap(\alpha)=HK\end{cases}\Rightarrow KH//BD\Rightarrow HK\perp(SAC)\Rightarrow HK\perp AJ$,



do đó $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI$.

Do $SO\perp(ABCD)\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra

$\left(SC,(ABCD)\right)=\widehat{SCO}=\varphi$.

Ta có $AJ=AC\sin\varphi=a\sqrt{2}\sin\varphi$;

$SO=OC\tan\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

$\Delta SOC\sim\Delta SJI\Rightarrow\widehat{SIJ}=\widehat{SCO}=\varphi\Rightarrow\widehat{AIO}=\widehat{SIJ}=\varphi$.

Từ đó ta có $OI=OA\cot\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi$.

$$\frac{HK}{BC}=\frac{SI}{SO}=1-\frac{OI}{SO}=1-\frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}=1-\cot^2\varphi$$

$\Rightarrow KH=BD\left(1-\cot^2\varphi\right)=a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\varphi\right)$.

Vậy $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI=a\sqrt{2}\sin\varphi.a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\varphi\right)=2a^2\sin\varphi\left(1-\cot^2\varphi\right)$

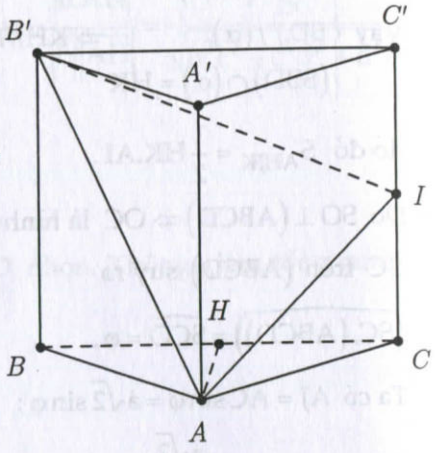
Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\varphi\left(1-\cot^2\varphi\right)=\frac{1}{2}a^2\Leftrightarrow4\sin^2\varphi-\sin\varphi-2=0$

$\sin\varphi=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ (do $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\varphi>0$) $\Leftrightarrow\varphi=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\varphi=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Bài 2.4.7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông tại A. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC.

Do ΔABC cân tại A

nên $AH \perp BC$ và $\widehat{ACH} = 30^0$

Ta có: $AH = AC.\sin\widehat{ACH} = a.\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$,

$BC = 2BH = 2.a\cos 30^0 = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow IB'^2 = IC'^2 + B'C'^2 = \dfrac{a^2}{4} + 3a^2 = \dfrac{13a^2}{4}$

$AA'B'B$ là hình vuông cạnh a

nên $AB' = a\sqrt{2}$, $AI^2 = IC^2 + AC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow AI^2 + AB'^2 = \dfrac{5a^2}{4} + 2a^2 = \dfrac{13a^2}{4} = IB'^2 \Rightarrow \Delta AB'I$ vuông tại A.

Ta có: $S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi $\varphi = \widehat{((ABC),(AB'I))} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Bài 2.4.8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo *a* và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC)

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $HA = HB = HC$ suy ra H là tâm tam giác đều ABC.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB.

Ta có $A'J = \sqrt{AA'^2 - AJ^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$;

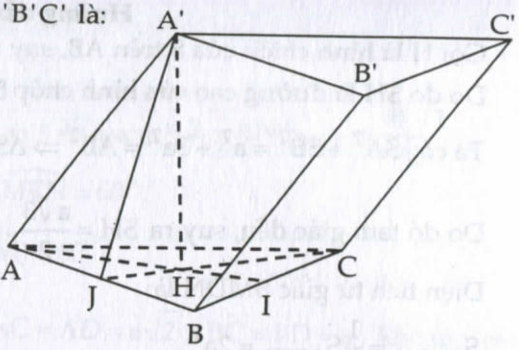
$HJ = \dfrac{1}{3}CJ = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = \sqrt{A'J^2 - HJ^2} = \dfrac{a}{2}$

Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V = A'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vì $\begin{cases} A'J \perp AB \\ CJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'CJ) \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{A'JC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

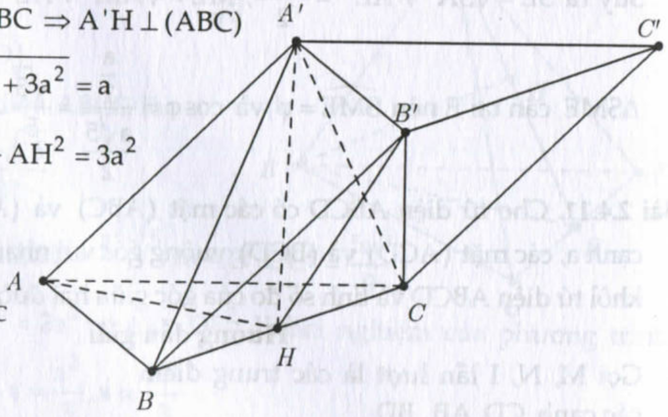


Ta có: $\tan\widehat{A'JC} = \dfrac{A'H}{JH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'JC} = 60^0$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60^0.

Bài 2.4.9. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

và $AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$.

Vậy

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt).

Trong tam giác vuông A'B'H có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác B'BH cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = \widehat{B'BH}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{a}{2.2a} = \dfrac{1}{4}$.

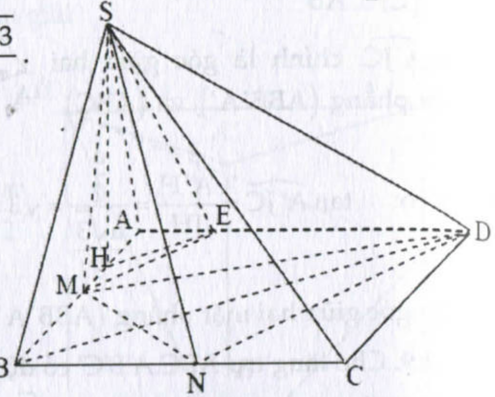
Bài 2.4.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.



Do đó tam giác đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác BMDN là:

$S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ ME//DN $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\widehat{SM, ME} = \varphi$.

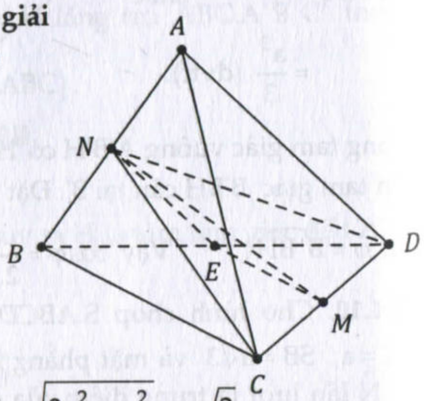
Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

Suy ra $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

ΔSME cân tại E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 2.4.11. Cho tứ diện ABCD có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Hãy tính theo a thể tích khối tứ diện ABCD và tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, I lần lượt là các trung điểm các cạnh CD, AB, BD

$\Rightarrow V_{ABCD} = 2V_{AMCD}$.

$\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp CN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCN) \Rightarrow AB \perp MN$

Do ΔACD cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD$

$\Rightarrow AM \perp (BCD)$

$\Rightarrow AM \perp BM \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow DM = \sqrt{ND^2 - NM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta CND} = MN.MD = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Vậy thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = 2V_{ANCD} = 2.\frac{1}{3}AN.S_{NCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có ΔMNE là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MEN} = 60^0$.

Do $\begin{cases} NI//AD \\ IM//BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AD, BC)} = \widehat{(NI, IM)} = 60^0$.

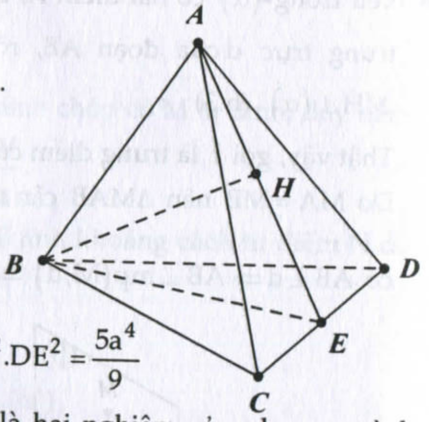
Bài 2.4.12. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Biết thể của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$.

Ta có ΔACD cân tại A nên $CD \perp AE$. Tương tự $CD \perp BE$

Suy ra $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$



Mà $BH \perp AE \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Gọi $\alpha = \widehat{((ACD),(BCD))}$.

Thể tích của khối tứ diện ABCD là

$V = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta ACD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27}$

$\Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE.DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{9} \Rightarrow AE^2.DE^2 = \frac{5a^4}{9}$

Mặt khác: $AE^2 + DE^2 = 2a^2 \Rightarrow AE^2, DE^2$ là hai nghiệm của phương trình:

$x^2 - 2a^2x + \frac{5a^4}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{3}, x = \frac{5a^2}{3}$

Vì $DE < a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AE = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Xét ΔBED vuông tại E nên $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét ΔBHE vuông tại H nên $\sin\alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Vậy góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^0$.

§ 5. KHOẢNG CÁCH

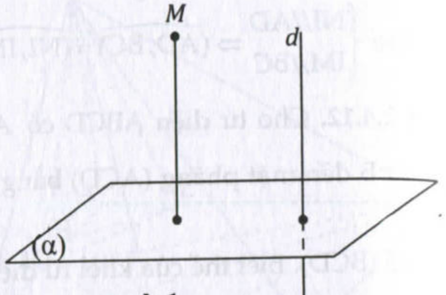
1. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) ta có các cách sau:

Cách 1: Xác định hình chiếu vuông góc H của M lên (α).

Để xác định được vị trí hình chiếu H ta có một số lưu ý sau:

- Nếu có $d\perp(\alpha)$ thì $MH//d$. (h.1)
- Chọn (β) chứa điểm M và $(\beta)\perp(\alpha)$, rồi xác định giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$.



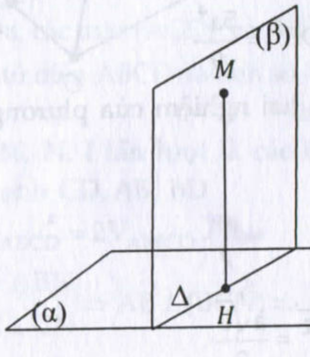
h.1

Trong (β) dựng $MH\perp\Delta\Rightarrow MH\perp(\alpha)$. (h.2)

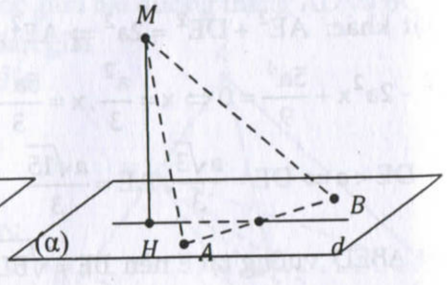
- Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho $MA=MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH\perp d$. Khi đó $MH\perp(\alpha)$ (h.3)

Thật vậy, gọi I là trung điểm của AB.

Do $MA=MB$ nên ΔMAB cân tại $M\Rightarrow MI\perp AB\subset(\alpha)$. Lại có $AB\perp d\Rightarrow AB\perp mp(M,d)\Rightarrow AB\perp MH$. Vậy $\begin{cases}MH\perp AB\\ MH\perp d\end{cases}\Rightarrow MH\perp(\alpha)$.



h.2



h.3

- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA\perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d'\perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH\perp d'\Rightarrow MH\perp(\alpha)$ (h. 4)

Thật vậy , do $d\perp d'$ và $d\perp MA\Rightarrow d\perp mp(M,d')\Rightarrow d\perp MH$.

Lại có $MH\perp d'\Rightarrow MH\perp mp(d,d')\equiv(\alpha)$.

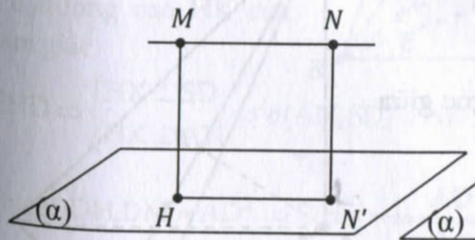
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1,A_2,...,A_n\ (n\geq 3)$ mà $MA_1=MA_2=...=MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1,MA_2,...,MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1,A_2,...,A_n\ (n\geq 3)$ mà các mặt phẳng $(MA_1A_2),(MA_2A_3),\ ...,(MA_nA_1)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tư như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:

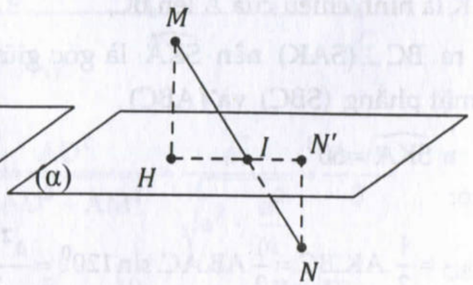
  Nếu tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

Cách 2: Sử dụng công thức thể tích: Xét một hình chóp có M là đỉnh, đáy nằm trong mặt phẳng (α). Khi đó: $d(M,(\alpha))=\dfrac{3V}{S_d}$.

Cách 3: Chuyển việc tính khoảng cách từ M về tính khoảng cách từ điểm N dễ tính hơn bằng cách sử dụng các kết quả sau:

- Nếu $MN//(\alpha)$ thì $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))$.
- Nếu $MN\cap(\alpha)=\{I\}$ thì $d(M,(\alpha))=\dfrac{MI}{NI}.d(N,(\alpha))$.





2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1: Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b)=MN$.

Chú ý: Nếu $a\perp b$ thì ta dựng đoạn vuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng $OH\perp b$.

Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Dựng mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b, khi đó:

$d(a,b)=d(a,(\alpha))=d(M,(\alpha))$ với M là điểm bất kì thuộc (α).

Cách 3: Dựng hai mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b, (β) đi qua b và song song với a. Khi đó: $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))$.

Cách 4: Phương pháp véc tơ:

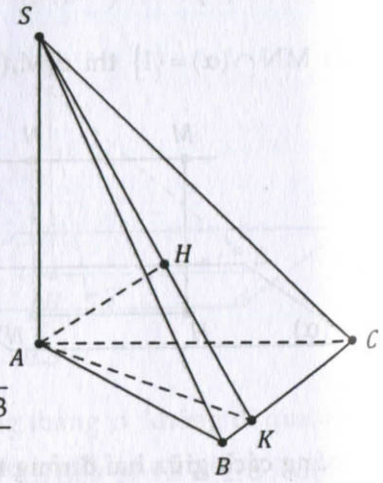
MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$

Ví dụ 2.5.1. Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$; AB = a, AC = 2a, $\widehat{BAC}=120^0$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0.

Tính :

1) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)
2) Khoảng cách từ B đến (SAC).

Lời giải.



Áp dụng định lí cô sin, ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7a^2$

$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$

Gọi K là hình chiếu của A lên BC,

Suy ra $BC\perp(SAK)$ nên $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Suy ra $\widehat{SKA}=60^0$.

Ta có:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AK.BC=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Rightarrow SA=AK.\tan 60^0=\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

1) Gọi H là hình chiếu của A lên SK.

Do $BC\perp(SAK)\Rightarrow BC\perp AH\Rightarrow AH\perp(SBC)$

Suy ra $d(A,(SBC))=AH=\frac{SA.AK}{\sqrt{SA^2+AK^2}}=\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

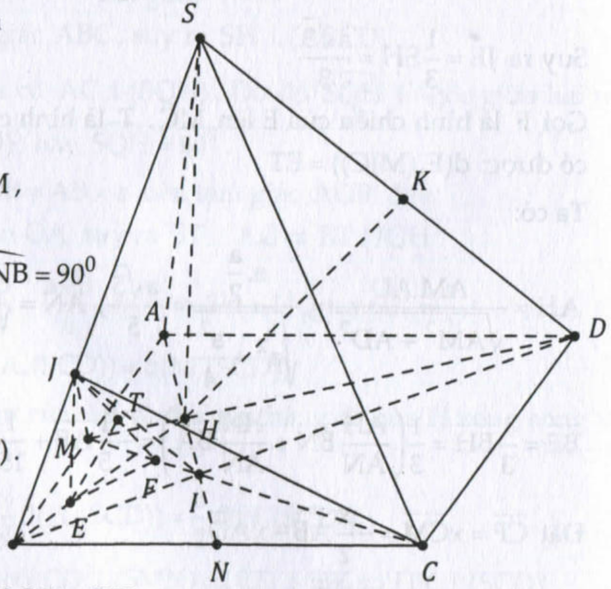
2) Ta có: $V_{S\,ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{3a}{\sqrt{7}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{21}}{14}$, $S_{\Delta SAC}=\frac{1}{2}SA.AC=\frac{3a^2}{\sqrt{7}}$

Suy ra $d(B,(SAC))=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.5.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Hai đường thẳng AN, DM cắt nhau tại H, SH vuông góc với mặt đáy và $SH=a\sqrt{3}$. Tính

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và SD.
2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SD.

Lời giải.



1) Xét hai tam giác ABN và DAM có

$AB=DA,\ BN=AM,$

$\widehat{ABN}=\widehat{DAM}=1v$

Nên suy ra $\Delta ABN=\Delta DAM$,

Do đó

$\widehat{MAH}+\widehat{AMH}=\widehat{MAH}+\widehat{ANB}=90^0$

Dẫn đến $\widehat{AHM}=90^0$

hay là $AN\perp DM$.

Lại có $SH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SH\perp AN\Rightarrow AN\perp(SHD)$.

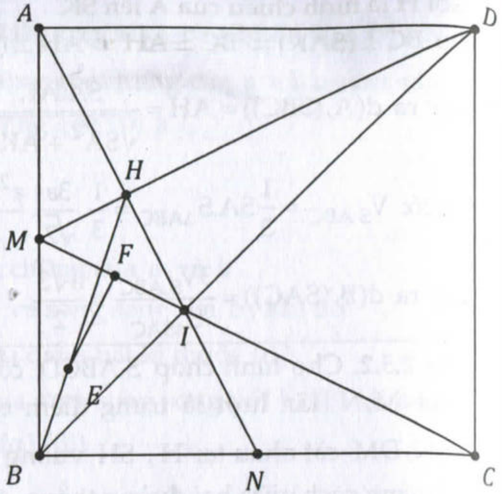
Vẽ đường cao HK của tam giác

$SHD\Rightarrow\begin{cases}HK\perp SD\\ HK\perp AN\end{cases}\Rightarrow d(AN,SD)=HK$.

Ta có: $DH.DM=AD^2\Rightarrow DH=\frac{AD^2}{\sqrt{AD^2+AM^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HD^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}\Rightarrow HK=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(AN,SD)=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.



2) Gọi $I=BD\cap CM$, qua I vẽ đường thẳng song song với SD cắt SB tại J.

Khi đó $JI//SD\Rightarrow SD//(CJM)$, do đó $d(CM,SD)=d(D,(CMJ))$

$$=\frac{DI}{BI}d(B,(CMJ))$$

Mà $\dfrac{DI}{BI}=\dfrac{DC}{MB}=2$

nên $d(CM,SD)=2d(B,(CMJ))$.

Gọi E là hình chiếu của J lên BH,

suy ra $JE\perp(ABCD)$ và $\dfrac{BE}{BH}=\dfrac{JE}{SH}=\dfrac{BJ}{BS}=\dfrac{BI}{BD}=\dfrac{1}{3}$

Suy ra $JE=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi F là hình chiếu của E lên MC, T là hình chiếu của E lên JF. Khi đó ta có được: $d(E,(MJC))=ET$.

Ta có:

$$AH=\frac{AM.AD}{\sqrt{AM^2+AD^2}}=\frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{a\sqrt{5}}{5},\ AN=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{AH}{AN}=\frac{2}{5};$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\left(\frac{AH}{AN}\overrightarrow{BN}+\frac{HN}{AN}\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{15}\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}.$$

Đặt $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{CM}=-\dfrac{x}{2}\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{15}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}-\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{x}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{14}{15}-x\right)\overrightarrow{AD}.$$

Vì $EF\perp CM$ nên $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CM}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(x-\dfrac{14}{15}\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{62}{75}$.

Suy ra $\overrightarrow{EF}=-\dfrac{16}{75}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{75}\overrightarrow{AD}\Rightarrow EF^2=\dfrac{8^2}{75^2}\left(4AB^2+AD^2\right)\Rightarrow EF=\dfrac{8a\sqrt{5}}{75}$.

Từ đó ta có được: $ET=\dfrac{EJ.EF}{\sqrt{EJ^2+EF^2}}=\dfrac{8a}{\sqrt{1317}}$.

Gọi X là giao điểm của BH với CM, khi đó: $\dfrac{BX}{EX}=\dfrac{d(B,CM)}{EF}=\dfrac{AH}{EF}=\dfrac{15}{8}$.

Do đó, ta có: $d(B,(CMJ))=\dfrac{15}{8}d(E,(CMJ))=\dfrac{15}{8}.ET=\dfrac{15a}{\sqrt{1317}}$.

Vậy $d(CM,SD)=\dfrac{30a}{\sqrt{1317}}$.

Ví dụ 2.5.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) tạo với đáy một góc 60^0.

1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD)

2) Gọi I là trung điểm SB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SD.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Kẻ $HQ\perp QC, Q\in AC$, ta có $AC\perp(SQH)$. Do đó $\widehat{SQH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD), hay $\widehat{SQH}=60^0$.

Ta có $AC=2a\Rightarrow OA=OB=AB=a$ nên tam giác AOB đều.

Gọi T là trung điểm đoạn OA, suy ra $BT\perp AC\Rightarrow BT//QH$

Do đó $QH=\dfrac{1}{3}BT=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $SH=HQ.\tan 60^0=\dfrac{a}{2}$.

1) Ta có $AB//(SCD)$ nên $d(A,(SCD))=d(M,(SCD))$.

Trong đó M là giao điểm của AB và đường thẳng đi qua H song song với BC. Gọi $N=MH\cap CD$

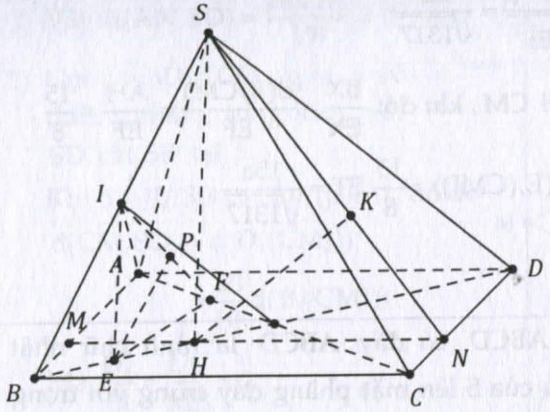
Suy ra: $d(M,(SCD))=\dfrac{MN}{HN}d(H,(SCD))=\dfrac{3}{2}d(H,(SCD))$

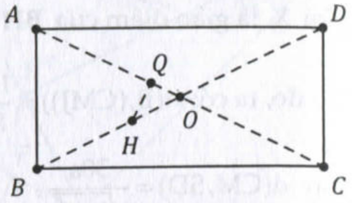
Vẽ $HK\perp SN, K\in SN$. Ta có $CD\perp(SMN)\Rightarrow CD\perp HK\Rightarrow HK\perp(SCD)$

Suy ra $d(H,(SCD))=HK$.

Vì $HN=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $HK=\dfrac{HN.SH}{\sqrt{HN^2+SH^2}}=\dfrac{2a\sqrt{19}}{19}$.

Vậy $d(A,(SCD))=\dfrac{3a\sqrt{19}}{19}$.





2) Gọi E là hình chiếu của I lên BD, suy ra $IE//SH \Rightarrow IE \perp (ABCD)$ và E là trung điểm đoạn BH.

Gọi O là giao của hai đường chéo AC, BD. Ta có $OI//SD \Rightarrow SD//(AOI)$

Do đó $d(AI,SD) = d(SD,(AOI)) = d(D,(AOI)) = \dfrac{OD}{OE}d(E,(AOI)) = \dfrac{2}{3}d(E,(AOI))$

Gọi F là hình chiếu của E lên AC, P là hình chiếu của E lên IF.

Khi đó: $AC \perp (IEF) \Rightarrow AC \perp EP \Rightarrow EP \perp (AOI) \Rightarrow d(E,(AIO)) = EP$.

Ta có $IE = \dfrac{1}{2}SH = \dfrac{a}{4}$, $EF = 2HQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $EP = \dfrac{EF.EI}{\sqrt{EF^2 + EI^2}} = \dfrac{a\sqrt{19}}{19}$.

Vậy $d(AI,SD) = \dfrac{2a\sqrt{19}}{57}$.

Chú ý:

1) Thông thường việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau được chuyển về tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, bằng cách dựng mặt phẳng song song. Khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng mà chân đường cao khó dựng thì ta thường sử dụng công thức chuyển điểm để chuyển về điểm khác mà chân đường cao dễ dựng hơn (ta thường chuyển về chân đường cao của một hình chóp nào đó) hoặc sử dụng công thức thể tích.

2) Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SD ta có thể giải theo cách khác như sau:

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AD},\ \vec{c} = \overrightarrow{HS} \Rightarrow |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = a\sqrt{3}, |\vec{c}| = \dfrac{a}{2}$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AI và SD, $M \in AI, N \in SD$ và giả sử $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{SD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HS} + \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{HS}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HS}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow 6\overrightarrow{AI} = 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HS} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{HS} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{SD} = -2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Suy ra : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{SD}$

$$= x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \vec{b} + y\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\vec{a} + \left(1 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}x - y\right)\vec{c}$$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{MN} = (2x - 4y)\vec{a} + (6 + x + 4y)\vec{b} + (3x - 6y)\vec{c}$

Ta có: $\begin{cases} MN \perp AI \\ MN \perp SD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\overrightarrow{MN}.6\overrightarrow{AI} = 0 \\ 6\overrightarrow{MN}.3\overrightarrow{SD} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(2x-4y)\vec{a}^2 + (6+x+4y)\vec{b}^2 + 3(3x-6y)\vec{c}^2 = 0 \\ -2(2x-4y)\vec{a}^2 + 2(6+x+4y)\vec{b}^2 - 3(3x-6y)\vec{c}^2 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2.5.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SB.

1) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

2) Tính khoảng cách giữa AM và CD.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AD, suy ra $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi E là giao điểm của AB và CD, suy ra B là trung điểm của AE.

Ta có:

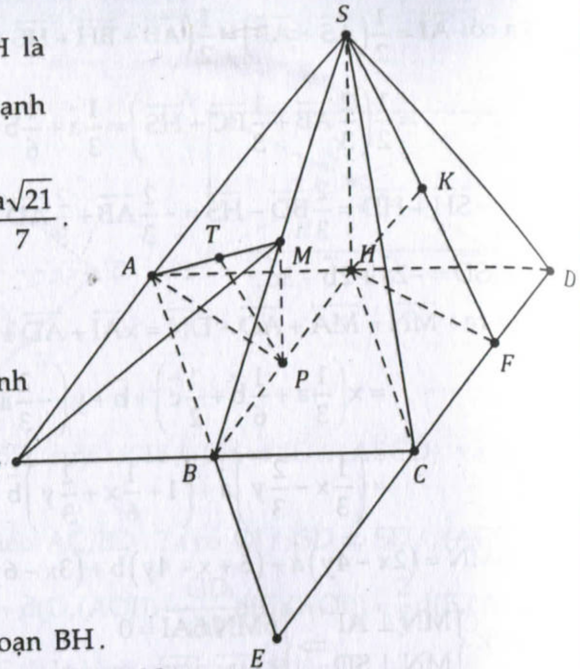
$$d(M,(SCD)) = \frac{MS}{BS}d(B,(SCD)) = \frac{1}{2}.\frac{BE}{AE}.d(A,(SCD))$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{AD}{AH}d(H,(SCD)) = \frac{1}{2}d(H,(SCD))$$

Vẽ $HF \perp CD$, $HK \perp SF$, suy ra

$CD \perp (SHF) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HK$

Ta có tam giác CHD là tam giác vuông cân tại H nên F là trung điểm cạnh CD



Do đó $HF = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. SH là đường cao tam giác đều cạnh 2a nên $SH = a\sqrt{3}$

Suy ra $HK = \frac{HF.SH}{\sqrt{HF^2 + SH^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(H,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

2) **Cách 1:** Dựng hình bình hành ADCN, suy ra $CD//(AMN)$

Nên

$$d(AM,CD) = d(CD,(AMN))$$
$$= 2d(H,(AMN))$$
$$= 2d(P,(AMN))$$

Trong đó P là trung điểm đoạn BH.

Vì $MP//SH \Rightarrow MP \perp (ABCD) \Rightarrow MP \perp AN$.

Mặt khác, tam giác ABH vuông cân tại A nên $AP \perp BH \Rightarrow AP \perp AN$

Suy ra $AN \perp (AMP)$. Kẻ đường cao PT của tam giác AMP, suy ra

$PT \perp AN, PT \perp AM \Rightarrow PT \perp (AMN)$ hay $d(P,(AMN)) = PT$.

Ta có $AP = \frac{1}{2}BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $MP = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Nên $PT = \frac{AP.MP}{\sqrt{AP^2 + MP^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $d(AM,CD) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Cách 2: Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{b}$, $\overrightarrow{HS} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = a$, $|\vec{c}| = a\sqrt{3}$.

Gọi XY là đoạn vuông góc chung của AM, CD; $\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DY} = y\overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HS}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} = \vec{a} - \vec{b}$

Suy ra $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{YD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AX} = -y\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AM}$

$$= -y\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - 2\vec{b} + \frac{x}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\frac{x}{2} - y\right)\vec{a} + \left(\frac{x}{2} + y - 2\right)\vec{b} + \frac{x}{2}\vec{c}$$

Vì $\begin{cases} XY \perp AM \\ XY \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{XY}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ \overrightarrow{XY}.\overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} - y\right)\vec{a}^2 + \left(\frac{x}{2} + y - 2\right)\vec{b}^2 + \frac{x}{2}\vec{c}^2 = 0 \\ \left(\frac{x}{2} - y\right)\vec{a}^2 - \left(\frac{x}{2} + y - 2\right)\vec{b}^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x - 2 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{YX} = -\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$

Suy ra $XY^2 = \frac{9\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 + 4\vec{c}^2}{25} = \frac{30a^2}{25} \Rightarrow XY = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

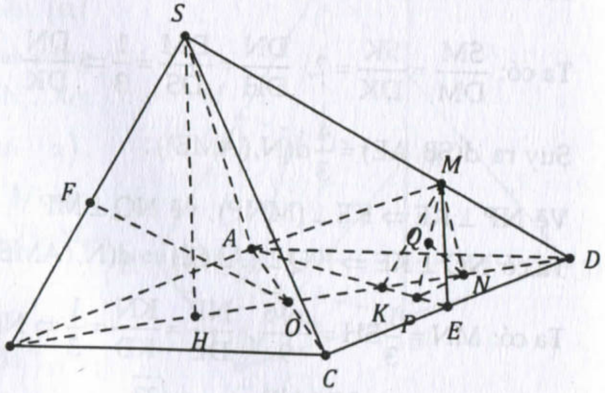
Vậy $d(AM,CD) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Ví dụ 2.5.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $SD = a\sqrt{2}$, $SA = SB = SC = a$. Gọi E là trung điểm cạnh CD. Tính :

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AE và SB.

Lời giải.

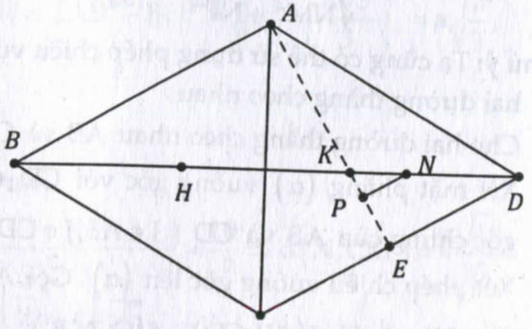


Vì SA = SB = SC nên hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $H \in BD$ và $SH \perp (ABCD)$.

Do ABCD là hình thoi nên $AO \perp BD$ (O là tâm của hình thoi ABCD).

Suy ra $AO \perp (SBD)$

Mà $AS = AB = AD = a$ nên ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD, mà O là trung điểm BD nên ta suy ra tam giác SBD vuông tại S, suy ra



$BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra tam giác ABC đều nên $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

1) Vẽ đường cao OF của tam giác SOB, ta có $OF \perp SB$.
Mặt khác $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OF \Rightarrow OF$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB. Hay $d(AC,SB) = OF$.

Ta có: $OF.SB = SH.BO \Rightarrow FO = \dfrac{SH.OB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Gọi K là giao điểm của AE với BD, K là trọng tâm tam giác ADC.
Từ K vẽ đường thẳng song song với SB, cắt SD tại M. Suy ra SB//(AME)

Suy ra $d(SB,AE) = d(SB,(AME)) = d(S,(AME)) = \dfrac{SM}{DM}.d(M,(AME))$.

Từ M vẽ MN//SH, $N \in BD$, suy ra $d(D,(AME)) = \dfrac{DK}{NK}d(N,(AME))$.

Ta có: $\dfrac{SM}{DM} = \dfrac{SK}{DK} = 2,\ \dfrac{DN}{DH} = \dfrac{DM}{DS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{DN}{DK} = \dfrac{2}{3}$

Suy ra $d(SB,AE) = \dfrac{4}{3}d(N,(AME))$.

Vẽ $NP \perp KE \Rightarrow KE \perp (MNP)$, vẽ $NQ \perp MP$.

Ta có $NQ \perp KE \Rightarrow NQ \perp (AME) \Rightarrow d(N,(AME)) = NQ$.

Ta có: $MN = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{9},\ \dfrac{NP}{DE} = \dfrac{KN}{KD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NP = \dfrac{1}{3}DE = \dfrac{a}{6}$.

Suy ra $NQ = \dfrac{NM.NP}{\sqrt{NM^2 + NP^2}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{33}$. Vậy $d(SB,AE) = \dfrac{a\sqrt{22}}{33}$.

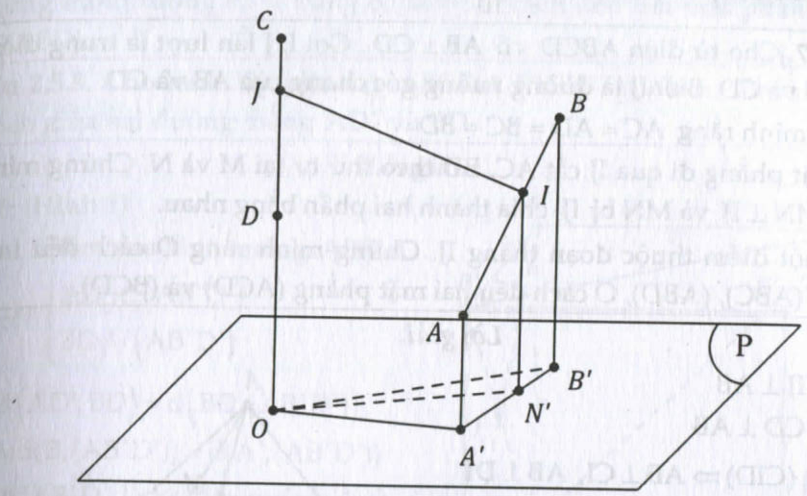
Chú ý: Ta cũng có thể sử dụng phép chiếu vuông góc để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O. Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I \in AB, J \in CD$).

Xét phép chiếu vuông góc lên (α). Gọi A', B', I' là hình chiếu của A, B, I thì $IJ = OI'$, từ đó $d(AB,CD) = d(O,A'B')$.

Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).



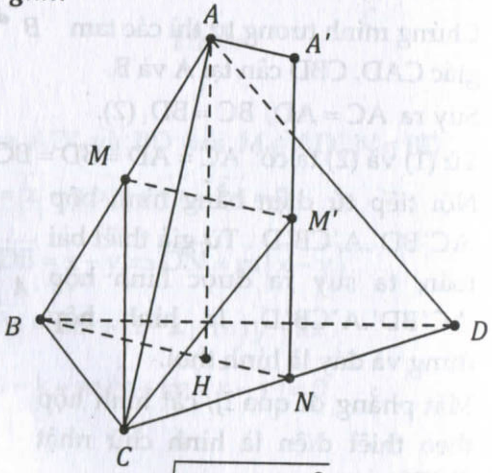
Ví dụ 2.5.6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH \perp (BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha) \perp BN$. Xét phép chiếu vuông góc lên (α).

Gọi A', B', C', D', H', M', N' lần lượt là ảnh của A, B, C, D, H, M, N thì $B' \equiv N' \equiv H' \equiv N$, $C' \equiv C, D' \equiv D$.

Ta có $d(CM,BN) = d(N,CM')$.



$BH = \dfrac{2}{3}BN = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$,

$NM' = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Tam giác NCM' vuông tại N nên :

$$\frac{1}{d^2(N,CM')} = \frac{1}{CN^2} + \frac{1}{NM'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{10}{a^2} \Rightarrow d(N,CM') = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d(CM,BN)=d(N,CM')=\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 2.5.7. Cho tứ diện ABCD có $AB\perp CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

1) Chứng minh rằng $AC=AD=BC=BD$

2) Một mặt phẳng đi qua IJ cắt AC, BD theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng $MN\perp IJ$ và MN bị IJ chia thành hai phần bằng nhau.

3) O là một điểm thuộc đoạn thẳng IJ. Chứng minh rằng O cách đều mặt phẳng (ABC), (ABD), O cách đều hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Lời giải.

1) Ta có: $\begin{cases} IJ\perp AB \\ CD\perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow AB\perp (CID)\Rightarrow AB\perp CI, AB\perp DI$

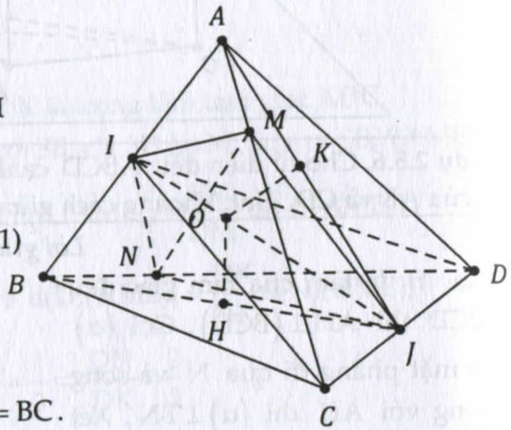
Suy ra các tam giác ACB, ADB là những tam giác cân tại C và D.

Từ đó suy ra $AC=BC$, $AD=BD$ (1)

Chứng minh tương tự thì các tam giác CAD, CBD cân tại A và B.

Suy ra $AC=AD$, $BC=BD$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $AC=AD=BD=BC$.

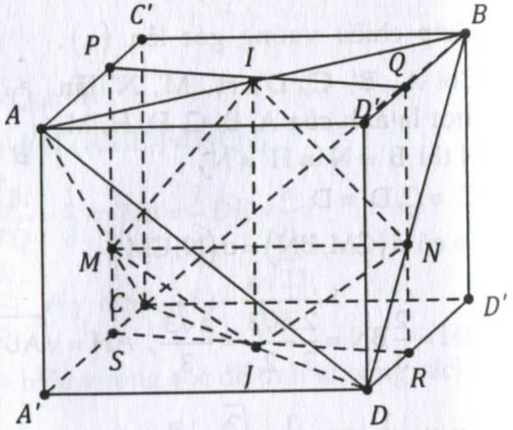


2) Nội tiếp tứ diện bằng hình hộp AC'BD'.A'CB'D. Từ giả thiết bài toán, ta suy ra được hình hộp AC'BD'.A'CB'D là hình hộp đứng và đáy là hình thoi.

Mặt phẳng đi qua IJ, cắt hình hộp theo thiết diện là hình chữ nhật PQRS

Vì I là tâm của hình thoi A'DB'C nên ta có: $CS=DR$

$\Rightarrow \Delta CSM=\Delta DRN\Rightarrow MS=NR$



Suy ra MN//CR, nên IJ vuông góc và chia đôi MN.

3) Gọi H là hình chiếu của O lên BJ, K là hình chiếu của O lên AJ.

Do $CD\perp (AJB)\Rightarrow CD\perp OH\Rightarrow OH\perp (BCD)\Rightarrow d(O,(BCD))=OH$

Tương tự $d(O,(ACD))=OK$.

Vì $JB=JA$ nên tam giác AJB cân tại J và JI là đường phân giác trong góc $\widehat{AJB}$

Suy ra $OH=OK\Rightarrow$ O cách đều hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Chứng minh tương tự ta cũng có được O cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Ví dụ 2.5.8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1: (Hình 1)

Gọi I là tâm của hình vuông ABB'A'.

Ta có: $\begin{cases} AD'\subset (AB'D') \\ BD//(AB'D') \end{cases}$

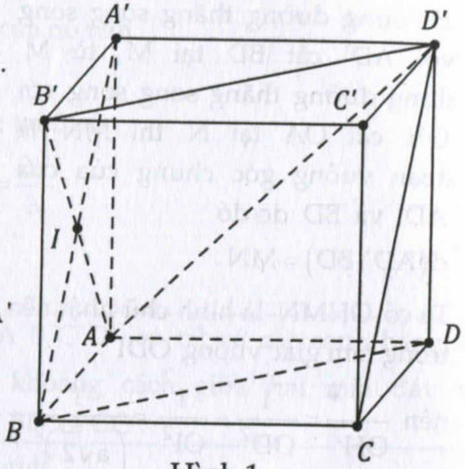
$\Rightarrow d(AD',BD)=d(BD,(AB'D'))$

$=d(B,(AB'D'))=d(A',(AB'D'))$

Vì A'AB'D' là tứ diện vuông đỉnh A'

nên $d(A',(AB'D'))=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $d(AD',BD)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Hình 1

Cách 2: Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M\in AD', N\in BD$.

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x},\overrightarrow{AD}=\vec{y},\overrightarrow{AA'}=\vec{z}\Rightarrow |\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=a,\vec{x}\vec{y}=\vec{y}\vec{z}=\vec{z}\vec{x}=0$

$\overrightarrow{AD'}=\vec{y}+\vec{z}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD'}=k(\vec{y}+\vec{z}),\overrightarrow{DB}=\vec{x}-\vec{y}\Rightarrow \overrightarrow{DN}=m(\vec{x}-\vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{AM}=m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}-k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DB}\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow \left(m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}+k\vec{z}\right)(\vec{x}-\vec{y})=0$

$\Leftrightarrow 2m+k-1=0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=0\Leftrightarrow 1-m-2k=0$, từ đó ta có hệ

$\begin{cases} 2m+k=1 \\ m+2k=1 \end{cases}\Leftrightarrow m=k=\frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}-\frac{1}{3}\vec{z}\Rightarrow MN=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

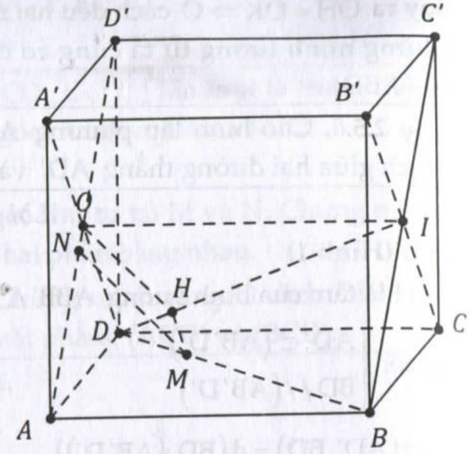
Cách 3: (Hình 2)

Chọn (DCB'A') vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'.

Gọi I là tâm của hình vuông BCC'B' thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.

Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó

$d(AD',BD) = MN$.



Hình 2

Ta có OHMN là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI

nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD',BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3.5.9. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$.

1) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CB'D').
2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và A'C'.

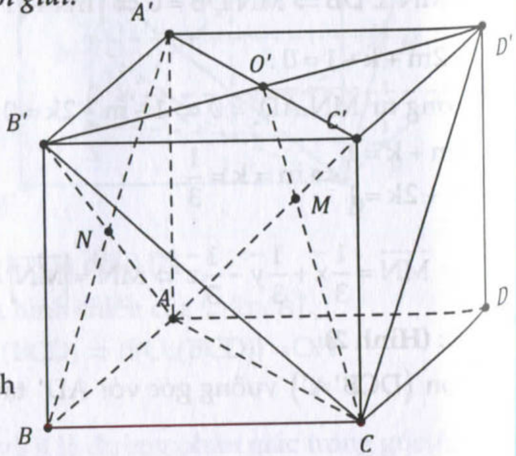
Lời giải.

1) Gọi O' là tâm của đáy A'B'C'D' và m là giao điểm của AC' với CO'.

Suy ra M là giao của AC' với (CB'D').

Do đó:

$$d(A,(CB'D')) = \frac{AM}{C'M}d(C',(CB'D'))$$
$$= \frac{1}{2}d(C',(CB'D')) = \frac{1}{2}h$$



Ta có: C'.CB'D' là tứ diện vuông tại C' nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{C'B'^2} + \frac{1}{C'D'^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2}{3}a.$$

Vậy $d(A,(CB'D')) = \frac{a}{3}$.

2) Ta có $A'C'//(B'AC) \Rightarrow d(AB',A'C') = d(A'C',(ACB')) = d(A',(ACB'))$

Vì A'B cắt (B'AC) tại trung điểm của nó nên:

$d(A',(B'AC)) = d(B,(B'AC)) = k$.

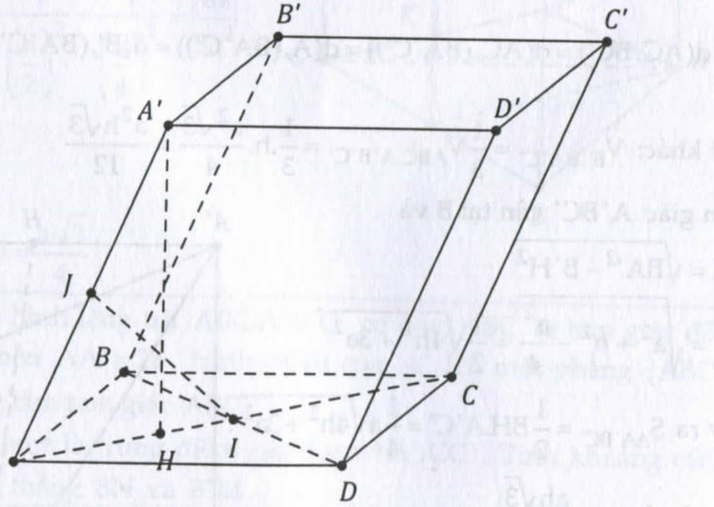
Do tứ diện BACB' là tứ diện vuông tại B nên:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow k = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(AB',A'C') = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 3.5.10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CC′.

Lời giải.



Từ đề bài ta suy ra các tam giác ABD, A'AD, A'AB là các tam giác đều

Do đó A'.ABD là tứ diện đều cạnh a.

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABD, suy ra $A'H \perp (ABCD)$ hay A'H là khoảng cách giữa hai đáy

Ta có: $A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt đáy bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BD và AA'.

Vì A'.ABD là tứ diện đều nên ta có IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BD. Suy ra $d(AA',BD)=IJ$.

Ta có: $IJ=\sqrt{AI^2-BJ^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(A'A,BD)=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

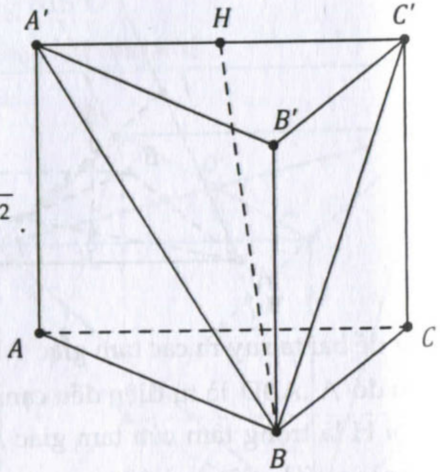
Ví dụ 2.5.11. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, chiều cao bằng h. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC'.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng (BA'C') chứa BC' và song song với AC nên

$$h=d(AC,BC')=d(AC,(BA'C'))=d(A,(BA'C'))=d(B',(BA'C'))=\frac{3V_{B'.BA'C'}}{S_{\Delta BA'C'}}$$

Mặt khác: $V_{B'.BA'C'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{3}.h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$.



Tam giác A'BC' cân tại B và

$BH=\sqrt{BA'^2-B'H^2}$

$=\sqrt{a^2+h^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$.

Suy ra $S_{\Delta A'BC'}=\frac{1}{2}BH.A'C'=\frac{1}{4}a\sqrt{4h^2+3a^2}$.

Do vậy $h=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

Ta có A'C'//AC nên

$(AC,BC')=(A'C',BC')=\widehat{A'C'B}$.

Trong tam giác vuông BC'H, ta có:

$\cos\widehat{A'C'B}=\frac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}\Rightarrow\widehat{A'C'B}=\arccos\frac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}$

Vậy $(AC,BC')=\arccos\frac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}$.

Ví dụ 2.5.12. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M và CN.

Lời giải.

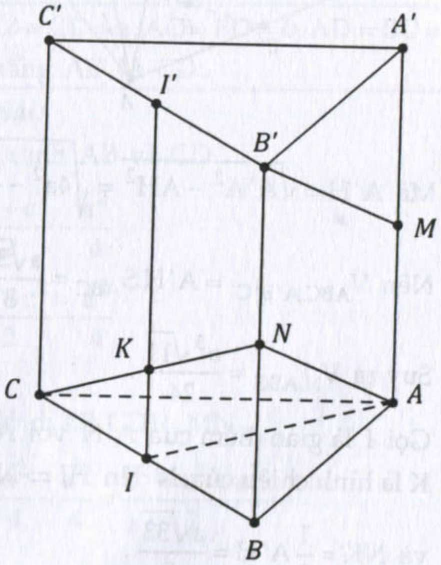
Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của BC, B'C' và K là giao điểm của II' với CN.

Ta có B'M//(ACN) nên suy ra

$d(B'M,CN)=d(B',(ACN))$

$=d(B,(ACN))$

$=2d(I,(ACN))=2h$.



Vì tứ diện IACK là tứ diện vuông tại I nên ta có:

$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IC^2}+\frac{1}{IK^2}$

$=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{64}{3a^2}$.

$\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $d(B'M,CN)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 2.5.13. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên AA' = 2a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC.

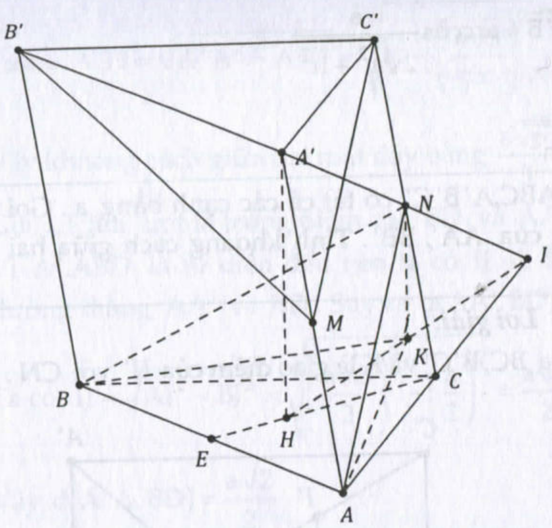
Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn AA', CC'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và B'M.

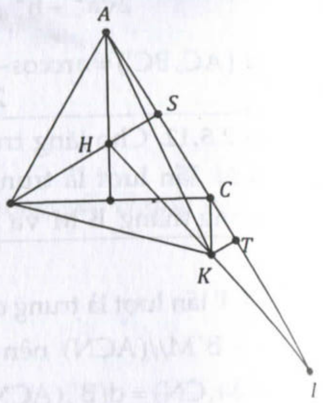
Lời giải.

Ta có (B'MC')//(ABN) nên suy ra

$d(B'M,BN)=d((B'MC'),(ABN))=d(C',(ABN))=d(C,(ABN))$

Mặt khác: $V_{NABC}=\frac{1}{2}V_{C'ABC}=\frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$





Mà $A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{33}}{3}, S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Nên $V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{11}}{4}$.

Suy ra $V_{N.ABC}=\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$.

Gọi I là giao điểm của A'N với AC, ta có được C là trung điểm của AI.
K là hình chiếu của N lên $HI\Rightarrow NK//A'H\Rightarrow NK\perp(ABC)$

và $NK=\frac{1}{2}A'H=\frac{a\sqrt{33}}{6}$.

Gọi S là trung điểm cạnh AC, suy ra $SI=\frac{3}{2}AC=\frac{3a}{2}, HS=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Nên $IH=\sqrt{HS^2+IS^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Gọi T là trung điểm SI, suy ra $KT\perp AC$,

$KT=\frac{1}{2}HS=\frac{a\sqrt{3}}{12}$ và $AT=AI-IT=2a-\frac{3a}{4}=\frac{5a}{4}$

Do đó, $AK=\sqrt{KT^2+AT^2}=\frac{a\sqrt{57}}{6}\Rightarrow AN=\sqrt{AK^2+KN^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Tương tự: $BK=\sqrt{BC^2+CK^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{12}}=\frac{a\sqrt{39}}{6}$

nên $BN=\sqrt{BK^2+NK^2}=a\sqrt{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{ANB}=\frac{AN^2+BN^2-AB^2}{AN.BN}=\frac{7\sqrt{5}}{20}\Rightarrow\sin\widehat{ANB}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{ANB}}=\frac{\sqrt{155}}{20}$

Do đó $S_{ANB}=\frac{1}{2}AN.BN.\sin\widehat{ANB}=\frac{a^2\sqrt{31}}{8}$.

Nên $d(C,(ABN))=\frac{3V_{N.ABC}}{S_{ANB}}=\frac{a\sqrt{341}}{31}$.

Vậy $d(B'M,BN)=\frac{a\sqrt{341}}{31}$

Ví dụ 2.5.14. Cho tứ diện ABCD có $AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Cách 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD.

Ta có: $CM^2=\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

$$DM^2=\frac{AD^2+DB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

Suy ra $CM=DM\Rightarrow MN\perp CD$.

Tương tự, ta cũng có $NM\perp AB$. Do đó $d(AB,CD)=MN$.

Ta có: $MN^2=CM^2-CN^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

Vậy $d(AB,CD)=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Cách 2: Ngoại tiếp tứ diện ABCD bởi hình hộp AA'BB'.C'CD'D

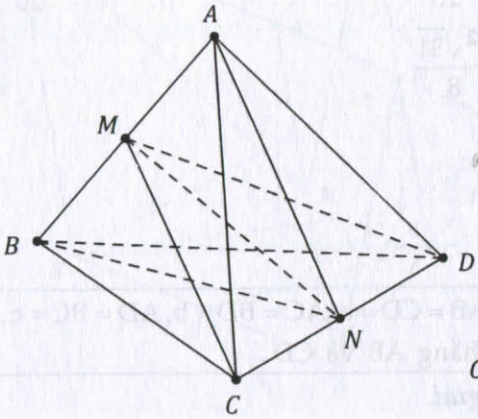
Vì $AB=CD, AC=BD, AD=BC$ nên các mặt của hình hộp là hình chữ nhật.

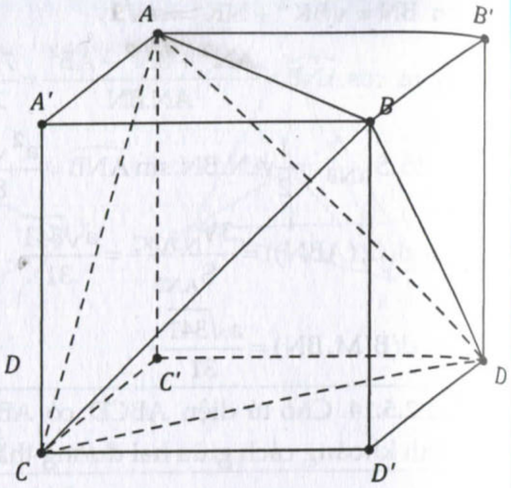
Ta có: $d(AB,CD)=d((AA'BB'),(CC'DD'))=A'C$.

Đặt $A'A=x, A'B=y, A'C=z$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\y^2+z^2=c^2\\z^2+x^2=b^2\end{cases}\Rightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2\right)=a^2+b^2+c^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Nên $z^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow d(AB,CD)=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.





* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.5.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và SA = h. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của BC,

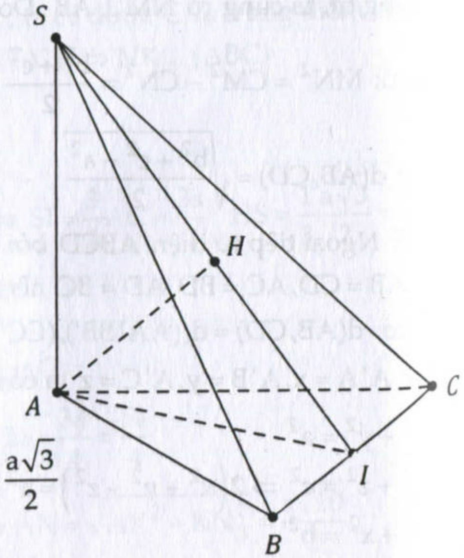
ta có $\begin{cases} AI\perp BC \\ SA\perp BC \end{cases}\Rightarrow (SAI)\perp BC$

Trong (SBC) kẻ $AH\perp SI$.

Ta có $\begin{cases} BC\perp (SAI) \\ AH\subset (SAI) \end{cases}\Rightarrow AH\perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp SI \end{cases}\Rightarrow AH\perp (SBC)$

$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AH$.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{h^2}=\frac{4h^2+3a^2}{3a^2h^2}\Rightarrow AH=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}.$$

Hay $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

Bài 2.5.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Hướng dẫn giải

Trong (ABCD) gọi $M=AB\cap CD$,

trong (SAM) gọi $K=AH\cap SM$,

kẻ $AE\perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

Dễ thấy ABCN là hình vuông nên NC = AB = a.

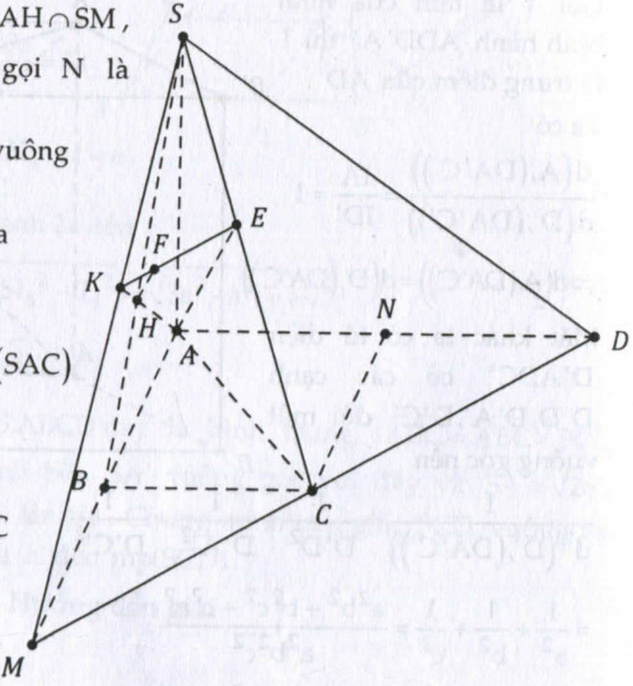
Do đó NA = NC = ND = a

$\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD\perp AC$

Lại có $CD\perp SA\Rightarrow CD\perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC)\perp (SCD)$.



Vậy $\begin{cases} (SAC)\perp (SCD) \\ (SAC)\cap (SCD)=SC \\ AE\subset (SAC) \\ AE\perp SC \end{cases}$

$\Rightarrow AE\perp (SCD)$ (1)

Trong (AKE) kẻ HF//AE, F ∈ KE, thì từ (1) suy ra $HF\perp (SCD)\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right)=HF$.

Do $BC//AD\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AD}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow MA=2AB=2a\Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

Lại có $\frac{BH}{BS}=\frac{BH.BS}{BS^2}=\frac{BA^2}{AB^2+AS^2}=\frac{a^2}{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{3}$.

Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\frac{HF}{AE}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}\Rightarrow HF=\frac{1}{3}AE$.

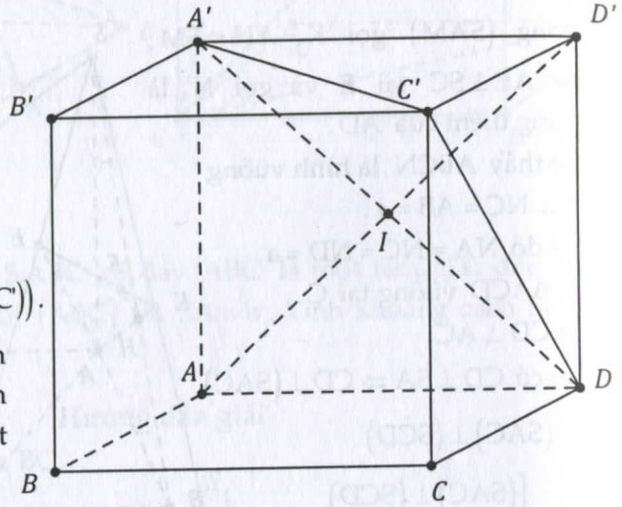
Tứ diện ADMS có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và $AE \perp (SMD)$

nên $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow AE=a$.

Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD))=HF=\frac{1}{3}AE=\frac{a}{3}$.

Bài 2.5.3. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có ba kích thước $AB=a, AD=b, AA'=c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là tâm của hình bình hành ADD'A' thì I là trung điểm của AD'.

Ta có

$$\frac{d(A,(DA'C'))}{d(D',(DA'C'))}=\frac{IA}{ID'}=1$$

$$\Rightarrow d(A,(DA'C'))=d(D',(DA'C')).$$

Mặt khác ta có tứ diện D'ADC' có các cạnh D'D, D'A', D'C' đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(D',(DA'C'))}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}$$

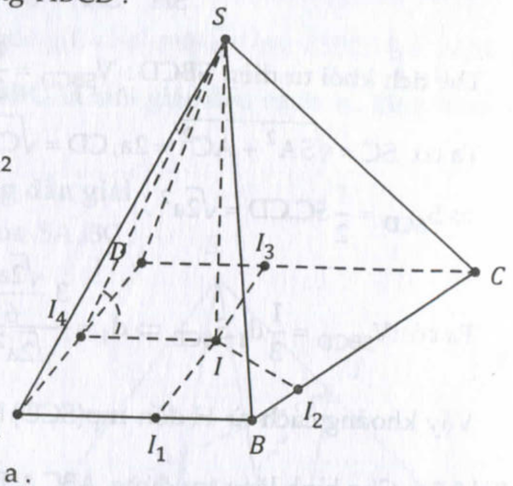
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Vậy $d(A,(DA'C'))=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

Bài 2.5.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng 2a, $BC=3a$ các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

Hướng dẫn giải

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD). Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB, BC, CD, DA thì các góc $\widehat{II_iS}\ (i=1,4)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau, suy ra các tam giác vuông $SII_1, SII_2, SII_3, SII_4$ bằng nhau nên $II_1=II_2=II_3=II_4 \Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang ABCD.



Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp nên $AB+DC=AD+BC=5a$

Diện tích hình thang ABCD là

$$S=\frac{1}{2}(AB+DC)AD=\frac{1}{2}.5a.2a=5a^2$$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang ABCD thì

$$p=\frac{AB+DC+AD+BC}{2}=\frac{10a}{2}=5a$$

$$S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{5a^2}{5a}=a\Rightarrow II_4=r=a.$$

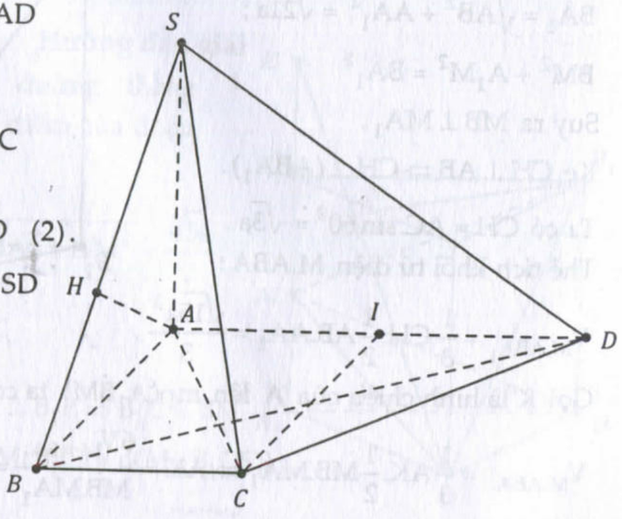
Tam giác SAD đều và có cạnh 2a nên

$$SI_4=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SI_4{}^2-II_4{}^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$$

Vậy $d(S,(ABCD))=SI=a\sqrt{2}$.

Bài 2.5.5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{ABC}=90^0$, $BA=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của AD

Ta có $CI=IA=ID=\frac{AD}{2}$

suy ra ΔACD vuông tại C

$\Rightarrow CD\perp AC$ (1)

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD\perp SD$

$\Rightarrow$ ΔSCD vuông.

Gọi d_1; d_2 lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp(SCD)

Ta có: $\Delta SAB \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$; $\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện SBCD: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a, CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a$

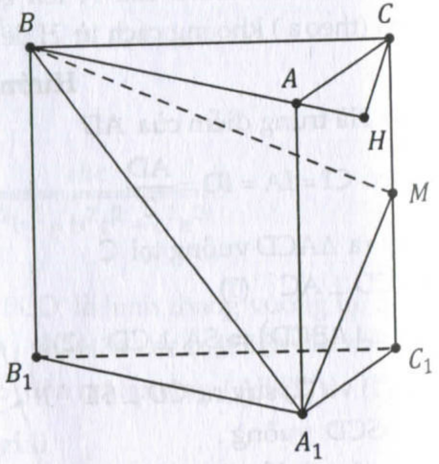
$\Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$.

Ta có: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là $d_1 = \frac{a}{3}$.

Bài 2.5.6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh hai đường thẳng MB và MA_1 vuông góc với nhau. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM).

Hướng dẫn giải



Ta có:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0} = a\sqrt{7}$

$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 2\sqrt{3}a$;

$A_1M = \sqrt{A_1C_1{}^2 + C_1M^2} = 3a$

$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{21}a$;

$BM^2 + A_1M^2 = BA_1{}^2$

Suy ra $MB \perp MA_1$.

Kẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (ABA_1)$.

Ta có $CH = AC.\sin 60^0 = \sqrt{3}a$.

Thể tích khối tứ diện M.ABA:

$V_{M.ABA_1} = \frac{1}{3}.CH.\frac{1}{2}AB.AA_1 = \frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

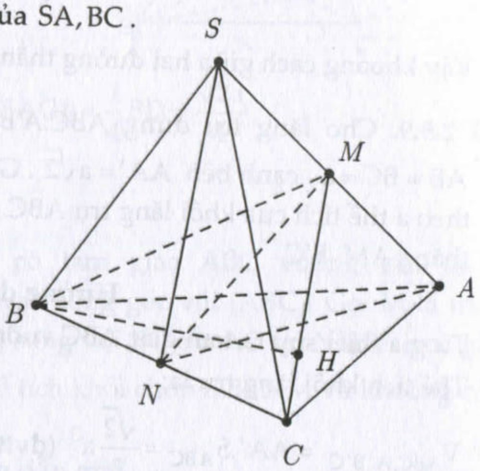
Gọi K là hình chiếu của A lên $mp(A_1BM)$ ta có:

$V_{M.ABA_1} = \frac{1}{3}AK.\frac{1}{2}MB.MA_1 \Rightarrow AK = \frac{6V_{M.ABA_1}}{MB.MA_1} = \frac{\sqrt{5}a}{3}$

Vậy khoảng cách từ A đến (A_1BM) là $AK = \frac{\sqrt{5}a}{3}$.

Bài 2.5.7. Cho hình chóp S.ABC có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0, các tam giác ABC và SBC là tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mp(SAC).

Hướng dẫn giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC.

Kẻ $BH \perp CN$ tại H suy ra BH là khoảng cách từ B tới mp(SAC)

Ta có $\widehat{SNA} = 60^0$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC),(ABC).

Tam giác SAN đều cạnh

$SA = AN = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

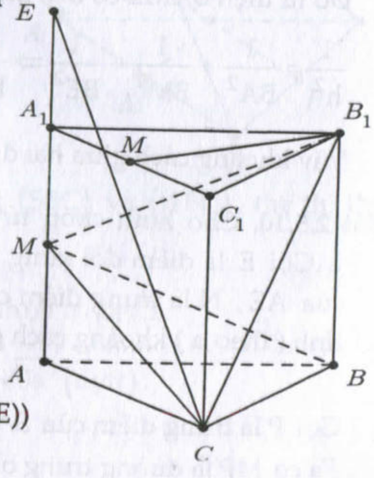
Ta có $CM = \sqrt{CA^2 - AM^2} = \frac{\sqrt{13}a}{4}$;

$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \frac{3a}{4}$

Ta có: $BH.CM = MN.BC \Rightarrow BH = \frac{MN.BC}{CM} = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

Bài 2.5.8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a, M là trung điểm của AA_1. Chứng minh $BM \perp B_1C$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và B_1C.

Hướng dẫn giải



* Gọi E là điểm trên đường thẳng AA_1 sao cho A_1 là trung điểm của đoạn ME, ta có $BM//B_1E$.

$B_1C = \sqrt{2}a, B_1E = BM = \sqrt{BA^2 + AM^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$,

$CE = \sqrt{CA^2 + AE^2} = \frac{\sqrt{13}a}{2}$.

$B_1C^2 + B_1E^2 = CE^2 \Rightarrow B_1C \perp B_1E \Rightarrow B_1C \perp BM$

* Ta có $BM//(B_1CE) \Rightarrow d(BM, B_1C) = d(M,(B_1CE))$

Gọi H là trung điểm của A_1C_1 ta có $BH \perp (ACC_1A_1)$

Thể tích của khối chóp $B_1.CME$: $V_{B_1.CME} = \frac{1}{3}B_1H.S_{CME} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{1}{2}a.a = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

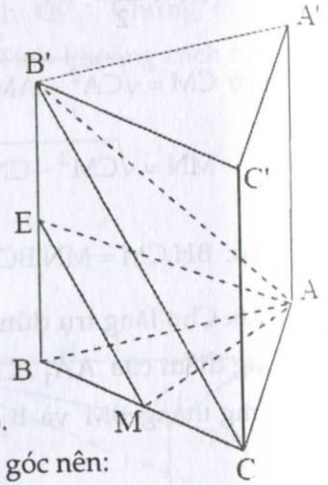
Gọi I là hình chiếu của M lên $mp(B_1EC)$ ta có :

$$V_{M.B_1CE} = \frac{1}{3}MI.S_{B_1CE} \Rightarrow MI = \frac{3V_{B_1.CME}}{S_{B_1CE}} = \frac{\sqrt{30}a}{10}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C, BM là $MI = \frac{\sqrt{30}a}{10}$.

Bài 2.5.9. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).

Gọi E là trung điểm của BB.

Khi đó $B'C // (AME)$

Suy ra

$d(AM, B'C) = d(B'C, (AME))$

$= d(C, (AME)) = d(B, (AME))$

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

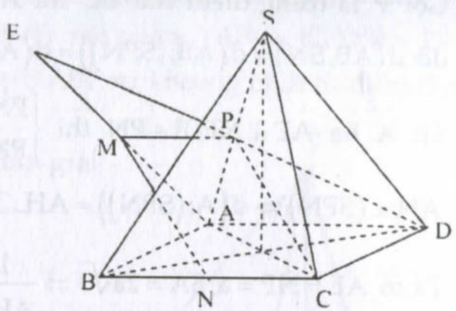
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 2.5.10. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của tam giác EAD.



$\Rightarrow MP//AD \Rightarrow MP//NC$.

Và $MN = \frac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra MNCP là hình bình hành

$\Rightarrow MN // CP \Rightarrow MN // (SAC)$.

Ta dễ chứng minh được

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$.

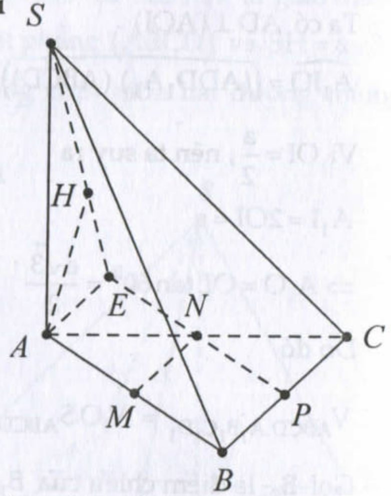
Vì $MN // (SAC)$ nên:

$$d(MN, AC) = d(N, (SAC)) = \frac{1}{2}d(B, (SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{\sqrt{2}a}{4}.$$

Vậy $d(MN, AC) = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Bài 2.5.11. Cho hình chóp SABC có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng qua MS song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.

Hướng dẫn giải



Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp S.BCNM.

Ta có :

$S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN}$

$= 2a^2 - \frac{1}{2}MA.MN = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC$.

Nên $\widehat{SBA}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3$ (dvtt).

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB//NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB//(SPN)$ do đó $d(AB,SN) = d(AB;(SPN)) = d(A;(SPN))$

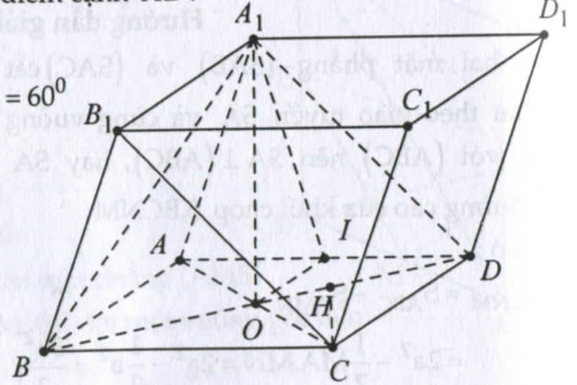
Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases} \Rightarrow PN \perp (SAE)$; hạ $AH \perp SE$ thì $AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Vậy $d(A;(SPN)) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Bài 2.5.12. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi $O = AC \cap BD, I$ là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI)$

$\widehat{A_1IO} = \widehat{((ADD_1A_1),(ABCD))} = 60^0$

Vì $OI = \frac{a}{2}$, nên ta suy ra

$A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó

$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

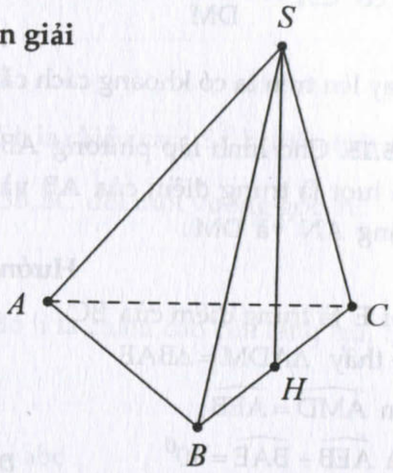
Gọi B_2 là điểm chiếu của B_1 xuống mặt phẳng (ABCD)

Do $B_1C//A_1D \Rightarrow B_1C//(A_1BD) \Rightarrow d(B_1,(A_1BD)) = d(C,(A_1BD)) = CH$, trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(B_1,(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2.5.13. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của S xuống BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên

$SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S.

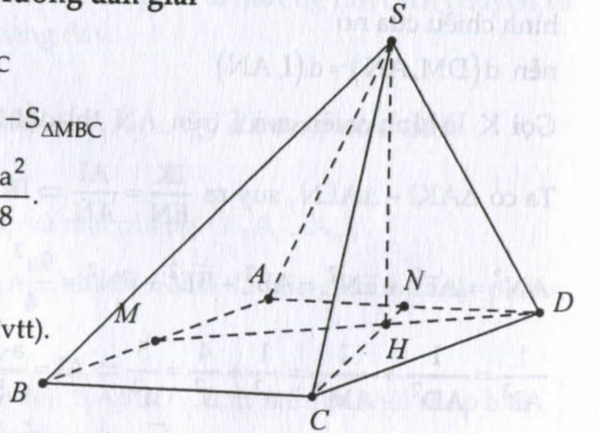
Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$

và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được

$d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}$.

Bài 2.5.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

Mà $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Nên

$V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt).

Lại thấy:

$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right).\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right)$.

$= DA^2 - DC^2 = 0$

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy :

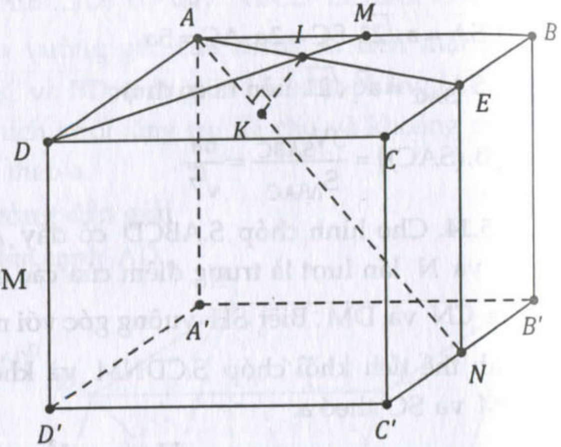
$$d(SC;DM)=d(H;SC)=\frac{2S_{\Delta HSC}}{SC}=\frac{SH.CH}{SC}=\frac{SH.CH}{\sqrt{SH^2+CH^2}}.$$

Lại có: $CH=\frac{2S_{\Delta CMD}}{DM}=\frac{2\left(S_{ABCD}-S_{\Delta AMD}-S_{\Delta CMB}\right)}{DM}=a\sqrt{\frac{4}{5}}$

Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$

Bài 2.5.15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Hướng dẫn giải



Gọi E là trung điểm của BC.

Dễ thấy $\Delta ADM=\Delta BAE$

nên $\widehat{AMD}=\widehat{AEB}$,

mà $\widehat{AEB}+\widehat{BAE}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{AMD}+\widehat{BAE}=90^0$

$\Rightarrow DM\perp AE$.

Lại có $EN\perp(ABCD)\Rightarrow EN\perp DM$

do đó $(AEN)\perp DM$ tại I.

Xét phép chiếu vuông góc lên (ANE), ta có AN chính là hình chiếu của nó

nên $d(DM,AN)=d(I,AN)$

Gọi K là hình chiếu của I trên AN thì $d(I,AN)=IK$.

Ta có $\Delta AKI\sim\Delta AEN$, suy ra $\frac{IK}{EN}=\frac{AI}{AN}\Rightarrow IK=\frac{AI.EN}{AN}$ (1)

$$AN^2=AE^2+EN^2=AB^2+BE^2+EN^2=\frac{9a^2}{4}\Rightarrow AN=\frac{3a}{2}.$$

$$\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Thay vào (1) ta được $IK=\frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d(DM,AN)=\frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

---

§ 6. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Để tính thể tích của một khối đa diện (lăng trụ và hình chóp) ta thường thực hiện theo các cách sau

Cách 1: Tính trực tiếp

Sử dụng dụng các công thức:

- Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}h.S_d$, trong đó h là chiều cao, S_d là diện tích đáy.

  Đặc biệt: Nếu hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc thì: $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}SA.SB.SC$.

- Thể tích khối lăng trụ: $V=h.S_d$, trong đó h là chiều cao của lăng trụ, S_d là diện tích đáy.

  Đặc biệt:

  +) Hình hộp chữ nhật ba cạnh a,b,c : $V=abc$.

  +) Hình hộp lập phương cạnh a : $V=a^3$.

Cách 2. Tính gián tiếp.

- Nếu hình H được tách thành hai hình rời nhau H_1, H_2 thì $V_{H_1}=V_H-V_{H_2}$
- Trên các đường thẳng SA, SB, SC của hình chóp S.ABC ta lấy lần lượt các điểm A',B',C'. Ta có: $V_{S.A'B'C'}=\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}V_{S.ABC}$.

Chú ý: Khi xét tỉ số thể tích của hai khối chóp thì ta thường tìm cách chuyển về hai khối chóp có chung mặt phẳng đáy.

1. Phân loại các dạng hình chóp.

Loại 1: Hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$*, đường cao SH.*

* H là tâm của đáy

* $\widehat{SA_iH}$ là góc giữa cạnh bên SA_i và mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$.

* Gọi M là trung điểm cạnh A_1A_2, khi đó $\widehat{SMH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SA_1A_2) và $(A_1A_2...A_n)$.

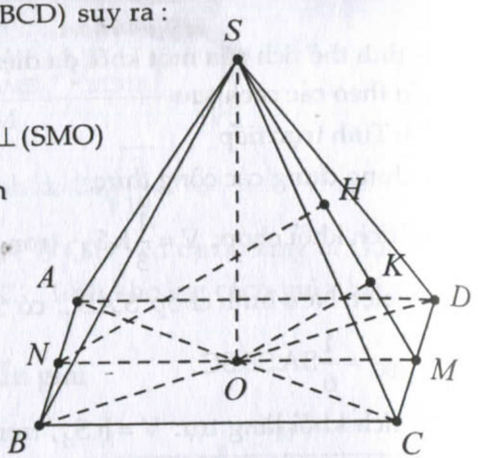
Ví dụ 2.6.1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tính thể tích khối chóp biết

1) Cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$ và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0

2) Đường cao của hình chóp tạo với đáy một góc 45^0 và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 2a.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO \perp (ABCD)$ suy ra :



$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD}$.

1) Gọi M là trung điểm CD, ta có: $CD \perp (SMO)$

Do đó góc $\widehat{SMO}$ là góc giữa mặt bên với mặt đáy, nên $\widehat{SMO} = 60^0$

Đặt $AB = 2x \Rightarrow MO = x, OC = x\sqrt{2}$

Trong các tam giác vuông SOC, SOM ta có:

$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 5a^2 - 2x^2$;

$SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$

Nên ta có phương trình: $5a^2 - 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}.(2x)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}x^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

2) Gọi K là hình chiếu của O lên AM, ta có $OK \perp (SCD)$ nên $\widehat{OSK}$ là góc giữa đường cao SO với mặt bên nên $\widehat{OSK} = 45^0$. Gọi N là trung điểm AB.

Do $AB//(SCD) \Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(N,(SCD)) = NH = 2a$,

trong đó $HN//OK \Rightarrow OK = \frac{1}{2}NH = a$

Các tam giác SKO, SOM là các tam giác vuông cân nên ta có

$SO = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $OM = SO = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 2.6.2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của khối chóp biết

1. Cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b.
2. Cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α.
3. Chiều cao bằng h và $\widehat{ASB} = \beta$.
4. Trung đoạn bằng d, góc giữa cạnh bên và mặt đáy là φ.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BA. $H = AM \cap CN$.

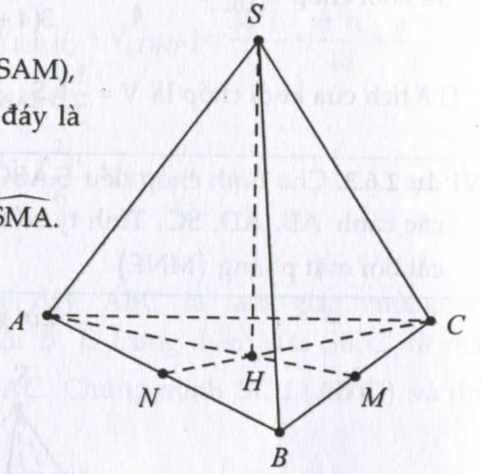
a) Diện tích đáy của khối chóp S.ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.a.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì H cũng là trọng tâm của tam giác ABC nên $HA = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$.

b) Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Vì $SH \perp BC, AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$, do đó góc giữa mặt (SBC) và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng MA, MS.

Do $\widehat{SHM} = 90^0$ nên $\alpha = \widehat{(MA, MS)} = \widehat{SMA}$.

Ta có $HM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Nên $SH = HM.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{a^3\tan\alpha}{8}$.

c) Đặt AB = x. Xét tam giác vuông SAN ta có $SN = AN.\cot\frac{\beta}{2} = \frac{x}{2}.\cot\frac{\beta}{2}$.

Trong tam giác vuông SHN: $SN^2 = SH^2 + HN^2$,

nên $\frac{x^2}{4}.\cot^2\frac{\beta}{2} = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}.h}{\sqrt{3\cot^2\frac{\beta}{2} - 1}}$.

Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}.h^2}{3\cot^2\frac{\beta}{2} - 1}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}.h^3}{3\cot^2\frac{\beta}{2} - 1}$.

d) Vì hình chiếu của S lên mặt đáy là H nên góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\varphi = \widehat{SAH}$. Trung đoạn của hình chóp là SM = d. Đặt SH = h.

Ta có $AH = SH.\cot\varphi = h.\cot\varphi \Rightarrow HM = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}h.\cot\varphi$.

Tam giác SHM vuông tại H nên $SM^2 = SH^2 + HM^2$, hay

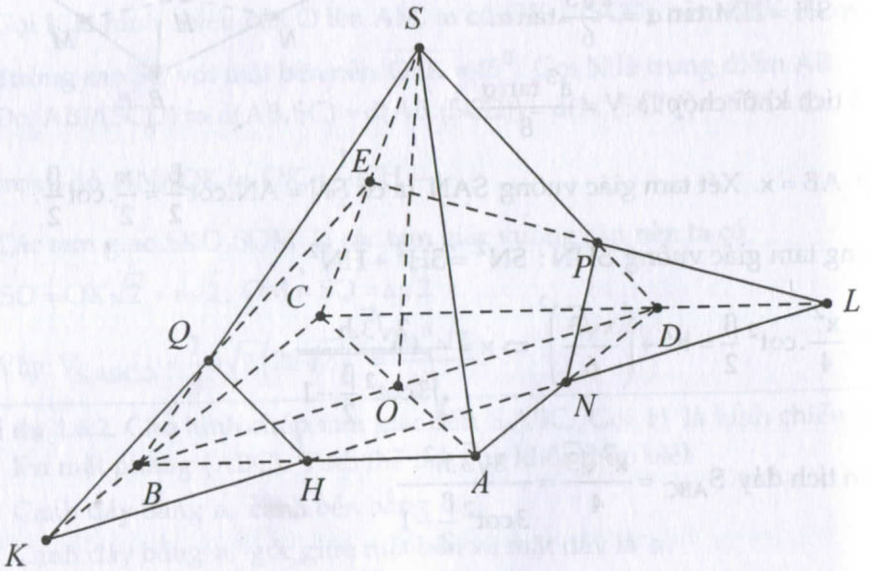
$$h^2 + \frac{1}{4}h^2\cot^2\varphi = d^2 \Rightarrow h = \frac{2d}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}}.$$

Suy ra $AH = \frac{2d\cot\varphi}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{4d\cot\varphi}{\sqrt{3(4+\cot^2\varphi)}}$, nên diện tích đáy của khối chóp $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}d^2\cot^2\varphi}{3(4+\cot^2\varphi)}$.

Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}h.S_{ABC} = \frac{16d^3\cot^3\varphi}{9\sqrt{(4+\cot^2\varphi)^3}}$.

Ví dụ 2.6.3. Cho hình chóp đều S.ABCD có M, N, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SC. Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (MNE).

Lời giải.



Đường thẳng MN cắt BC và CD tại K và L; EL cắt SD tại P; EK cắt SB tại Q. Mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác NMPEQ.

Đặt AB = a, SO = h. Ta có $KB = DL = \frac{a}{2}$.

Hạ EH//SO ⇒ EH là đường trung bình của ΔSOC nên $EH = \frac{h}{2}$.

$S_{\Delta CKL} = \frac{1}{2}CK.CL = \frac{1}{2}\frac{3a}{2}\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{8}$; $V_{ECKL} = \frac{1}{3}EH.S_{CKL} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{9a^2}{8} = \frac{3a^2h}{16}$.

Ta có Q là trung điểm của EK nên

$$\frac{V_{KBQM}}{V_{KCEL}} = \frac{KB.KQ.KM}{KC.KE.KL} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{KBQM} = \frac{1}{18}V_{KCEL} = \frac{a^2h}{96}.$$

Tương tự $V_{LNDP} = \frac{a^2h}{96}$.

Suy ra $V_1 = V_{BCDNMQEP} = V_{ECKL} - [V_{KBMQ} + V_{LDNP}] = \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{48} = \frac{a^2h}{6}$.

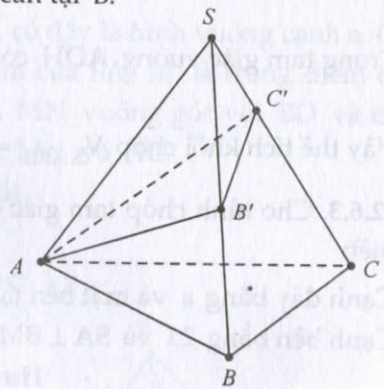
Gọi V_2 là phần thể tích SEQMANP, ta có:

Suy ra $V_2 = V_{SABCD} - V_1 = \frac{a^2h}{3} - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 1.6.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân AB = BC = a, đường cao SA = a. Gọi B′ là trung điểm của SB, C′ là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC. Chứng minh SC ⊥ (AB′C′) và tính thể tích khối chóp S.AB′C′.

Hướng dẫn giải.



+) Ta có BA = BC nên tam giác ABC vuông cân tại B.

Vì BC ⊥ BA, BC ⊥ AS

nên BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ AB′,

mà AB′ ⊥ SB ⇒ AB′ ⊥ (SBC),

do đó AB′ ⊥ SC.

Mặt khác ta có B′C′ ⊥ SC

nên SC ⊥ (AB′C′).

+) Thể tích khối chóp S.AB′C′ là

$V = \frac{1}{3}SC'.S_{AB'C'} = \frac{1}{6}SC'.AB'.B'C'$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + BC^2 + BA^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAC′ vuông tại A, đường cao AC′ nên $SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

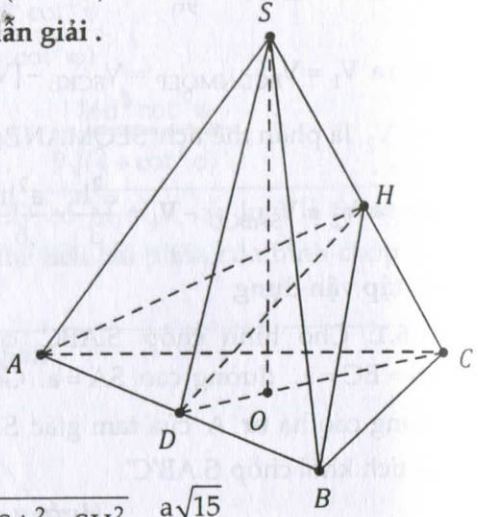
Tam giác SAB vuông cân tại A nên $AB' = SB' = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow B'C' = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = \frac{1}{6}SC'.AB'.B'C' = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3}{36}$.

Bài 1.6.2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc với mp (ABH). Tính thể tích khối chóp $(S.ABH)$.

Hướng dẫn giải .



Gọi O là tâm tam giác đều, D là trung điểm AB ta có $SO \perp (ABC)$,

$CD \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$ mà $SC \perp AH$

nên $SC \perp (ABH)$

Trong tam giác cân SAC có

$$S = \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA.SC}$$

$$= \frac{4a^2 + 4a^2 - a^2}{2.2a.2a} = \frac{7}{8}$$

Trong tam giác vuông SAH có

$$SH = SA\cos S = 2a\frac{7}{8} = \frac{7a}{4} \text{ và } AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Trong tam giác vuông ADH có $DH = \sqrt{AH^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}S_{ABH}.SH = \frac{1}{3}\frac{1}{2}AB.DH.SH = \frac{7\sqrt{11}}{96}a^3$.

Bài 2.6.3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết:

1) Cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0

2) Cạnh bên bằng 2a và $SA \perp BM$, với M là trung điểm SC .

Hướng dẫn giải.

Gọi O là tâm của đáy, I là trung điểm BC

1) Ta có $BC \perp (SIO) \Rightarrow \widehat{SIO} = \widehat{((SBC),(ABC))} = 60^0$,

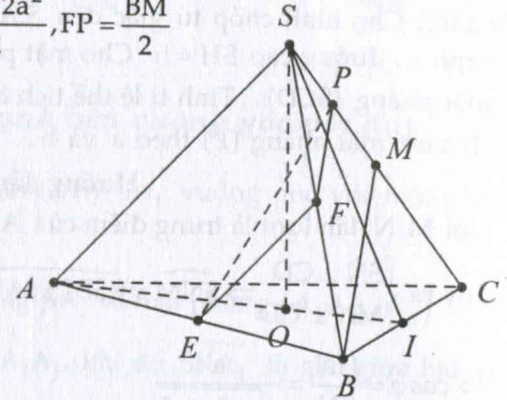
$$IO = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = IO\tan 60^0 = \frac{a}{2},\ S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

2) Gọi E, F, P lần lượt là trung điểm của AB, BS, SM , ta có:

$\widehat{(SA, BM)} = \widehat{(EF, PF)} \Rightarrow EF \perp FP$. Đặt $AB = x$

Ta có: $EF = a$,



$$BM^2 = \frac{2(BS^2 + BC^2) - SC^2}{4} = \frac{x^2 + 2a^2}{2}, FP = \frac{BM}{2}$$

$$EM^2 = \frac{2(EC^2 + ES^2) - SC^2}{4}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3x^2}{4} + SA^2 - AE^2\right) - SC^2}{4}$$

$$= \frac{4a^2 + x^2}{4}$$

$$EP^2 = \frac{2(SE^2 + EM^2) - SM^2}{4} = \frac{9a^2}{16}$$

Tam giác EFP vuông tại F nên $EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{2}$

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^3}{3}$.

Bài 2.6.4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Hướng dẫn giải.

Gọi P là trung điểm của SA .

Ta có MP là đường trung bình của tam giác EAD $\Rightarrow MP//AD \Rightarrow MP//NC$

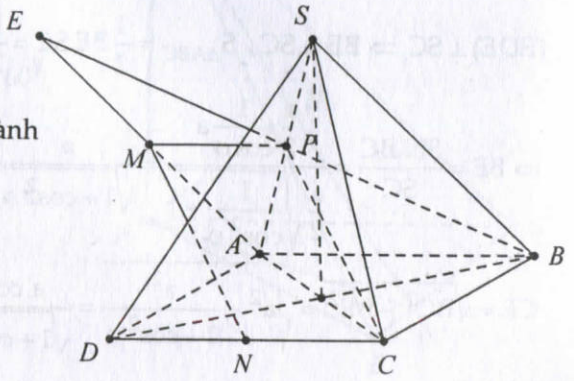
và $MN = \frac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra MNCP là hình bình hành $\Rightarrow MN//CP \Rightarrow MN//(SAC)$.

Ta dễ chứng minh được

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$

Vì $MN//(SAC)$ nên:



$d(MN,AC)=d(N,(SAC))=\frac{1}{2}d(B,(SAC))=\frac{1}{4}BD=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Vậy $d(MN,AC)=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Bài 2.6.5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, đường cao SH = h. Cho mặt phẳng (P) qua BD và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Tính tỉ lệ thể tích hai khối đa diện của hình chóp được chia bởi mặt phẳng (P) theo a và h.

Hướng dẫn giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Suy ra $\begin{cases} SN\perp CD \\ MN\perp CD \end{cases}\Rightarrow \widehat{SNM}=\widehat{((SBC),(ABCD))}=\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{HN}{SN}=\frac{a}{\sqrt{4h^2+a^2}}$

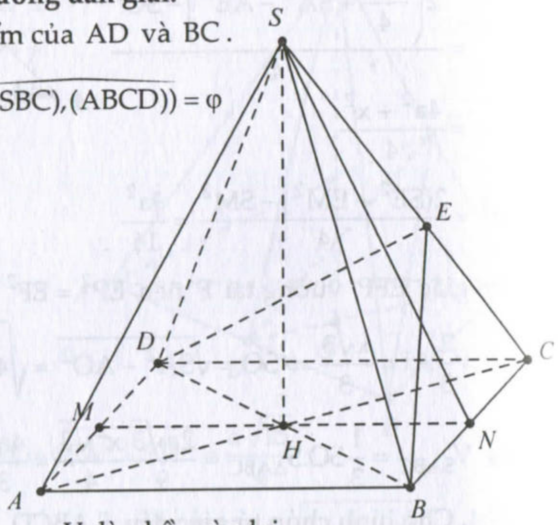
Dựng DE ⊥ SC. Ta có:

$\left.\begin{matrix} BD\perp SH \\ HC\perp BD \end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp (SHC)$

$\Rightarrow BD\perp SC\Rightarrow (BDE)\perp SC$

$\Rightarrow (BDE)\perp (SCD)$

(hay $(BDE)\equiv (P)$)



Gọi $V=V_{S.ABCD}$, $V_1=V_{C.EBD}$, V_2 là phần còn lại.

Ta có : $\frac{V_1}{V}=\frac{V_1}{2.V_{ABCD}}=\frac{1}{2}.\frac{CE}{SC}$

Mà: $SC=\sqrt{SN^2+NC^2}$

$=\sqrt{NH^2.\frac{1}{\cos^2 SNM}+NC^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}+1}=\frac{a}{2.\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+1}$

$(BDE)\perp SC\Rightarrow BE\perp SC$, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BE.SC=\frac{1}{2}SN.BC\Leftrightarrow BE.SC=SN.BC$

$$\Rightarrow BE=\frac{SN.BC}{SC}=\frac{\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\varphi}a}{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}+1}}=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$$

$$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{1+\cos^2\varphi}}=\frac{a.\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$$

Suy ra:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{1}{2}\frac{\frac{a.\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}}{\frac{a}{2.\cos\varphi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V-V_1}=\cos^2\varphi=\frac{a^2}{4h^2+a^2}.$$

Loại 2: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có cạnh bên SA_1 vuông góc với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$.

- Góc $\widehat{SA_iA_1}$ là góc giữa đường thẳng SA_i và mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$
- Gọi K là hình chiếu của A_1 lên A_iA_j, khi đó $\widehat{SKA_1}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SA_iA_j) và $(A_1A_2...A_n)$.

Ví dụ 2.6.4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC=a\sqrt{3}$, SA ⊥ (ABC). Tính thể tích của khối chóp S.ABC trong các trường hợp sau

1) Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0

2) A cách mặt phẳng (SBC) một khoảng bằng $\frac{a}{4}$.

Lời giải.

Ta có BC = 2a, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

và $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}SA$

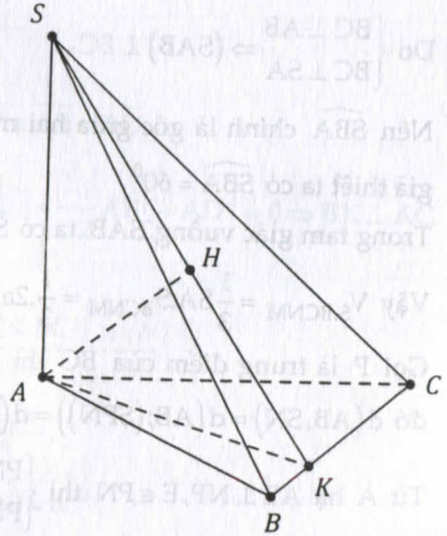
1) Gọi K là hình chiếu của A lên BC, ta có BC ⊥ (SAK).

Suy ra $\widehat{SKA}=\widehat{((SBC),(ABC))}=60^0$.

Ta có: $AK=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

nên $SA=AK.\tan 60^0=\frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$



2) Gọi H là hình chiếu của A lên SK, ta có $AH \perp (SBC)$

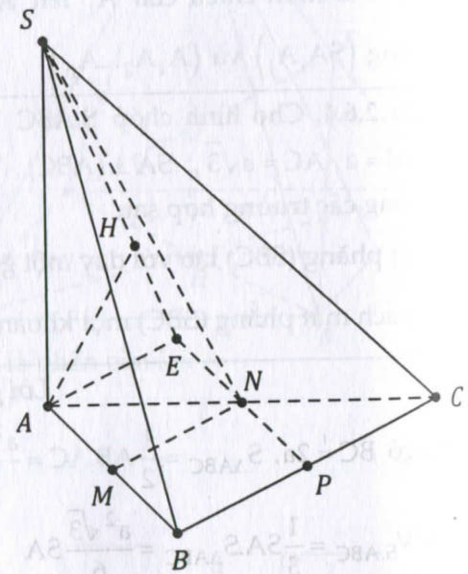
Trong tam giác SAK, ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}\Rightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AK^2}=\frac{4}{a^2}\Rightarrow SA=\frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 2.6.5. Cho hình chóp SABC có tam giác ABC vuông cân tại B, AB=BC=2a, (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng qua MS song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.

Lời giải.



Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp S.BCNM.

Ta có :

$$S_{BCNM}=S_{ABC}-S_{AMN}$$
$$=2a^2-\frac{1}{2}MA.MN$$
$$=2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3a^2}{2}$$

Do $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow (SAB)\perp BC$.

Nên $\widehat{SBA}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $\widehat{SBA}=60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}SA.S_{BCNM}=\frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2}=\sqrt{3}a^3$ (dvtt)

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB//NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB//(SPN)$ do đó $d(AB,SN)=d(AB;(SPN))=d(A;(SPN))$

Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases}PN\perp AE\\ PN\perp SA\end{cases}\Rightarrow PN\perp(SAE)$;

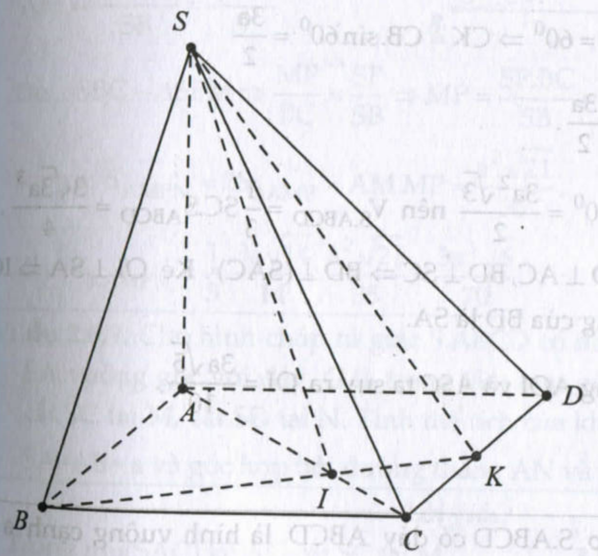
Hạ $AH \perp SE$ thì $AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

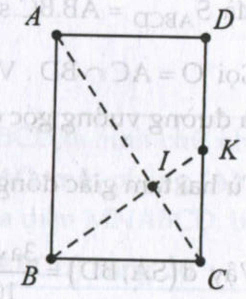
Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{13}{12a^2}\Rightarrow AH=a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Vậy $d(A;(SPN))=a\sqrt{\frac{12}{13}}$.

Ví dụ 2.6.6. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{2}, CD = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi K là trung điểm cạnh CD, góc giữa hai mặt phẳng (SBK) và (ABCD) bằng 60^0. Chứng minh BK vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính thể tích khối chóp S. BCK theo a.

Lời giải.





Ta có $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{2}AB^2+AD^2=0\Rightarrow BK\perp AC$.

Mặt khác $BK \perp SA$ nên $BK \perp (SAC)$.

Ta có $BK=\sqrt{BC^2+CK^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow CI=\frac{CK.BC}{BK}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Mà $AC=\sqrt{2a^2+4a^2}=a\sqrt{6}$ nên $AI=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Vì $BK \perp (SAI)$ nên $\widehat{SIA}=((SBK),(ABCD))=60^0$.

Suy ra $SA = AI.\tan 60^0 = 2a\sqrt{2}$. Lại có $S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.BK = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.BCK} = \frac{1}{3}SA.S_{BCK} = \frac{1}{3}2a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^3}{3}$.

Ví dụ 2.6.7. Cho hình chóp S.ABCD có $SC \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^0$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BD .

Lời giải.

Kẻ $SK \perp AB$, suy ra hình chiếu $CK \perp AB$.

Do đó $\left((SAB),(ABCD)\right) = \widehat{SKC} = 45^0$.

Ta có $\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CBK} = 60^0 \Rightarrow CK = CB.\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$

Suy ra $SC = CK.\tan 45^0 = \frac{3a}{2}$.

Mà $S_{ABCD} = AB.BC.\sin 120^0 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SC.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $BD \perp AC, BD \perp SC \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Kẻ $OI \perp SA \Rightarrow IO$ là đường vuông góc chung của BD là SA.

Từ hai tam giác đồng dạng AOI và *ASC* ta suy ra $OI = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Vậy $d\left(SA, BD\right) = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 2.6.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60^0 . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích khối chóp S.AMPN .

Lời giải.

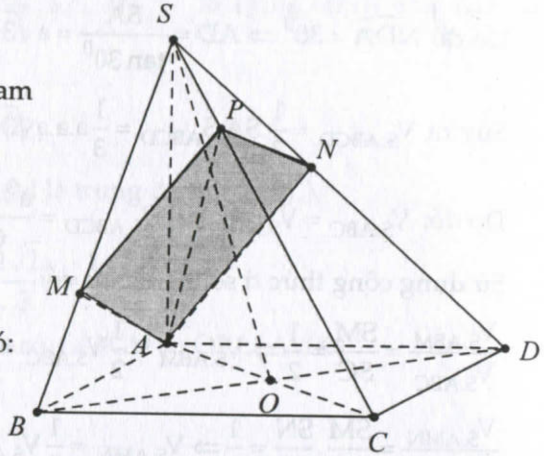
Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD \perp (SOA)$ suy ra góc $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $\widehat{SOA} = 60^0$.

Trong tam vuông SAO ta có: $SA = AO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$, từ đó suy ra: $SC \perp (AMN)$, nên AP là đường cao của hình chóp S.AMPN

Suy ra: $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}AP.S_{AMPN}$



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{SP}{SC} = \frac{SP.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow SP = \frac{3}{7}SC = \frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB ta có:

$$AM = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Do $\Delta SBC \sim \Delta SPM \Rightarrow \frac{MP}{BC} = \frac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \frac{SP.BC}{SB} = \frac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\Delta AMP} = AM.MP = \frac{a^2\sqrt{21}}{35}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{14}}{14}.\frac{a^2\sqrt{21}}{35} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{70}$.

Ví dụ 2.6.9. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, G là trọng tâm tam giác SAC, mặt phẳng (ABG) cắt SC tại M, cắt SD tại N. Tính thể tích của khối đa diện MNABCD, biết SA=AB= a và góc hợp bởi đường thẳng AN và mp(ABCD) bằng 30^0 .

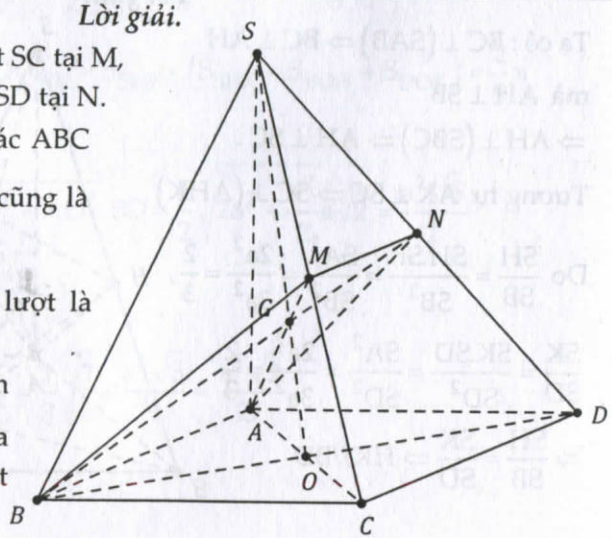
Lời giải.

Trong mp(SAC) kẻ AG cắt SC tại M, trong mp(SBD) kẻ BG cắt SD tại N.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên có $\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$, suy ra G cũng là trọng tâm tam giác SBD.

Từ đó suy ra M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD.

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{NAD}$ là góc hợp bởi giữa đường thẳng AN và mặt phẳng (ABCD)



Suy ra $\widehat{NAD} = 30^0$.

Hơn nữa N là trung điểm của SD nên ΔAND cân tại N

Do đó $\widehat{NDA} = 30^0 \Rightarrow AD = \dfrac{SA}{\tan 30^0} = a\sqrt{3}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{4}V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Suy ra $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy thể tích khối đa diện MNABCD là: $V = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMN} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{24}$.

Ví dụ 2.6.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh: $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích của khối chóp OHAK theo a.

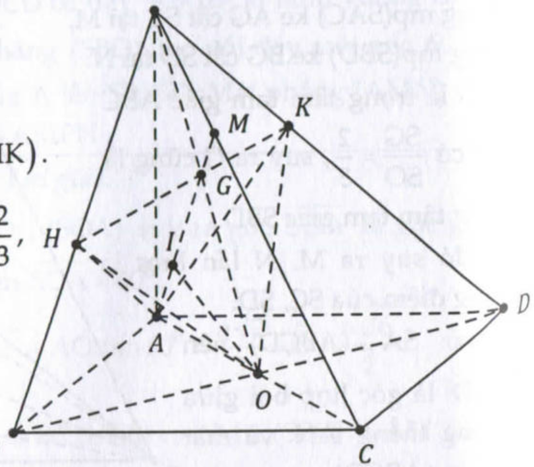
Lời giải.

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

mà $AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$.



Do $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SH.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2a^2}{3a^2} = \dfrac{2}{3}$,

$\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{SK.SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{2a^2}{3a^2} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK // BD$

và $HK = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Gọi G là giao điểm của SO và KH thì G là trung điểm của KH, mà $AH = AK = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a \Rightarrow AG \perp HK$.

Dễ thấy G là trọng tâm của ΔSAC,

nên $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}SC = \dfrac{2a}{3}$ (M là trung điểm của SC).

Vậy $S_{AHK} = \dfrac{1}{2}AG.HK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a}{3}.\dfrac{2\sqrt{2}a}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}a^2}{9}$.

Gọi I là trung điểm của AM, ta có $OI // CM \Rightarrow OI \perp (AHK)$

và $OI = \dfrac{CM}{2} = \dfrac{SC}{4} = \dfrac{a}{2}$

Suy ra $V_{O.AHK} = \dfrac{1}{3}OI.S_{AHK} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{9} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{27}$.

Cách 2: Gọi E là hình chiếu của A trên SO thì $AE \perp (OHK)$ nên AE là đường cao của hình chóp A.OHK

Ta có: $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow AE = a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Đặt $S_{SBD} = x$, ta có $\dfrac{S_{SHK}}{S_{SBD}} = \dfrac{SH.SK}{SB.SD} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow S_{SHK} = \dfrac{4}{9}x$

$$\frac{S_{BOH}}{S_{SBD}} = \frac{BH.BO}{BS.BD} = \frac{1}{2}.\frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{1}{2}\frac{BA^2}{BS^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{BOH} = \frac{1}{6}x$$

Tương tự $S_{DOK} = \dfrac{1}{6}x \Rightarrow S_{OHK} = S_{SBD} - (S_{SHK} + S_{BOH} + S_{DOK}) = \dfrac{2}{9}x$

Mà

$$S_{SBD} = \frac{1}{2}SO.BD = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AO^2}.BD = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

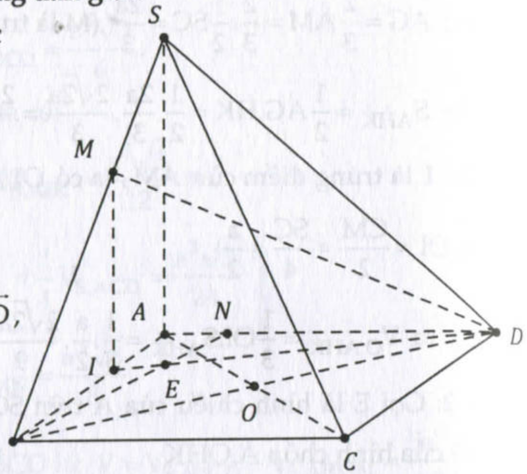
$\Rightarrow S_{OHK} = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{9}$.

Vậy $V_{AOHK} = \dfrac{1}{3}AE.S_{OHK} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}a.\dfrac{a^2\sqrt{5}}{9} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và $AB = BD = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $BM = \frac{2}{3}SB$, giả sử N là điểm di động trên cạnh AD. Tìm vị trí của điểm N để $BN \perp DM$ và khi đó tính thể tích của khối tứ diện BDMN.

Hướng dẫn giải.



Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AD}$

Vẽ $MI // SA \Rightarrow MI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow MI \perp BN$.

Do đó $BN \perp DM \Leftrightarrow BN \perp DI$

Ta có: $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$,

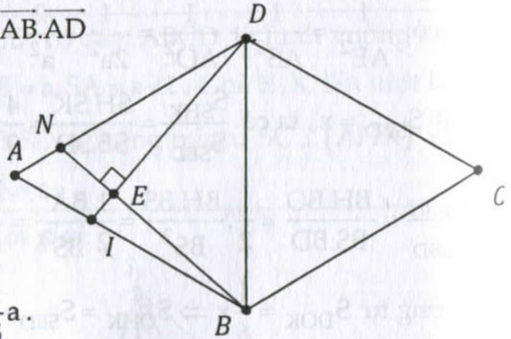
$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$

Suy ra

$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}AB^2 - xAD^2 + (1 + \frac{1}{3}x)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{1}{3}a^2 - xa^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}x)a^2$

$= -\frac{5}{6}a^2x + \frac{1}{6}a^2$



Do đó $DI \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BN} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow AN = \frac{1}{5}a$.

Ta có: $MI = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $S_{\Delta BND} = \frac{4}{5}S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{5}$.

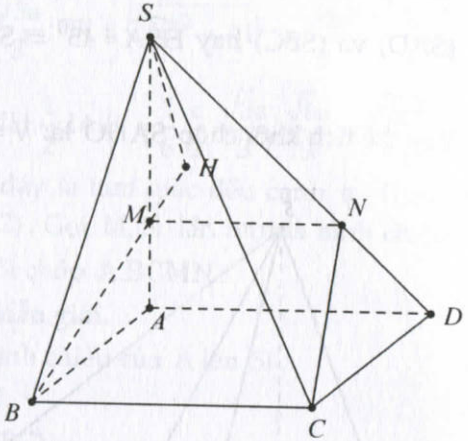
Vậy $V_{M.BDN} = \frac{1}{3}MI.S_{\Delta BND} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{5} = \frac{2a^3}{15}$.

Bài 2.6.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $MN // AD$; $BC \perp SA$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông tại B và M.



Ta có:

$SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$,

$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Diện tích hình thang BCMN:

$S = \frac{BC + MN}{2}BM = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Hạ $SH \perp BM \Rightarrow SH \perp (BCMN)$

$\Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp S.BCMN.

Do $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên suy ra: $MH.MB = MS.MA \Rightarrow MH = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow BH = BM + MH = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S.SH = \frac{1}{3}.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.a = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$.

Bài 2.6.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 30^0$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng 45^0. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh đỉnh A của tam giác ABC. Biết hai mặt phẳng (SAH) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.AHO theo a, trong đó O là giao điểm của AC và BD.

Hướng dẫn giải.

Vì hai mặt phẳng (SAD) và (SAH) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$

Ta có: $\widehat{HAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAH} = 75^0 - 60^0 = 15^0$

$AH = AB.\sin 30^0 = \frac{a}{2}, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 30^0} = \sqrt{1 - \sqrt{3}}a$.

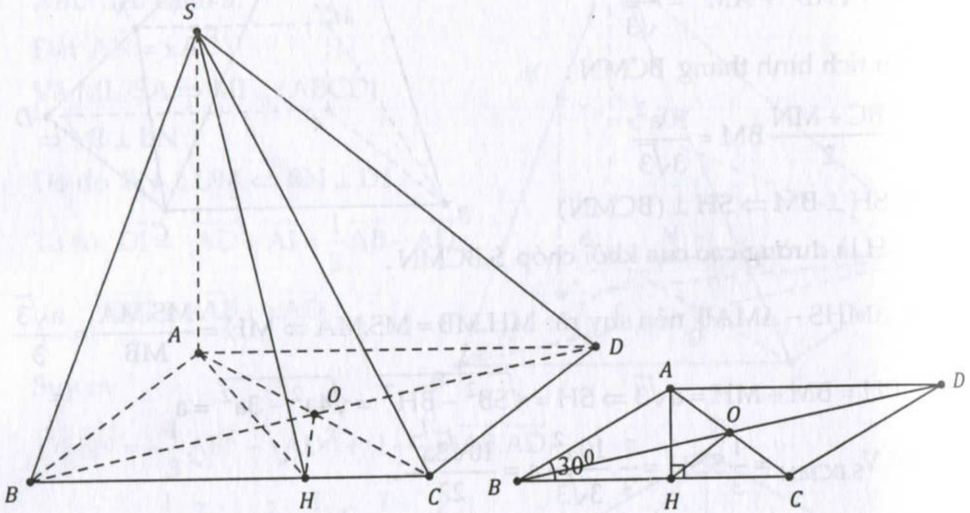
$\sin 15^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^0}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Suy ra $S_{\Delta AHO} = \frac{1}{2}AO.AH.\sin\widehat{HAC} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1 - \sqrt{3}}}{2}a.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 - 3\sqrt{3}}}{16}a^2$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A vào song song với AD, suy ra $\Delta = (SAD)\cap(SBC)$.

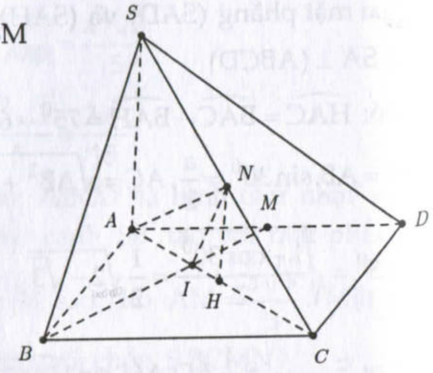
Ta có: $AB\perp(SAH)\Rightarrow \Delta\perp(SAH)$, do đó $\widehat{ASH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) hay $\widehat{HSA}=45^0\Rightarrow SA=AH=\frac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp SAHO là: $V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta AHO}=\frac{\sqrt{5-3\sqrt{3}}}{96}a^3$



Bài 2.6.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=\sqrt{2}a$, $SA=a$ và vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC. Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \Delta ABM\sim\Delta ABM$

$\Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{BCA}$

$\Rightarrow \widehat{ABM}+\widehat{BAC}=\widehat{BCA}+\widehat{BAC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=90^0\Rightarrow BM\perp AC$ (1)

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$MB\perp(SAC)\Rightarrow(SMB)\perp(SAC)$.

Gọi H là trung điểm của $AC\Rightarrow NH//SA\Rightarrow NH\perp(ABI)$ và $NH=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.

Ta có AI là đường cao của ΔABM vuông tại A

$\Rightarrow\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{\sqrt{3}a}{3}$; $BI=\sqrt{AB^2-AI^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Thể tích tứ diện ANIB: $V_{ANIB}=\frac{1}{3}NH.\frac{1}{2}.IA.IB=\frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}a}{3}.\frac{\sqrt{6}a}{3}=\frac{\sqrt{2}a^3}{36}$.

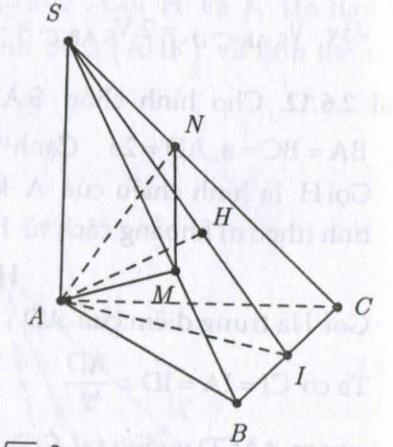
Bài 2.6.10. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA = 2a và vuông góc với mp(ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCMN.

Hướng dẫn giải.

Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A lên SI.

Ta có: $BC\perp AI, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp AH$

$AH\perp BC, AH\perp SI\Rightarrow AH\perp(SBC)$.



Xét tam giác vuông SAI:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AH=\frac{2\sqrt{3}a}{19}$

Xét tam giác vuông SAB:

$SA^2=SM.SB\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{4}{5}$

Xét tam giác vuông SAC:

$SA^2=SN.SC\Rightarrow\frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{4}{5}$

Suy ra: $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}}=\frac{16}{25}\Rightarrow S_{BCNM}=\frac{9}{25}S_{SBC}=\frac{9\sqrt{19}a^2}{100}$

Thể tích khối chóp A.BCNM: $V_{A.BCNM}=\frac{1}{3}AH.S_{BCNM}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$

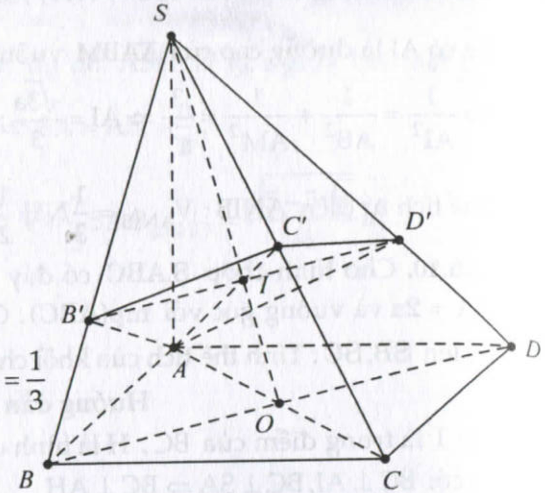
Bài 2.6.11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$, $SA\perp(ABCD)$, SA = a. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Hướng dẫn giải

Gọi $O=AC\cap BD, I=B'D'\cap AC'$.

Ta có: B'D'//BD và I là trọng tâm tam giác SAC suy ra:

$\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.



Theo giả thiết ta có ΔABD đều.

Diện tích tam giác ABC :

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Thể tích khối chóp S.ABC :

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

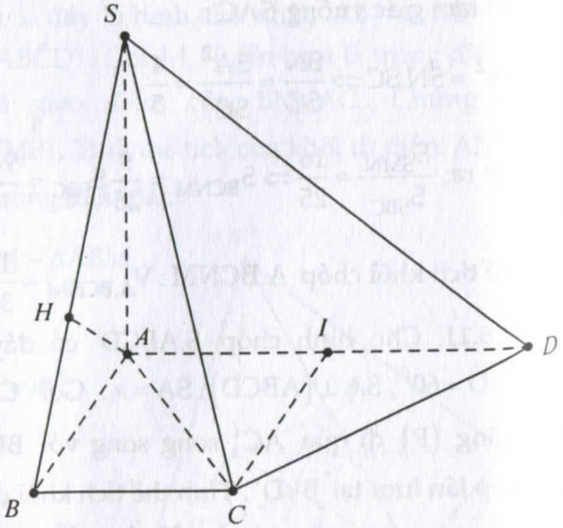
Ta có : $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SB'.SC'}{SB.SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AB'C'}=\frac{1}{3}.V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}a^3}{36}$.

Vậy $V_{S.AB'C'D'}=2.V_{S.AB'C'}=\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$.

Bài 2.6.12. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{ABC}=90^0$, $BA=BC=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Hướng dẫn giải.



Gọi I là trung điểm của AD

Ta có $CI=IA=ID=\frac{AD}{2}$

suy ra ΔACD vuông tại C

$\Rightarrow CD\perp AC$ (1)

Mặt khác: $SA\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SA\perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD\perp SD$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông.

Gọi $d_1; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp(SCD)

Ta có:

$\Delta SAB\sim\Delta SHA\Rightarrow\frac{SA}{SH}=\frac{SB}{SA}\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2}{3}$;

$\frac{SH}{SB}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{2}{3}\Rightarrow d_2=\frac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện SBCD : $V_{SBCD}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a, CD=\sqrt{CI^2+ID^2}=\sqrt{2}a$

$\Rightarrow S_{SCD}=\frac{1}{2}SC.CD=\sqrt{2}a^2$.

Ta có: $V_{SBCD}=\frac{1}{3}d_1.S_{SCD}\Rightarrow d_1=\frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2}=\frac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là $d_1=\frac{a}{3}$.

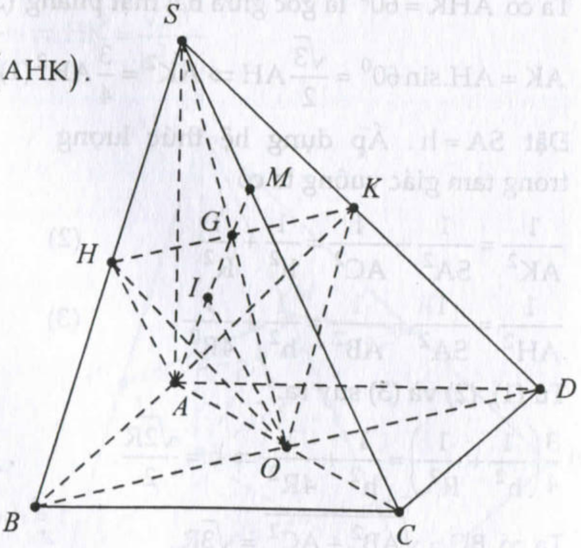
Bài 2.6.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=a, SA=a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SC\perp(AHK)$ và tính thể tích khối chóp OAHK.

Hướng dẫn giải.

Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$ mà $AH\perp SB$

$\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Tương tự $AK\perp SC\Rightarrow SC\perp(AHK)$.



Gọi E là hình chiếu của A trên SO thì $AE\perp(OHK)$ nên AE là đường cao của hình chóp A.OHK.

Ta có:

$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AO^2}$

$=\frac{1}{2a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{5}{2a^2}$

$\Rightarrow AE=a\sqrt{\frac{2}{5}}$

Đặt $S_{SBD}=x$, ta có $\frac{S_{SHK}}{S_{SBD}}=\frac{SH.SK}{SB.SD}=\frac{4}{9}\Rightarrow S_{SHK}=\frac{4}{9}x$

$$\frac{S_{BOH}}{S_{SBD}}=\frac{BH.BO}{BS.BD}=\frac{1}{2}.\frac{BH.BS}{BS^2}=\frac{1}{2}\frac{BA^2}{BS^2}=\frac{1}{6}\Rightarrow S_{BOH}=\frac{1}{6}x,$$

Tương tự $S_{DOK}=\frac{1}{6}x\Rightarrow S_{OHK}=S_{SBD}-\left(S_{SHK}+S_{BOH}+S_{DOK}\right)=\frac{2}{9}x$

$$S_{SBD}=\frac{1}{2}SO.BD=\frac{1}{2}\sqrt{AS^2+AO^2}.BD=\frac{a^2\sqrt{5}}{2}\Rightarrow S_{OHK}=\frac{a^2\sqrt{5}}{9}.$$

Vậy $V_{AOHK}=\frac{1}{3}AE.S_{OHK}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}a.\frac{a^2\sqrt{5}}{9}=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

Bài 2.6.14. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho AC = R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC. Chứng minh tam giác AHK vuông và tính thể tích khối chóp S.ABC

Hướng dẫn giải.

Ta có $\begin{cases}BC\perp CA\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AK$

Ta có $AK\perp SC$ nên suy ra $AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp HK\Rightarrow\Delta AKH$ vuông tại K.

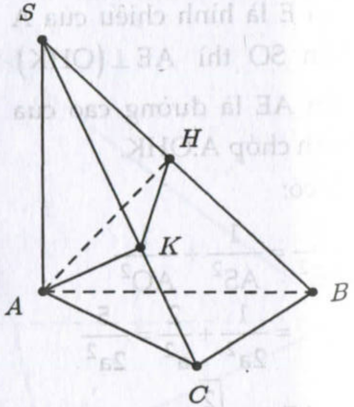
Ta có $\widehat{AHK}=60^0$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB),(SBC).

$$AK=AH.\sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}AH\Rightarrow AK^2=\frac{3}{4}AH^2\ (1)$$

Đặt $SA=h$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{R^2}\qquad(2)$$

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{4R^2}\qquad(3)$$



Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{4R^2}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}R}{2}.$$

Ta có $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{3}R$.

Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}R}{2}.\frac{1}{2}R.\sqrt{3}R=\frac{\sqrt{6}R^3}{12}$.

Bài 2.6.15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng 1. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc với cạnh SC tại M cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại H, K. Chứng minh $HK\perp AM$ và tính thể tích hình chóp S.ABCD biết mp(α) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $O=AC\cap BD;I=SO\cap HK;M=AI\cap SC$

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(α) là tứ giác AHMK.

Ta có $\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

và $SC\perp(\alpha)\Rightarrow SC\perp AH$

Từ đó suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB$

Chứng minh tương tự ta có $AK\perp SD$.

Do đó

$$\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{h^2}{h^2+1}=\frac{SA^2}{SA^2+AD^2}=\frac{SA^2}{SD^2}=\frac{SK}{SD}\ (1)$$

$\Rightarrow HK//SB$ mà $BD\perp(SAC)$ nên $HK\perp(SAC)\Rightarrow HK\perp AM$

Từ (1) ta có $\frac{HK}{BD}=\frac{SH}{SB}=\frac{h^2}{h^2+1}\Rightarrow HK=\frac{\sqrt{2}h^2}{h^2+1}$

$AM.SC=SA.AC$

$$\Rightarrow AM=\frac{SA.AC}{SC}=\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{h^2+2}}$$

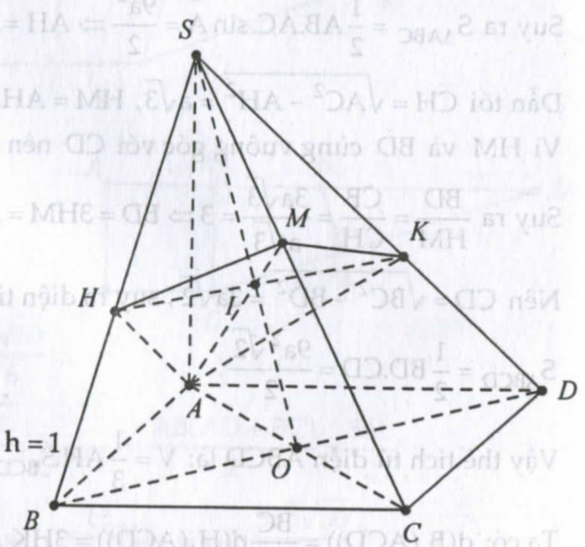
$$S_{AHMK}=\frac{1}{2}HK.AM$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}h^2}{h^2+1}.\frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{h^2+2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{h^6}{(h^2+1)^2(h^2+2)}=\frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow11h^6-4h^4-5h^2-2=0\Leftrightarrow h=1$$

Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}$.

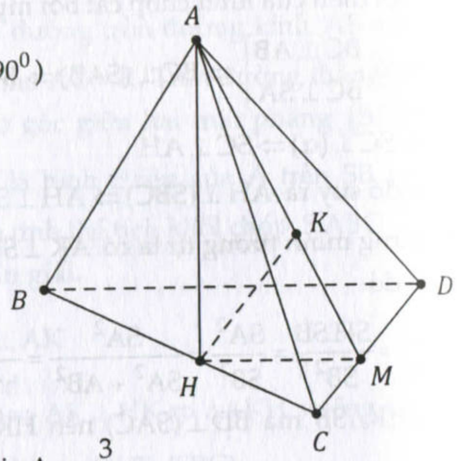


Loại 3: Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có mặt phẳng $(SA_iA_j)\perp(A_1A_2...A_n)$.

Vẽ đường cao SH của tam giác SA_iA_j, khi đó $SH\perp(A_1A_2...A_n)$

Ví dụ 2.6.11. Cho tứ diện ABCD có mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (BCD), tam giác BCD vuông ở D. Biết rằng $AB=a\sqrt{15}$, $BC=3a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{6}$; góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối tứ diện ABCD và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) theo a.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của A lên BC.

Do $BC^2>AB^2+AC^2$ (dẫn tới $\widehat{BAC}>90^0$) và $(ABC)\perp(BCD)$ nên suy ra H thuộc đoạn BC và $AH\perp(BCD)$.

Vẽ $HM\perp CD\Rightarrow CD\perp(AHM)$ nên góc $\widehat{AMH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD)

Do đó $\widehat{AMH}=60^0$.

Trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=-\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{9a^2}{2}\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=a\sqrt{3}$

Dẫn tới $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=a\sqrt{3}$, $HM=AH.\cot 60^0=a$

Vì HM và BD cùng vuông góc với CD nên HM//BD

Suy ra $\frac{BD}{HM}=\frac{CB}{CH}=\frac{3a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}=3\Rightarrow BD=3HM=3a$

Nên $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=3a\sqrt{2}$, suy ra diện tích tam giác BCD:

$$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BD.CD=\frac{9a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy thể tích tứ diện ABCD là: $V=\frac{1}{3}AH.S_{BCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{9a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $d(B,(ACD))=\frac{BC}{HC}d(H,(ACD))=3HK$,

---

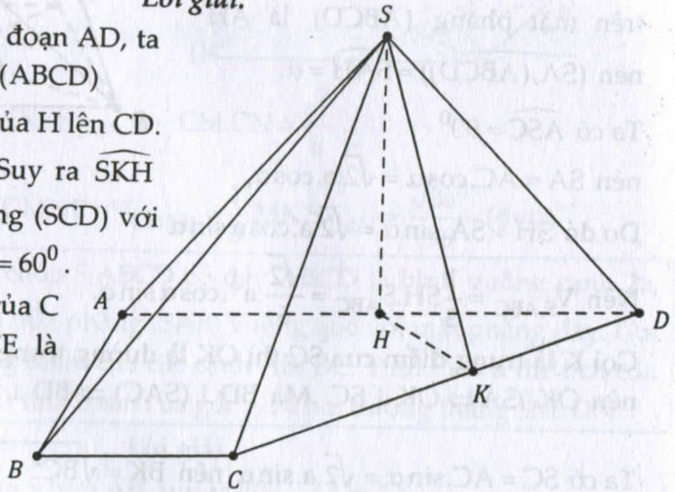
trong đó K là hình chiếu của H lên AM nên $\begin{cases}HK\perp CD\\HK\perp AM\end{cases}\Rightarrow HK\perp(ACD)$.

Trong tam giác vuông AHM, ta có: $HK=\frac{AH.HM}{\sqrt{AH^2+HM^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(B,(ACD))=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.6.12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=4a$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm đoạn AD, ta có $SH\perp AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

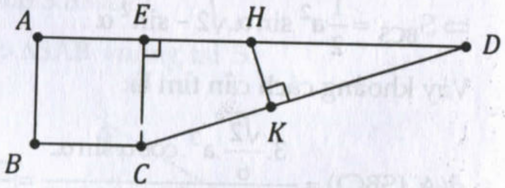
Gọi K là hình chiếu của H lên CD.

Ta có $CD\perp(SKH)$. Suy ra $\widehat{SKH}$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy, do đó $\widehat{SKH}=60^0$.

Gọi E là hình chiếu của C lên AD, suy ra ABCE là hình vuông cạnh a.

Ta có:

$CD=\sqrt{CE^2+ED^2}=a\sqrt{10}$



Do $\Delta CED\sim\Delta HKD$ nên ta có:

$$\frac{HK}{CE}=\frac{KD}{DE}$$

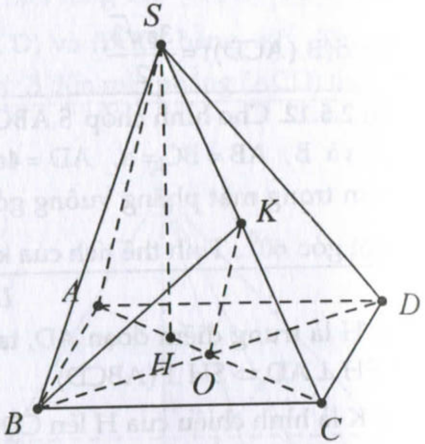
$$\Rightarrow HK=\frac{KD.CE}{DE}=\frac{\frac{a\sqrt{10}}{2}.a}{3a}=\frac{a\sqrt{10}}{6}$$

Suy ra $SH=HK\tan 60^0=\frac{a\sqrt{30}}{6}$, $S_{ABCD}=\frac{AB(AD+BC)}{2}=\frac{5a^2}{2}$

Vậy thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{5a^3\sqrt{30}}{12}$.

Ví dụ 2.6.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $\widehat{ASC} = 90^0$, SA lập với đáy góc α $(0^0 < \alpha < 90^0)$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Lời giải.



Ta có $V_{A.SBC} = \frac{1}{3}d(A,(SBC)).S_{BCS}$

nên $d(A,(SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC) \perp (ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH \perp (ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABCD) là AH nên $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAH} = \alpha$.

Ta có $\widehat{ASC} = 90^0$ nên $SA = AC.\cos\alpha = \sqrt{2}.a.\cos\alpha$,

Do đó $SH = SA.\sin\alpha = \sqrt{2}.a.\cos\alpha\sin\alpha$

Nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha$.

Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC nên $OK//SA \Rightarrow OK \perp SC$. Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ nên $BK \perp SC$.

Ta có $SC = AC.\sin\alpha = \sqrt{2}.a.\sin\alpha$ nên $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = a\sqrt{\frac{2-\sin^2\alpha}{2}}$

$\Rightarrow S_{BCS} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d(A,(SBC)) = \frac{3.\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha.}{\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}.a.\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\alpha}}.$$

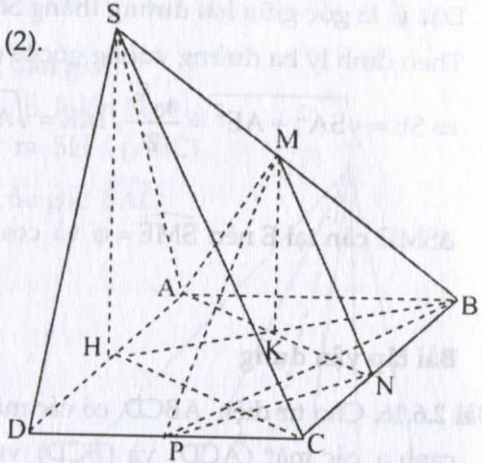
Ví dụ 2.6.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AD.

Ta có tam giác SAD đều $\Rightarrow SH \perp AD$.

$(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$ (1)



Ta có ABCD là hình vuông nên:

$\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow BP \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

MN//SC; AN//HC

$\Rightarrow (AMN)//(SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$

Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

$\Rightarrow MK//SH \Rightarrow MK \perp (CMN)$;

$MK = \frac{1}{2}SH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$

Diện tích tam giác CMN: $S_{CMN} = \frac{1}{2}CM.CN = \frac{a^2}{8}$.

Thể tích khối tứ diện CMNP: $V_{CMNP} = \frac{1}{3}.MK.S_{CMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

Ví dụ 2.6.15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

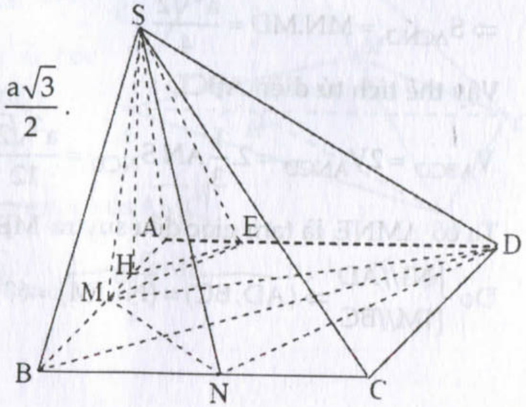
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

$\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.



Do đó tam giác đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác BMDN là:

$S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ ME//DN $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\widehat{SM, ME} = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

$$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

ΔSME cân tại E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.16. Cho tứ diện ABCD có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Hãy tính theo a thể tích khối tứ diện ABCD và tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

Hướng dẫn giải.

Gọi M, N, I lần lượt là các trung điểm các cạnh CD, AB, BD.

Suy ra $V_{ABCD} = 2V_{AMCD}$.

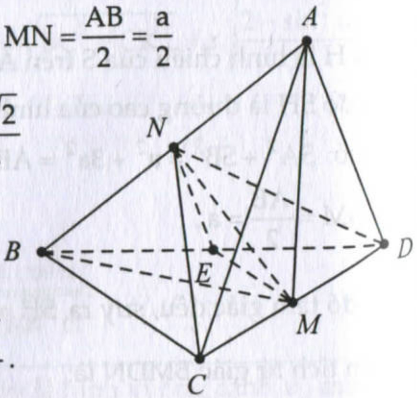
Ta có $\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp CN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCN) \Rightarrow AB \perp MN$

Do ΔACD cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD \Rightarrow AM \perp (BCD)$

$\Rightarrow AM \perp BM \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại $M \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{ND^2 - NM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CND} = MN.MD = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$



Vậy thể tích tứ diện ABCD :

$$V_{ABCD} = 2V_{ANCD} = 2.\frac{1}{3}AN.S_{NCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

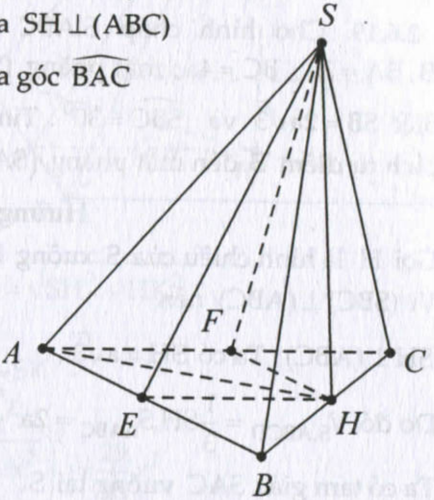
Ta có ΔMNE là tam giác đều suy ra $\widehat{MEN} = 60^0$.

Do $\begin{cases} NI//AD \\ IM//BC \end{cases} \Rightarrow (AD, BC) = (NI, IM) = 60^0$.

Bài 2.6.17. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = 2a. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Hướng dẫn giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên BC; E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC suy ra $SH \perp (ABC)$ và HE = HF nên AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$



Ta có: $\frac{AB}{HF} = \frac{BC}{HC} = 1 + \frac{BH}{CH} = 1 + \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow HF = \frac{AB.AC}{AB + AC} = \frac{2a}{3}$$

Suy ra $SH = HF.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = a^2$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

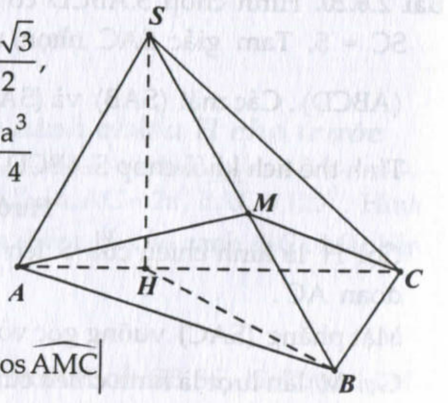
Bài 2.6.18. Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = AB = a, AC = 2a và $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBC).

Hướng dẫn giải.

Kẻ SH vuông góc AC $(H \in AC)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SC = BC = a\sqrt{3},\ SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3}{4}$$



Gọi M là trung điểm SB và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có: $SA = AB = a$, $SC = BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AM \perp SB$ và $CM \perp SB$, suy ra $\cos\varphi = \left|\cos\widehat{AMC}\right|$

$$\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SH = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vì AM là trung tuyến ΔSAB nên:

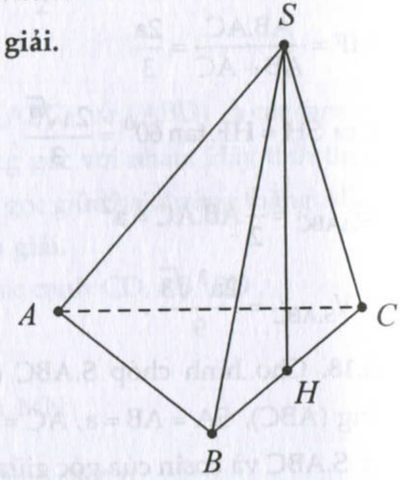
$$AM^2 = \frac{2AS^2 + 2AB^2 - SB^2}{4} = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Tương tự: $CM = \frac{a\sqrt{42}}{4} \Rightarrow \cos\widehat{AMC} = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2.AM.CM} = -\frac{\sqrt{105}}{35}$

Vậy: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{105}}{35}$

Bài 2.6.19. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là hình chiếu của S xuống BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên

$SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S.

Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$

và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được:

$$d\left(B,(SAC)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}.$$

Bài 2.6.20. Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật. AB = 3; BC = 4; SC = 5. Tam giác SAC nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Các mặt (SAB) và (SAC) tạo với nhau một góc φ với $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

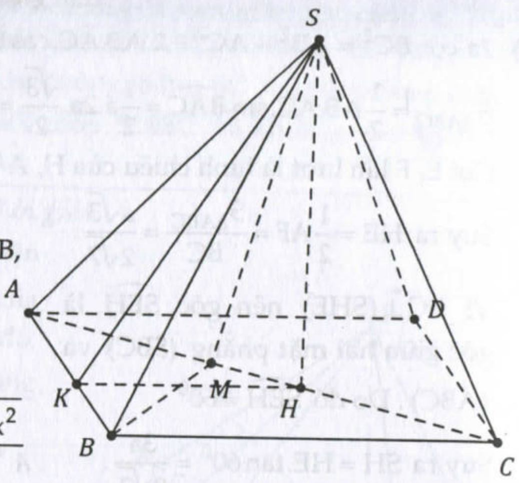
Hướng dẫn giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên AC. Vì tam giác SAC nhọn nên H thuộc đoạn AC.

Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi M lần lượt là hình chiếu của B lên AC và đặt $SH = x, x > 0$.

Ta có: $BM \perp (SAC)$ nên suy ra ΔSAM là hình chiếu của ΔSAB lên mặt phẳng (SAC)



Suy ra $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SAM}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$ (*).

Mà $AM = \frac{AB^2}{AC} = \frac{9}{5}$

nên $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SH.AM = \frac{9}{10}x$

Gọi K là hình chiếu của H lên AB,

suy ra $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$

$$\frac{HK}{BC} = \frac{AH}{AC} = 1 - \frac{CH}{AC}$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{SC^2 - SH^2}}{AC} = 1 - \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$$

Suy ra $HK = 4 - \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$, do đó $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2}$

Nên (*) $\Leftrightarrow \frac{9}{10}x = \frac{3}{\sqrt{29}}.\frac{1}{2}.SK.AB = \frac{9}{2\sqrt{29}}SK$

Suy ra $SK^2 = \frac{29}{25}x^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(4 - \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = \frac{29}{25}x^2$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 400 - 160\sqrt{25 - x^2} + 400 - 16x^2 = 29x^2$$

$$\Leftrightarrow 40 - x^2 = 8\sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 40 \\ x^4 - 17x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \sqrt{17}.$$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.BC = 4\sqrt{17} \text{ (đvtt)}.$$

Loại 4: Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ *có hình chiếu H cho trước*

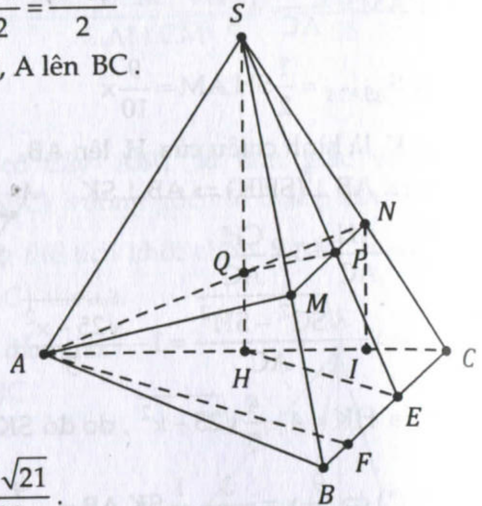
Ví dụ 2.6.16. Cho hình chóp S.ABC có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^0$. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với trung điểm H của cạnh AC. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 60^0.

1) Tính thể tích khối chóp S.ABC
2) Một mặt phẳng (α) đi qua A, song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp S.AMN, biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{a^2}{2\sqrt{7}}$.

Lời giải.

1) Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H, A lên BC.

Suy ra $HE = \frac{1}{2}AF = \frac{S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Vì $BC \perp (SHE)$ nên góc $\widehat{SEH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Do đó $\widehat{SEH} = 60^0$

Suy ra $SH = HE.\tan 60^0 = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$.

Vậy thể tích khối chóp S.ABC là:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a^2}{2\sqrt{7}} = \frac{a^3\sqrt{21}}{28}.$$

2) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SE với MN và SH với AN.

Vì MN//BC và $BC \perp (SHE)$ nên $PQ \perp MN$.

Gọi h là độ dài chân đường cao hạ từ A của tam giác AMN ; I là hình chiếu của N lên AC và đặt $\frac{MN}{BC} = x \Rightarrow MN = ax$

Ta có: $\frac{h}{PQ} = \frac{AN}{QN} = \frac{AI}{IH} = \frac{HC}{HI} + 1 = \frac{SC}{AN} + 1 = \frac{1}{x} + 1$.

$$\frac{NI}{SH} = \frac{CN}{SC} = 1 - \frac{SN}{SC} = 1 - x \Rightarrow NI = (1-x)SH$$

Suy ra $\frac{NI}{HQ} = \frac{AI}{AH} = 1 + \frac{HI}{CH} = 1 + \frac{SN}{SC} = 1 + x \Rightarrow HQ = \frac{IN}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}.SH$

Nên $h = \left(1 + \frac{1}{x}\right).\frac{1-x}{1+x}.SH = \frac{1-x}{x}.SH$

Suy ra $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}h.MN = \frac{1}{2}(1-x).a.SH = (1-x)\frac{3a^2}{4\sqrt{7}}$

Mà $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2}{\sqrt{7}}$ nên ta suy ra: $(1-x)\frac{3a^2}{4\sqrt{7}} = \frac{a^2}{2\sqrt{7}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

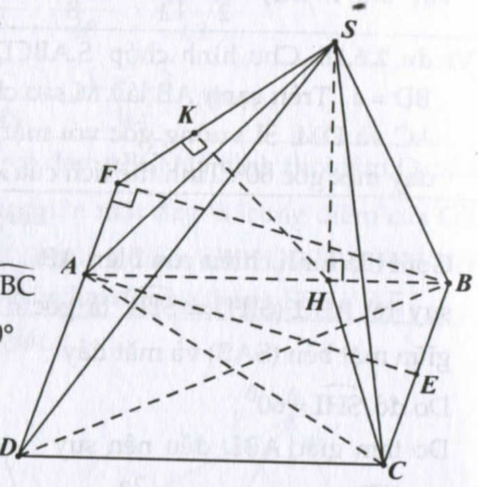
Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SN}{SB.SC} = x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{9}.V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{21}}{252}.$$

Ví dụ 2.6.17. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Lời giải.

- Tính $V_{S.ABC}$: Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABCD). Khi đó, ta có góc tạo bởi SC và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SCH} = 60°$.



Xét tam giác BHC.

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2 \cdot HB \cdot BC \cdot \cos\widehat{HBC}$$
$$= HB^2 + BC^2 - 2 \cdot HB \cdot BC \cdot \cos 60°$$
$$= \frac{a^2}{9} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9}.$$

Suy ra $HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Từ đây, ta tính được: $SH = HC \cdot \tan\widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60°\right) = \frac{\sqrt{7}a^3}{12}$ (đvtt).

- Tính d(SA, BC): Gọi E là trung điểm của BC và D là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCD. Ta có AD//BC

nên $d(SA,\ BC) = d\left(BC,\ (SAD)\right) = d\left(B,\ (SAD)\right) = \frac{3}{2} \cdot d\left(H,\ (SAD)\right)$.

Kẻ $HF \perp AD$ và $HK \perp SF$, khi đó ta có $HK \perp (SAD)$.

Suy ra : $d\left(H,\ (SAD)\right) = HK$.

Trong tam giác vuông SHF, ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2}$.

Do đó: $HK = \frac{HF \cdot HS}{\sqrt{HS^2 + HF^2}}$.

Mặt khác, ta lại có : $HF = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Nên suy ra: $HK = \frac{HF\cdot HS}{\sqrt{HS^2 + HF^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{21}}{3}}{\sqrt{\frac{3}{9}a^2 + \frac{21}{9}a^2}} = \frac{\sqrt{42}}{12}a$.

Vậy $d(SA,\ BC) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{42}}{12}a = \frac{\sqrt{42}}{8}a$.

Ví dụ 2.6.18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Trên cạnh AB lấy M sao cho $BM = 2AM$. Gọi I là giao điểm của AC và DM, SI vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.IMBC.

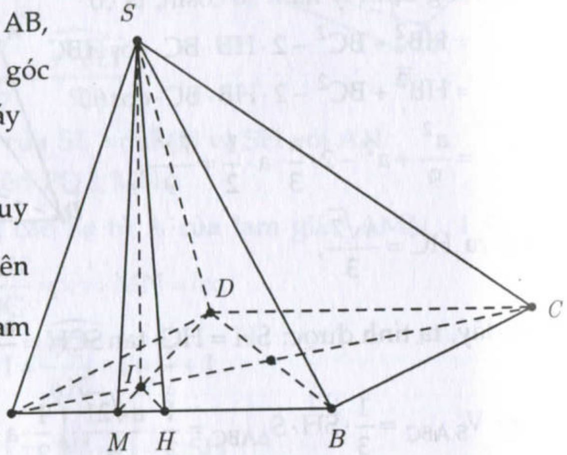
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của I lên AB, suy ra $AB \perp (SIH) \Rightarrow \widehat{SHI}$ là góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy

Do đó $\widehat{SHI} = 60^0$.

Do tam giác ABD đều nên suy ra $\widehat{ABD} = 60^0$ và $BD = \frac{2a}{3}$ nên

áp dụng định lí cô sin cho tam giác BDM ta có:



$MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2BM.BD.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{9}$

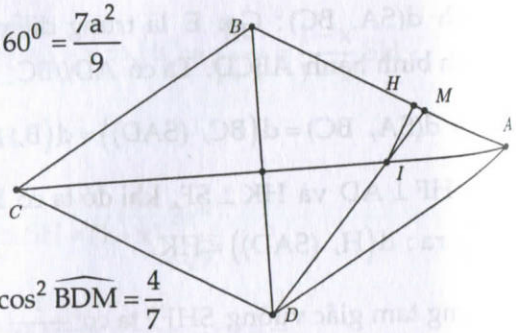
$\Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

Mặt khác: $\frac{MD}{\sin 60^0} = \frac{BM}{\sin \widehat{BDM}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{BDM} = \frac{BM.\sin 60^0}{MD} = \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow \cos^2\widehat{BDM} = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow \tan\widehat{BDM} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\widehat{BDM}} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = OD.\tan\widehat{BDM} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ I là trung điểm AO



Ta có $\Delta AHI \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{IH}{OB} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IH = \frac{AI.OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Suy ra $SI = IH\tan 60^0 = \frac{3a}{8}$

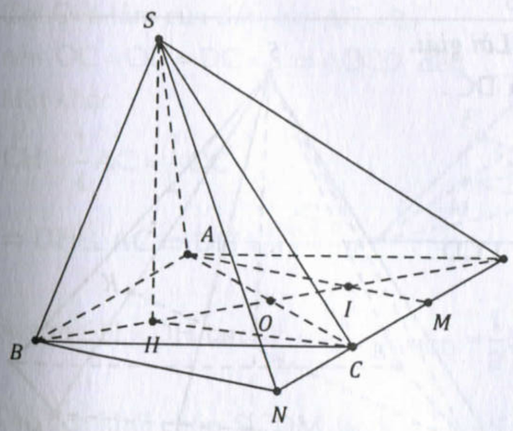
$\frac{S_{AMI}}{S_{\Delta ABO}} = \frac{AM}{AB}.\frac{AI}{AO} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{\Delta AMI} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABO} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48}$

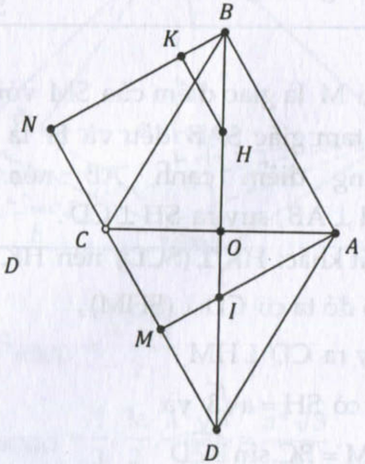
Do đó $S_{MICB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMI} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^2\sqrt{3}}{48}$

Vậy $V_{SMICB} = \frac{1}{3}SI.S_{MICB} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{8}.\frac{11a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{384}$ (đvtt).

Ví dụ 2.6.19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu của S lên mặt đáy là trung điểm của OB. SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm cạnh CD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AE.

Lời giải.





Gọi H là trung điểm OB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có HC là hình chiếu của SC lên mặt đáy nên $\widehat{SCH} = 60^0$.

$HO = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$

Suy ra: $CH = \sqrt{HO^2 + OC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow SH = CH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{21}}{4}$,

$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{7}}{8}$.

Dựng hình bình hành ABNM, suy ra $AM//(SBN)$ nên

$d(AM,SB)=d(AM,(SBN))=d(I,(SBN))$ với I là trọng tâm tam giác ACD

Do $IB=\frac{8}{3}HB\Rightarrow d(I,(SBN))=\frac{8}{3}d(H,(SBN))$

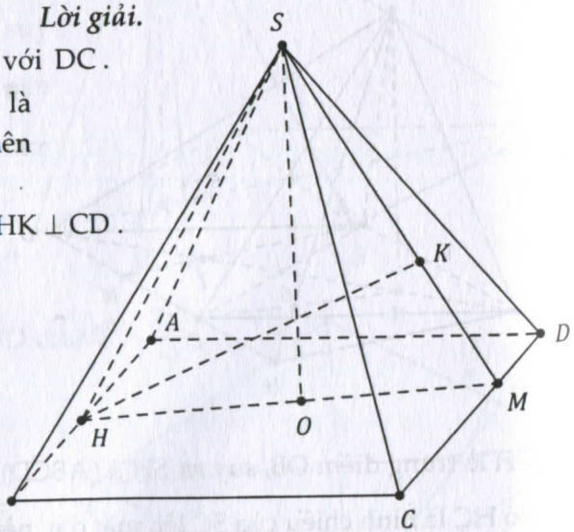
Dựng $HK\perp BN\Rightarrow HK=\frac{1}{4}DN=\frac{1}{4}.\frac{3}{2}a=\frac{3a}{8}$.

Gọi P là hình chiếu của H lên SK, ta có:

$$d(H,(SBN))=HP=\frac{HK.HS}{\sqrt{HK^2+HS^2}}=\frac{3a\sqrt{7}}{4\sqrt{31}}.$$

Ví dụ 2.6.20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, góc $\widehat{ABC}=120^0$, $BC=a$, $SA=SB=AB=2a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB và K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SCD), K nằm trong tam giác SCD và $HK=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải.



Gọi M là giao điểm của SM với DC.

Vì tam giác SAB đều và H là trung điểm cạnh AB nên $SH\perp AB$, suy ra $SH\perp CD$.

Mặt khác: $HK\perp(SCD)$ nên $HK\perp CD$.

Do đó ta có $CD\perp(SHM)$, suy ra $CD\perp HM$.

Ta có $SH=a\sqrt{3}$ và

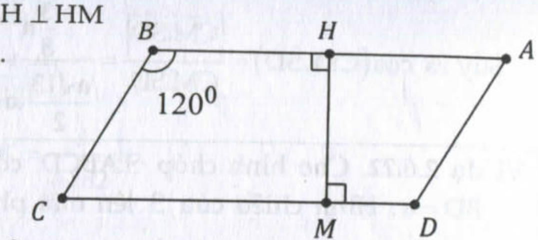
$HM=BC.\sin\widehat{BCD}$

$=a.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $MK=\sqrt{HM^2-HK^2}=\frac{a\sqrt{15}}{10}$; $SK=\sqrt{SH^2-HK^2}=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$

Do đó $SM=SK+KM=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Ta thấy $SH^2+MH^2=3a^2+\frac{3a^2}{4}=\frac{15a^2}{4}=SM^2$,



suy ra ΔSHM vuông tại S hay $SH\perp HM$

Mà $SH\perp AB$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Mặt khác:

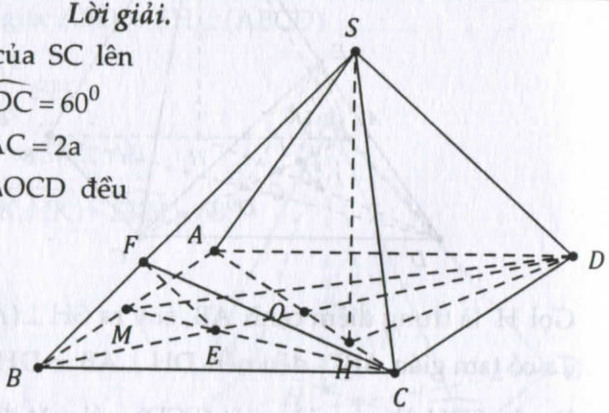
$S_{ABCD}=AB.BC.\sin\widehat{ABC}=a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp là:

$V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3}=a^3$.

Ví dụ 2.6.21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $AH=3HC$. Đường thẳng SD tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính thể tích của khối chóp S.CDM và cosin của góc giữa hai đường thẳng CM và SD.

Lời giải.



Ta có HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABCD) nên $\widehat{SDC}=60^0$

Gọi O là tâm của đáy, do $AC=2a$ nên $OC=OD=DC=a\Rightarrow\Delta OCD$ đều

Mặt khác

$CH=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{2}OC$

$\Rightarrow DH\perp AC\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $SH=DH.\tan 60^0=\frac{3a}{2}$, $S_{\Delta MCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp S.CDM là: $V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta CMD}=\frac{1}{3}.\frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AD},\vec{c}=\overrightarrow{HS}$

Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{DH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\Rightarrow\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{HD}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$

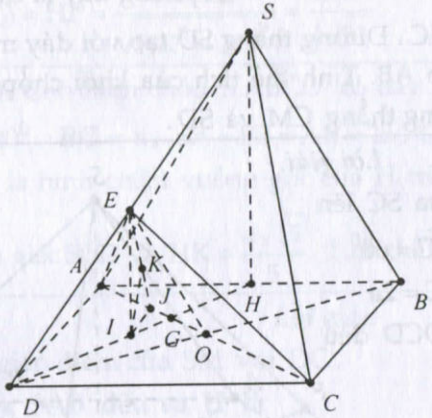
Suy ra $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{CM}=\frac{3}{8}\vec{a}^2-\frac{1}{4}\vec{b}^2=\frac{3}{8}a^2-\frac{3}{4}a^2=-\frac{3}{8}a^2$

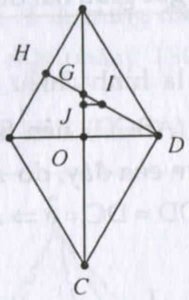
$CM=\sqrt{BC^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=a\sqrt{3}$

Suy ra $\cos(CM,SD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{SD}\right|}{CM.SD}=\dfrac{\frac{3}{8}a^2}{\frac{a\sqrt{13}}{2}.a\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4\sqrt{39}}=\dfrac{\sqrt{39}}{52}$.

Ví dụ 2.6.22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BD=a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm cạnh AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải.





Gọi H là trung điểm cạnh AB, suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Ta có tam giác ABD đều nên $DH\perp AB\Rightarrow DH\perp CD\Rightarrow CD\perp(SDH)$

Do đó $\widehat{SDH}$ là góc giữa mặt (SCD) với mặt đáy, suy ra $\widehat{SDH}=60^0$.

Suy ra $SH=DH.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{3a}{2}$; $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp là: $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Gọi E là trung điểm cạnh SD, suy ra $OE//SB\Rightarrow SB//(AEC)$

Do đó $d(SB,AC)=d(SB,(AEC))=d(B,(AEC))=2d(H,(AEC))$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD và I là trung điểm của DH

Suy ra $\dfrac{HG}{IG}=\dfrac{\frac{1}{2}DH}{\frac{1}{6}DH}=3\Rightarrow d(H,(AEC))=3d(I,(AEC))$.

Vì $EI//SH\Rightarrow EI\perp(ABCD)$.

Gọi J, K lần lượt là hình chiếu của I lên AC và SJ

Suy ra $d(I,(ACE))=IK$.

Ta có $IE=\dfrac{1}{2}SH=\dfrac{3a}{4}$, $IJ=\dfrac{1}{6}OD=\dfrac{a}{12}$.

Suy ra $\dfrac{1}{IK^2}=\dfrac{1}{IE^2}+\dfrac{1}{IJ^2}=\dfrac{1312}{9a^2}\Rightarrow IK=\dfrac{3}{4\sqrt{82}}a$.

Vậy $d(SB,AC)=\dfrac{9}{\sqrt{82}}a$.

- **Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải.

Gọi H là trọng tâm của tam giác $ABD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^2}{3}.SH$

Kẻ $HK\perp AB\Rightarrow AB\perp(SHK)\Rightarrow SK\perp AB$.

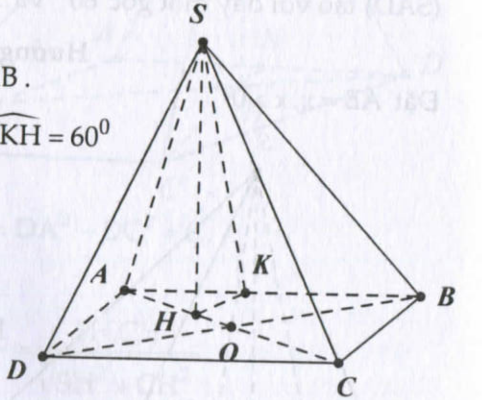
Suy ra $\widehat{((SAB),(ABCD))}=\widehat{(SK,HK)}=\widehat{SKH}=60^0$

Gọi O là tâm của đáy, ta có

$\Delta AKH\sim\Delta AOB$

$\Rightarrow\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{KH}{OB}$

$\Rightarrow KH=\dfrac{AH.OB}{AB}=\dfrac{2}{3}\dfrac{OB^2}{AB}=\dfrac{a}{3}$



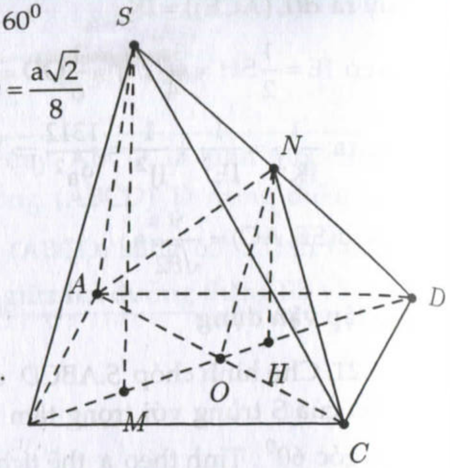
Trong tam giác vuông SHK ta có: $SH=HK.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Bài 2.6.22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $AB=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh OB, SD. Mặt phẳng (NAC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0; hai mặt phẳng (SAM) và (SCM) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp S.ACN.

Hướng dẫn giải.

Vì hai mặt phẳng (SAM) và (SCM) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên giao tuyến SM của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của MD, suy ra $NH//SM\Rightarrow NH\perp(ABCD)$



Do $DO \perp AC \Rightarrow AC \perp (NHO) \Rightarrow \widehat{NOH} = 60^0$

Ta có: $HD = \frac{1}{2}DM = \frac{3}{4}OD \Rightarrow HO = \frac{1}{4}OD = \frac{a\sqrt{2}}{8}$

Trong tam giác vuông NHO, ta có:

$NH = OH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{8} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$V_{NACD} = \frac{1}{2}V_{SACD}$

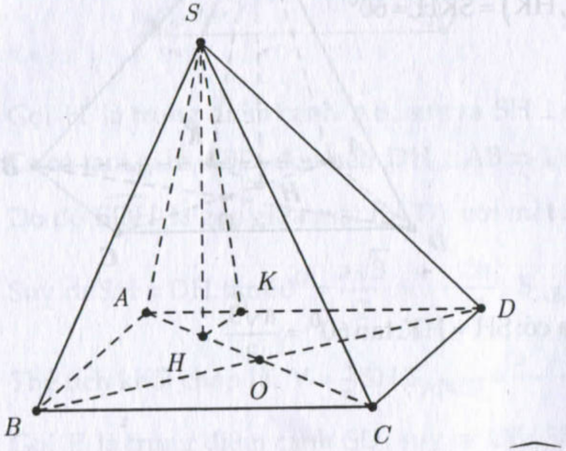
$\Rightarrow V_{SACN} = \frac{1}{2}V_{SACD} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ACD}$

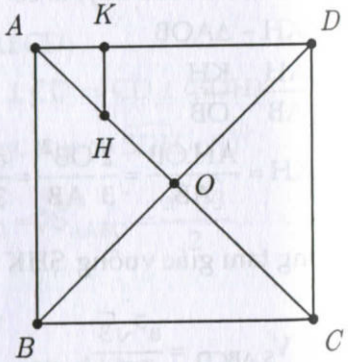
$= \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$

Bài 2.6.23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60^0 và $SC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(AB, SC)$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $AB = x, x > 0$





Vẽ $HK \perp AD$, suy ra $AD \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$

Ta có: $HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3x\sqrt{2}}{4}$; $HK = \frac{3}{4}DC = \frac{3x}{4}$.

Trong tam giác vuông SHC, ta có: $SH^2 = SC^2 - HC^2 = a^2 - \frac{9x^2}{8}$

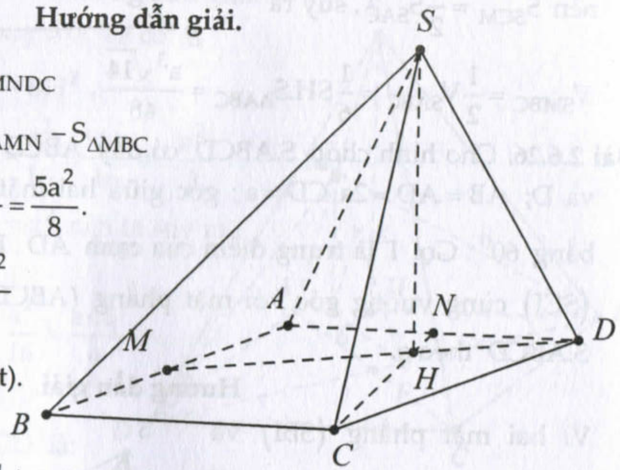
Trong tam giác vuông SHK, ta có: $SH = HK\tan 60^0 = \frac{3x\sqrt{3}}{4}$.

Dẫn tới $\frac{27x^2}{16} = a^2 - \frac{9x^2}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16a^2}{45} \Rightarrow x = \frac{4a}{3\sqrt{5}}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{3x\sqrt{3}}{4}.x^2 = \frac{\sqrt{3}x^3}{4} = \frac{16\sqrt{153}a^3}{675}$.

Bài 2.6.24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

Mà $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Nên $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8}$

$= \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt).

Lại thấy:

$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right).\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy:

$d(SC; DM) = d(H; SC) = \frac{2S_{\Delta HSC}}{SC} = \frac{SH.CH}{SC} = \frac{SH.CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}$.

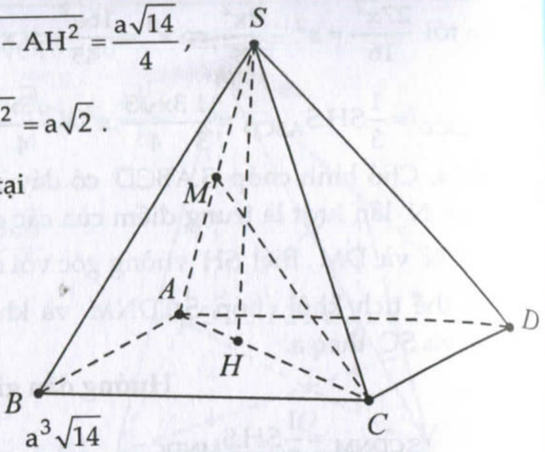
Lại có: $CH = \frac{2S_{\Delta CMD}}{DM} = \frac{2(S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CMB})}{DM} = a\sqrt{\frac{4}{5}}$

Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Bài 2.6.25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Hướng dẫn giải.

- Chứng minh M là trung điểm SA



Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$,

$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C nên M là trung điểm SA.

- Tính $V_{S.MBC}$?

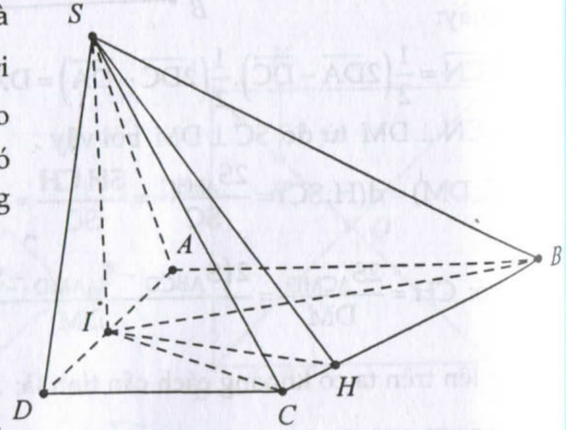
Vì M là trung điểm SC

nên $S_{SCM} = \frac{1}{2}S_{SAC}$, suy ra

$$V_{SMBC} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$

Bài 2.6.26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Hướng dẫn giải.



Vì hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó SI vuông góc với mặt phẳng (ABCD) hay là $SI \perp (ABCD)$

nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD}$

Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{AD(AB + CD)}{2} = 3a^2.$$

Gọi H là hình chiếu của I xuống BC

$$\Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow \widehat{SHI} = \widehat{((SBC),(ABCD))} = 60^0.$$

Ta có: $BC = \sqrt{AD^2 + (AB - DC)^2} = a\sqrt{5}$; $S_{\Delta IDC} = \frac{a^2}{2}$; $S_{\Delta AIB} = a^2$.

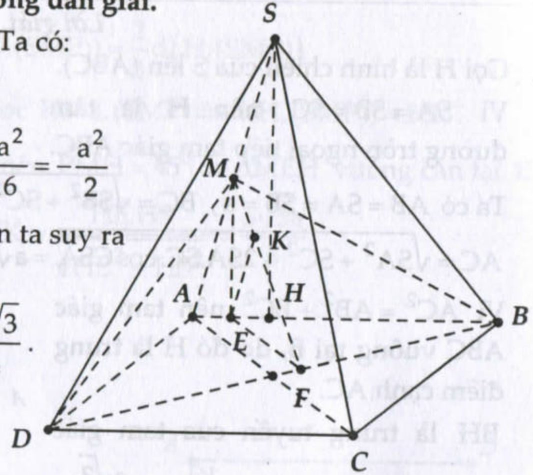
$$\Rightarrow S_{\Delta BCI} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} - S_{\Delta ABI}) = \frac{3}{2}a^2$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$

Bài 2.6.27. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác ASB vuông tại S, hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HB} = -3\overrightarrow{HA}$. Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa BD và SC.

Hướng dẫn giải.



Đặt $SA = x$, $SB = y$ với $x, y > 0$. Ta có:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = SB^2 - BH^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = AH^2 - BH^2 = \frac{a^2}{16} - \frac{9a^2}{16} = -\frac{a^2}{2}$$

Mặt khác: $x^2 + y^2 = AB^2 = a^2$ nên ta suy ra

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2}{4} \\ y^2 = \dfrac{3a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow SH = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Gọi M là trung điểm cạnh SA, O là tâm của đáy, suy ra MO//SC nên SC//(MBD).

Do đó $d(BD,SC) = d(SC,(MBD)) = d(C,(MBD)) = d(A,(MBD)) = \frac{8}{7}d(E,(MBD))$, trong đó, E là trung điểm đoạn AH.

Vì $EM//SH \Rightarrow EM \perp (ABCD)$ và $ME = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Gọi F là hình chiếu của E lên BD, K là hình chiếu của E lên MF.

Ta có được: $d(E,(MBD)) = EK$.

Ta có $EF = \frac{7}{8}AO = \frac{7}{16}AC = \frac{7a\sqrt{2}}{16}$ nên $EK = \frac{EF.EM}{\sqrt{FE^2 + ME^2}} = \frac{7a}{8}\sqrt{\frac{3}{55}}$.

Vậy $d(BD,SC) = a\sqrt{\frac{3}{55}}$.

Loại 5: Hình chóp có hai cạnh bên bằng nhau

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA_i = SA_j$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, khi đó H nằm trên đường trung trực đoạn A_iA_j.

Nếu $SA_i = SA_j = SA_k$ thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_iA_jA_k$.

Ví dụ 2.6.23. Cho hình chóp S.ABC có :

$SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = 60^0, \widehat{BSC} = 90^0, \widehat{CSA} = 120^0$.

Tính thể tích khối chóp S.ABC .

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

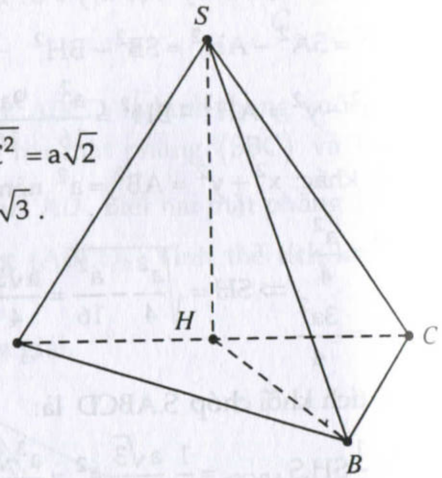
Vì $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AB = SA = SB = a$, $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{CSA}} = a\sqrt{3}$.

Vì $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B, do đó H là trung điểm cạnh AC.

BH là trung tuyến của tam giác vuông ABC nên $BH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Do đó $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Vậy thể tích khối chóp S.ABC là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ví dụ 2.6.24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a,với $a > 0$.Biết SAB là tam giác đều,góc giữa mp(SCD) và đáy bằng 60 độ.Gọi điểm H là hình chiếu của S lên mặt đáy,H ở trong hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC theo a.

Lời giải.

Gọi M',N lần lượt là hình chiếu của H lên AB,CD. Vì ABCD là hình vuông nên M,H,N thẳng hàng.

Ta có $AB \perp (SM'H) \Rightarrow AB \perp SM' \Rightarrow M' \equiv M$, do đó N là trung điểm cạnh CD.

Vì $CD \perp (SHN) \Rightarrow \overline{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SNH} = 60^0$.

Trong tam giác SHM ta có $SH^2 = SM^2 - MH^2 = 3a^2 - MH^2$

Trong tam giác SHN ta có $SH = HN.\tan 60^0 = \sqrt{3}(2a - HM)$.

Từ đó, suy ra

$$3a^2 - MH^2 = 3(2a - MH)^2 \Leftrightarrow 4MH^2 - 12aMH + 9a^2 = 0 \Rightarrow MH = \frac{3a}{2}.$$

Suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABCD} = 4a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Gọi P là trung điểm cạnh BC, suy ra MP//AC, do đó

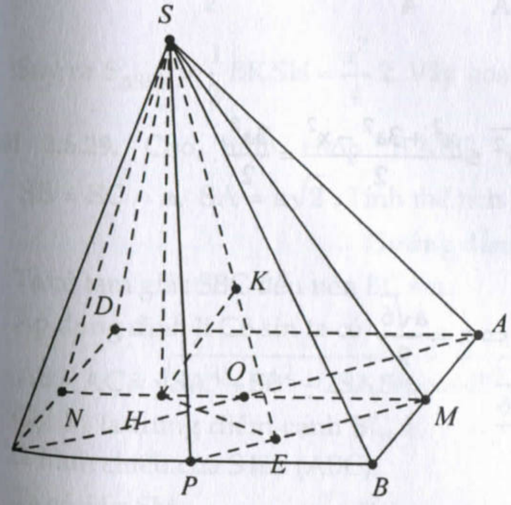
$d(SM,AC) = d(AC,(SMP)) = d(O,(SMP)) = \frac{2}{3}d(H,(SMP))$

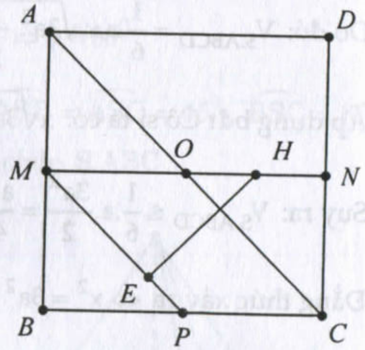
Kẻ $HE \perp PM$, $HK \perp SE$ ta có được $HK \perp (SMP) \Rightarrow d(H,(SMP)) = HK$.

Ta có tam giác BMP vuông cân nên $\widehat{PMH} = 45^0 \Rightarrow \Delta MEH$ vuông cân tại E.

Nên $HE = \frac{MH}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Suy ra $HK = \frac{HE.HS}{\sqrt{HE^2 + HS^2}} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$.

Vậy $d(AC,SM) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.





Ví dụ 2.6.25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = SC = a . Tính SD theo a để khối chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD .

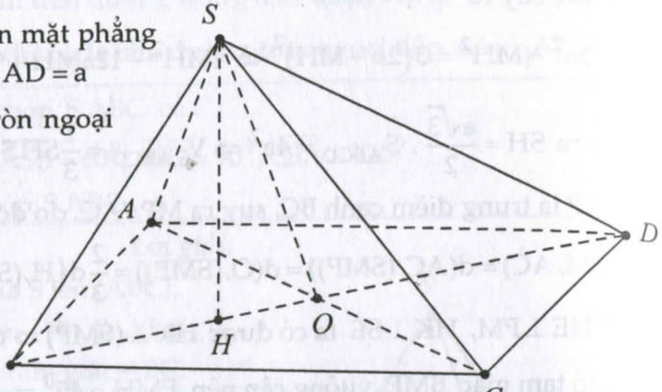
Mặt khác

$$\begin{cases} BD\perp AC \\ SH\perp AC \end{cases} \Rightarrow AC\perp (SBD) \Rightarrow O = BD\cap AC$$

là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD), mà $AS = AB = AD = a$

⇒ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD

⇒ ΔSBD vuông tại S.



Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD$

$\Rightarrow SH = \frac{SB.SD}{BD}$

và $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$,

nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{SB.SD}{BD}.\frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2+x^2}{4} = \frac{3a^2-x^2}{4}$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}.a.x.\sqrt{3a^2-x^2}$

Áp dụng bđt Cô si ta có: $x\sqrt{3a^2-x^2} \le \frac{x^2+3a^2-x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} \le \frac{1}{6}.a.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

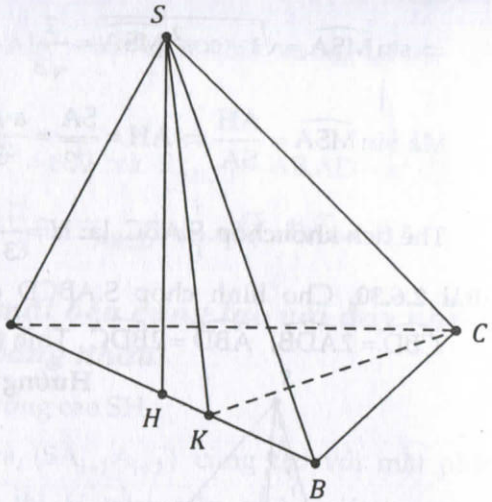
*** Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.28. Cho hình chóp S.ABC có $AB = 2a, BC = a, AC = \sqrt{3}a$, các cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Hướng dẫn giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác $AB^2 = BC^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại C, suy ra H là trung điểm cạnh AB.



Ta có:

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABC là:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên AB, suy ra $CK\perp (SAB)$

Do đó ΔSBK là hình chiếu của ΔSBC lên mặt phẳng (SAB)

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAB), ta có: $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SBK}}{S_{\Delta SAB}}$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = a^2$ và $BK = \frac{BC^2}{AB} = \frac{a}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta SBK} = \frac{1}{2}BK.SH = \frac{a^2}{4}2$. Vậy $\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$.

Bài 2.6.29. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 45^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $SB = SC = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Hướng dẫn giải.

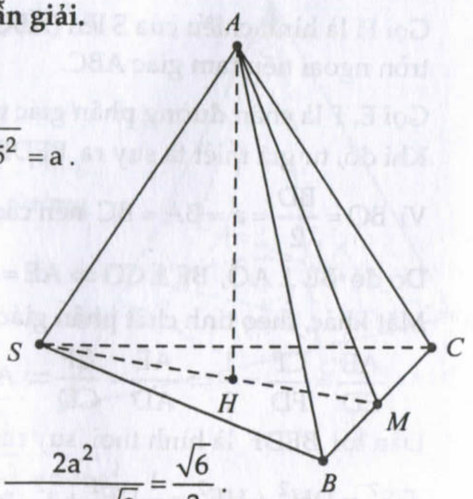
Ta có tam giác SBC đều nên $BC = a$.

Áp dụng định lí Cô sin ta có

$AB = AC = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos 45^0} = a$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là hình chiếu của S lên (ABC).

Ta có $H\in SM$.



Trong tam giác SAM, ta có

$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{MSA} = \frac{SM^2 + SA^2 - AM^2}{2.SA.SM} = \frac{2a^2}{2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

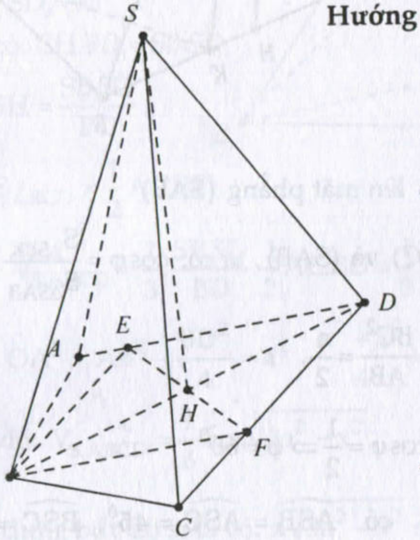
$\Rightarrow \sin\widehat{MSA} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{MSA}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

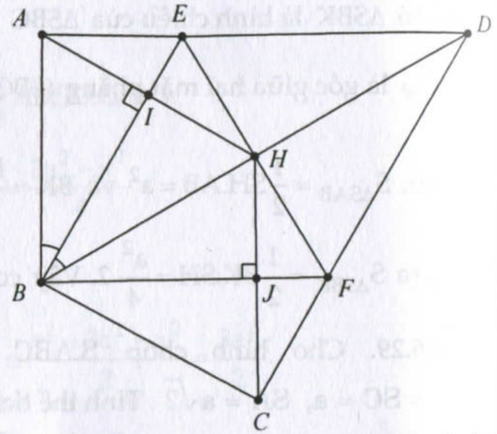
Mà $\sin\widehat{MSA} = \dfrac{AH}{SA} \Rightarrow AH = \dfrac{SA}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $S_{\Delta SBC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp S.ABC là: $V = \dfrac{1}{3}AH.S_{\Delta SBC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bài 2.6.30. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = SB = SD = BD = 2a, AB = BC = a$, $\widehat{CBD} = 2\widehat{ADB}$, $\widehat{ABD} = 2\widehat{BDC}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Hướng dẫn giải.





Gọi H là hình chiếu của S lên (ABCD). Vì $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi E, F là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{CBD}$.

Khi đó, từ giả thiết ta suy ra BEDF là hình bình hành tâm O.

Vì $BO = \dfrac{BD}{2} = a = BA = BC$ nên các tam giác ABO, CBO cân tại B

Do đó $BE \perp AO$, $BF \perp CO \Rightarrow AE = OE = OF = CF$.

Mặt khác, theo tính chất phân giác trong ta có

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow AD = CD$$

Dẫn tới BEDF là hình thoi, suy ra:

$$DE^2 = DH^2 + HE^2 = \frac{1}{4}DE^2 + a^2 \Rightarrow DE = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $AD = \dfrac{3}{2}DE = a\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A

$\Rightarrow H \equiv O$.

Ta có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ và $S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = a^3$.

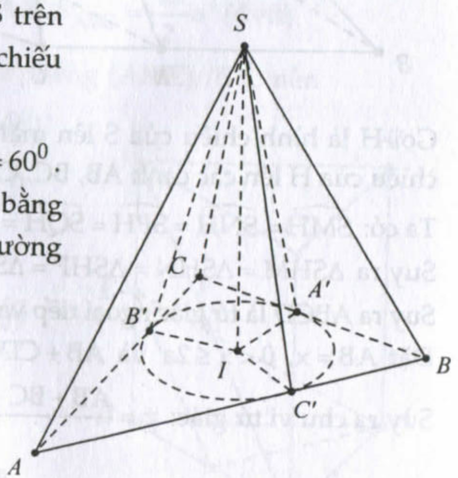
Loại 6: Hình chóp có một số mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, có đường cao SH.

- Nếu hai mặt phẳng (SA_iA_{i+1}) và $(SA_{i+1}A_{i+2})$ cùng tạo với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ một góc bằng nhau thì H nằm trên phân giác trong góc $\widehat{A_iA_{i+1}A_{i+2}}$.
- Nếu ba mặt phẳng $(SA_iA_{i+1}),(SA_{i+1}A_{i+2})$ và $(SA_{i+2}A_i)$ cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_iA_{i+1}A_{i+2}$.

Ví dụ 2.6.26. Cho hình chóp S.ABC có các cạnh đáy AB = 5a, BC = 6a, AC = 7a. Các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC). Biết hình chiếu của đỉnh S thuộc miền trong tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC), A',B',C' lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{SA'I} = \widehat{SB'I} = \widehat{SC'I} = 60^0$

Các tam giác vuông SIA',SIB',SIC' bằng nhau nên $IA' = IB' = IC' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC

$$\Rightarrow p = \frac{5a+6a+7a}{2} = 9a$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}$$
$$= \sqrt{9a(9a-6a)(9a-7a)(9a-5a)} = 6\sqrt{6}a^2$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có :

$$S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6\sqrt{6}a^2}{9a} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \Rightarrow IA' = r = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

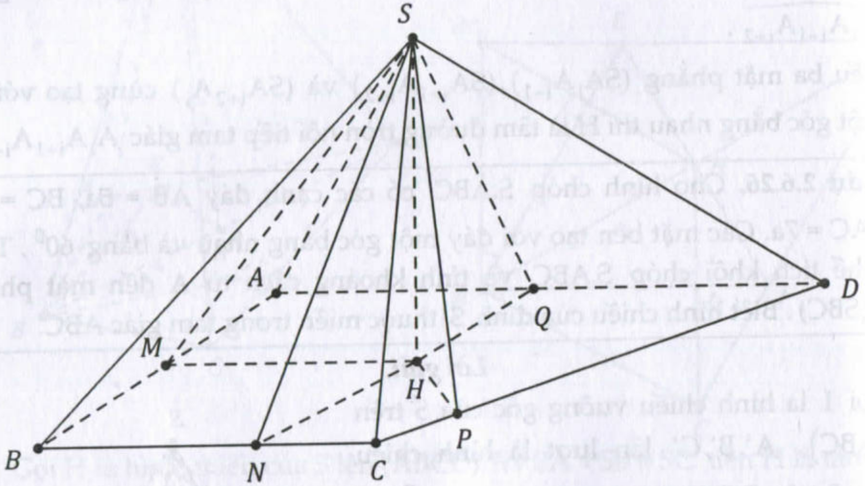
Ta có: $SI = IA'\tan 60^0 = \frac{2\sqrt{6}a}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$

Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SI.S_{ABC} = \frac{1}{3}2\sqrt{2}a.6\sqrt{6}a = 8\sqrt{3}a^3$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.31. Xét hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $CD = 2a$. Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy một góc 60^0. Gọi V là thể tích của khối chóp S.ABCD. Tìm giá trị lớn nhất của V.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy; M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có: $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} = \widehat{SQH} = 60^0$

Suy ra $\Delta SHM = \Delta SHN = \Delta SHP = \Delta SHQ \Rightarrow HM = HN = HP = HQ$

Suy ra ABCD là tứ giác ngoại tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác đó.

Đặt $AB = x,\ 0 < x \le 2a$ và $AB + CD = AD + BC = x + 2a$

Suy ra chu vi tứ giác: $p = \frac{AB + BC + CD + DA}{2} = 2a + x$

Diện tích của tứ giác ABCD: $S_1 = \frac{AB(BC + AD)}{2} = \frac{x(x + 2a)}{2}$.

Mặt khác: $S_1 = p.HM \Rightarrow HM = \frac{x}{2}$

Trong tam giác SHM, ta có: $SH = HM\tan 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD :

$$V = \frac{1}{3}SH.S_1 = \frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}.\frac{x(x + 2a)}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2(x + 2a)}{12}.$$

Do $x \le 2a$ và hàm số $f(x) = x^2(x + 2a)$ đồng biến trên $(0;2a)$ nên ta có

$$V \le \frac{\sqrt{3}(2a)^2(2a + 2a)}{12} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$, đạt được khi ABCD là hình vuông cạnh 2a.

2. Phân loại các dạng hình lăng trụ

Loại 1: Lăng trụ đứng

Lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với hai đáy.

Ví dụ 2.6.29. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).

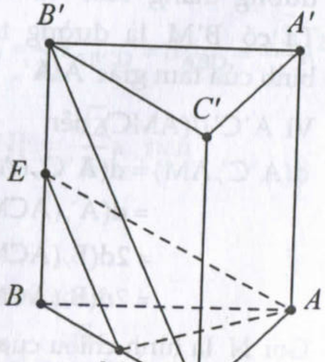
Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó mặt phẳng (AME)//B'C nên $d(AM, B'C) = d(B'C, (AME)) = d(C, (AME))$.

Nhận thấy $d(C, (AME)) = d(B, (AME)) = h$

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.



Ví dụ 2.6.28. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$ và $\widehat{ACB} = 120^0$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30^0. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $A'C'$ theo a.

Lời giải.

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC, ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos\widehat{ACB} = a^2 + 4a^2 - 2a.2a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2.$$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

Gọi K là hình chiếu của C lên AB. Suy ra $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AK \perp (ABB'A')$,

hay $A'K$ là hình chiếu của $A'C$ lên $(ABB'A')$.

Do đó $\widehat{CA'K}$ là góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(ABB'A')$ nên $\widehat{CA'K} = 30^0$.

Ta có: $CK.BC = AC.BC.\sin\widehat{ACB} = 2S_{\Delta ABC} \Rightarrow CK = \dfrac{a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $A'C = \dfrac{CK}{\sin\widehat{KA'C}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}.\dfrac{1}{2}a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$.

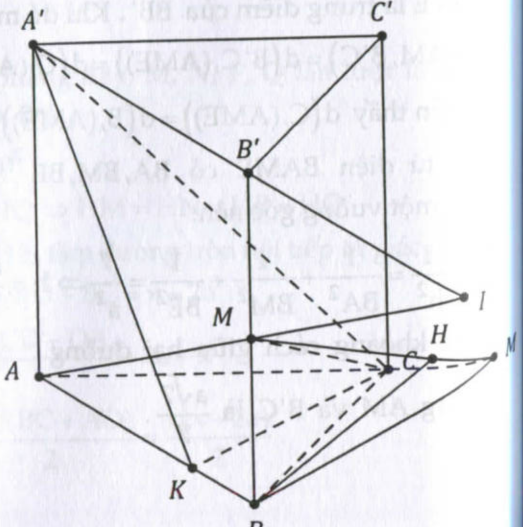
Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và $A'B'$.

Ta có $B'M$ là đường trung bình của tam giác AIA'.

Vì $A'C'//(AMC)$ nên

$$\begin{aligned} d(A'C', AM) &= d(A'C', (ACM)) \\ &= d(A', (ACM)) \\ &= 2d(B, (ACM)) \\ &= 2d(B, (ACM)) \end{aligned}$$

Gọi N là hình chiếu của B lên AC và H là hình chiếu của B lên MN, suy ra $AC \perp (BNM)$, nên $AC \perp BH \Rightarrow BH \perp (ACM)$



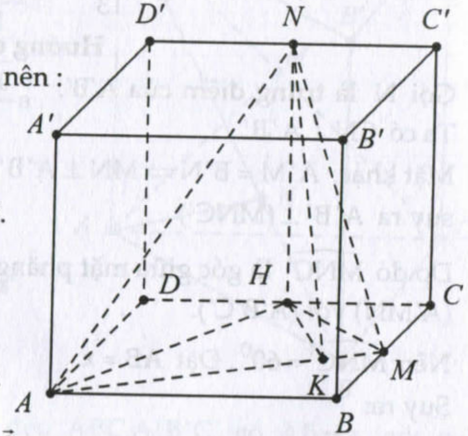
hay $d(B, (ACM)) = BH$.

Ta có: $BN = BC.\sin 60^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Suy ra: $BH = \dfrac{BN.BM}{\sqrt{BN^2 + BM^2}} = a\sqrt{\dfrac{15}{89}}$.

Vậy $d(A'C', AM) = 2a\sqrt{\dfrac{15}{89}}$.

Ví dụ 2.6.29. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác ABD là tam giác đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, C'D'$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (AMN) biết rằng $MN \perp B'D$.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên :

$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = 0, \vec{y}.\vec{z} = |\vec{y}||\vec{z}|.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$.

Vì M, N là trung điểm của $BC, C'D'$ nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$ hay

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \dfrac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \dfrac{1}{2}\vec{y}$.

Theo bài ra $MN \perp B'D$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$

Do đó

$$(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})\left(\frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.a^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $d(D, (AMN)) = \dfrac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$. Dễ thấy $S_{AMD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Gọi H là trung điểm của DC thì $NH \perp (ABCD), NH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ nên

$V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \dfrac{1}{3}NH.S_{AMD} = \dfrac{\sqrt{6}}{24}a^3$.

Kẻ $HK \perp AM$ ta có $NK \perp AM$. Theo định lí hàm số cosin

$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 120^0 = \dfrac{7}{4}a^2 \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}a$.

Ta có $S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \dfrac{3}{8}S_{ABCD} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$

Nên $HK=\frac{2S_{AHM}}{AM}=\frac{3\sqrt{21}}{28}a\Rightarrow NK=\sqrt{NH^2+HK^2}=\frac{\sqrt{231}}{14}a.$

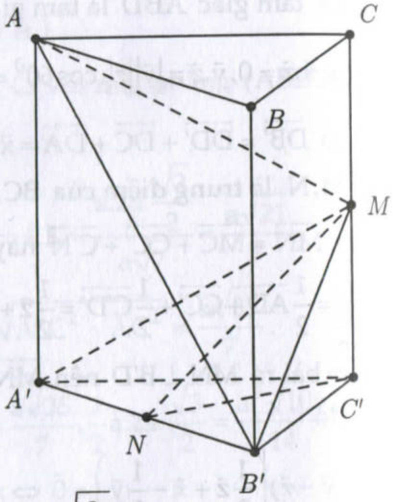
Suy ra $S_{AMN}=\frac{1}{2}NK.AM=\frac{\sqrt{33}}{8}a^2$, do đó $d(D,(AMN))=\frac{\sqrt{22}}{11}a.$

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11}a.$

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.6.32. Cho hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′, M là trung điểm của cạnh CC′. Mặt phẳng (A′B′M) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0 và tam giác A′MB′ có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{13}$. Tính thể tích khối chóp AMA'B'.

Hướng dẫn giải.



Gọi N là trung điểm của A′B′.

Ta có $CN\perp A'B'$

Mặt khác: $A'M=B'N\Rightarrow MN\perp A'B'$,

suy ra $A'B'\perp(MNC')$

Do đó $\widehat{MNC'}$ là góc giữa mặt phẳng (A′MN) với (A′B′C′).

Nên $\widehat{MNC'}=60^0$. Đặt $AB=x$

Suy ra:

$CN=\frac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MC'=C'N\tan 60^0=\frac{3x}{2}$

$\Rightarrow MN=x\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta MA'B'}=\frac{1}{2}MN.A'B'=\frac{x^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{13}\Rightarrow x=a\sqrt{\frac{2}{13}}.$

Ta có: $CC'=2C'M=3x$, suy ra $S_{\Delta AA'B'}=\frac{1}{2}AA'.A'B'=\frac{3x^2}{2}$

$$d\left(M,(AB'A')\right)=d(C',(AA'B'))=C'N=\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{AMA'B'}=\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}.\frac{3x^2}{2}=\frac{\sqrt{3}x^3}{4}=\frac{\sqrt{78}a^3}{338}.$

Bài 2.6.33. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có mặt đáy ABC vuông tại B và $AB=a, BC=2a,\ AA'=3a$. Từ A kẻ AM vuông góc với A'C và AN vuông góc với A'B($M\in CC'$, $N\in BB'$). Chứng minh rằng A'C vuông góc với mặt phẳng (AMN). Tính thể tích khối chóp A'.AMN.

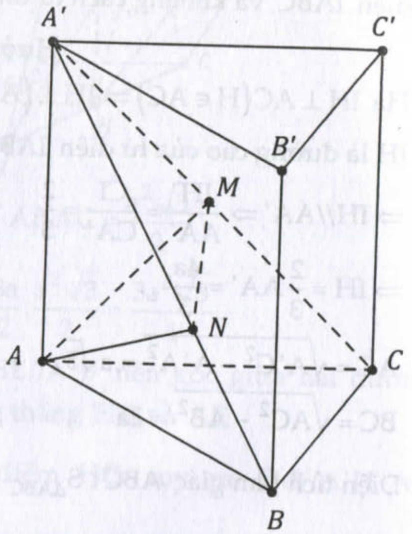
Hướng dẫn giải.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp BB'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AA'B'B)\Rightarrow BC\perp AN$

Mà $AN\perp A'B\Rightarrow AN\perp(A'BC)\Rightarrow AN\perp A'C$

Lại có $A'C\perp AM$ nên suy ra $A'C\perp(AMN)$.

Ta có thể tích khối chóp A'AMN là: $V=\frac{1}{3}A'M.S_{\Delta AMN}$.



Ta có: $A'M=\frac{A'A^2}{\sqrt{AC^2+AA'^2}}=\frac{9a}{\sqrt{14}}$;

$AM=\frac{AC.AA'}{\sqrt{AC^2+A'A^2}}=\frac{3\sqrt{70}}{14}a$;

$AN=\frac{AB.AA'}{\sqrt{AB^2+A'A^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}a$.

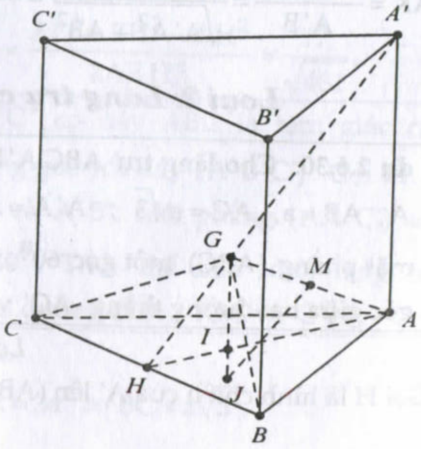
Suy ra $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\frac{9}{\sqrt{35}}a$

Do đó: $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}MN.AN=\frac{27\sqrt{14}}{140}a^2$.

Vậy $V=\frac{81}{140}a^3$.

Bài 2.6.34. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có: $\widehat{A'HA}=60^0$

Ta có : $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H=2AH=a\sqrt{3}$

và $AA'=\frac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ

$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

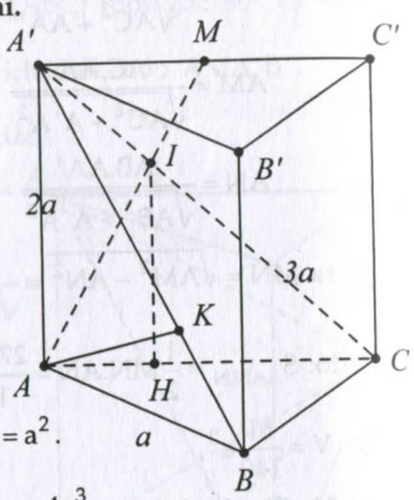
Gọi I là tâm của tam giác ABC, suy ra $GI//AA'\Rightarrow GI\perp(ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA; M là trung điểm GA, ta có:

$$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}.$$

Bài 2.6.35. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Hướng dẫn giải.



Hạ $IH \perp AC(H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$,

IH là đường cao của tứ diện IABC

$$\Rightarrow IH // AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$$

$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$$

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$.

Thể tích khối tứ diện IABC: $V = \frac{1}{3}IH.S_{\Delta ABC} = \frac{4a^3}{9}$.

Hạ $AK \perp A'B(K \in A'B)$. Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK

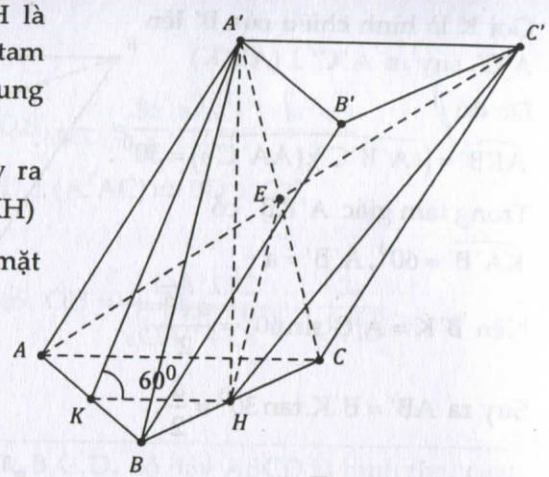
$$AK = \frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Loại 2: Lăng trụ cho trước hình chiếu

Ví dụ 2.6.30. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$; $A'A = A'B = A'C$. Mặt phẳng (A'AB) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ và cô sin của góc giữa hai đường thẳng AC' và A'B.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' lên (ABC).



Do $A'A = A'B = A'C$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra H là trung điểm cạnh BC.

Gọi K là trung điểm AB, suy ra $HK \perp AB$. Suy ra $AB \perp (A'KH)$ nên $\widehat{A'KH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A'AB) với (ABC) nên $\widehat{A'KH} = 60^0$.

Ta có $HK = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $A'H = HK\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối lăng trụ: $V = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Gọi E là trung điểm của A'C, suy ra HE//A'B nên góc giữa hai đường thẳng A'B và AC' là góc giữa hai đường thẳng HE và AE.

Ta có $AH = \frac{BC}{2} = a$, gọi M là trung điểm HC, suy ra EM//A'H và

$$EM = \frac{1}{2}A'H = \frac{3a}{4}$$

$$EM \perp (ABC),\ MH = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{2} \Rightarrow HE^2 = HM^2 + ME^2 = \frac{13a^2}{16}$$

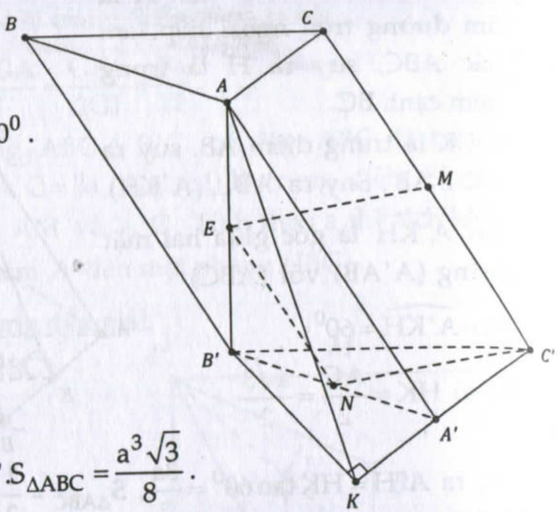
$$AM^2 = \frac{AH^2 + AC^2}{2} - \frac{HC^2}{4} = \frac{7a^2}{4},\ AE^2 = AM^2 + ME^2 = \frac{37a^2}{16}$$

Áp dụng định lí Cô sin ta có: $\cos\widehat{AEH} = \frac{AE^2 + EH^2 - AH^2}{2AE.HE} = \frac{17}{\sqrt{481}}$.

Ví dụ 2.6.31. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^0$ và AB' vuông góc với đáy (A'B'C'). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và A'B'. Mặt phẳng (AA'C') tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và C'N.

Lời giải.

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.



Gọi K là hình chiếu của B′ lên A′C′, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó $\widehat{AKB'} = \left(\widehat{(A'B'C'),(AA'C')}\right) = 30^0$.

Trong tam giác A'KB' có $\widehat{KA'B'} = 60^0, A'B' = a$

Nên $B'K = A'B'\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AB' = B'K.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = AB'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Gọi E là trung điểm của AB′, suy ra $ME // C'N$ nên $(C'N, AM) = (EM, AM)$

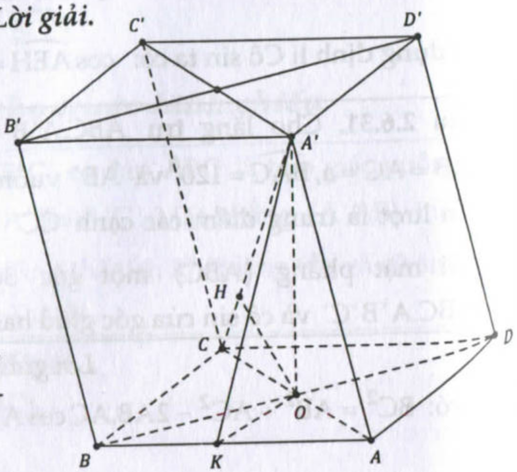
Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM \Rightarrow (C'N, AM) = \widehat{AME}$

Ta có: $AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}$. Vậy $\cos\widehat{AME} = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Ví dụ 2.6.32. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi, cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu của A′ lên mặt phẳng (ABCD) là giao điểm của AC và BD. Mặt phẳng (A'B'BA) tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và A'C.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $A'O \perp (ABCD)$

Gọi K là hình chiếu của O lên AB, suy ra $\widehat{A'KO} = 60^0$

Tam giác ABC đều nên

$OA = \frac{a}{2}, OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $OK = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A'O = OK\tan 60^0 = \frac{3a}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = A'O.S_{ABCD} = \frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vẽ $OH \perp A'C, H \in A'C$, ta có $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp OH$, hay $d(BD, A'C) = OH$.

Trong tam giác vuông A'OC ta có: $OH = \frac{OA'.OC}{\sqrt{OA'^2 + OC^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$.

Vậy $d(BD, A'C) = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$.

Ví dụ 2.6.33. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = \widehat{A_1AD} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên mp(ABCD) trùng với trung điểm H của cạnh CD. Tính thể tích của lăng trụ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1D và BC theo a.

Lời giải.

Ta có : $A_1D^2 = A_1H^2 + HD^2$ (1); $AA_1^2 = A_1H^2 + AH^2$ (2)

$A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2 - 2AA_1.AD.\cos 60^0$ (3)

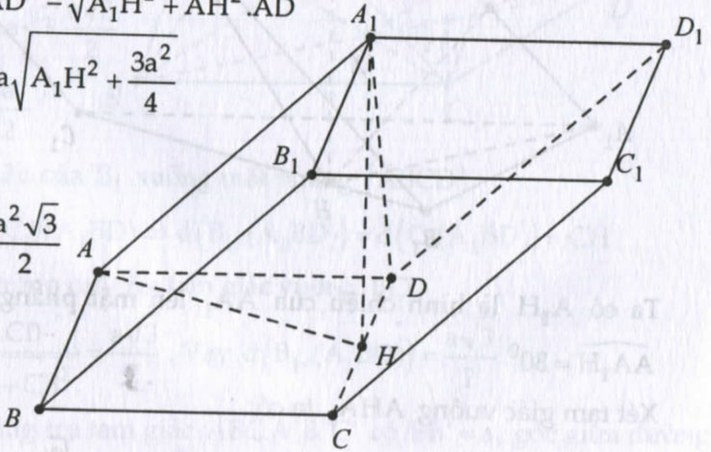
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow A_1H^2 + HD^2 = A_1H^2 + AH^2 + AD^2 - \sqrt{A_1H^2 + AH^2}.AD$

$\Leftrightarrow HD^2 = AH^2 + AD^2 - \sqrt{A_1H^2 + AH^2}.AD$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} + a^2 - a\sqrt{A_1H^2 + \frac{3a^2}{4}}$

$\Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.A_1H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

Kẻ $BC // AD \Rightarrow BC // (AA_1D)$

$\Rightarrow d(BC, A_1D) = d(BC, (AA_1D)) = d(C, (AA_1D)) = 2d(H, (AA_1D))$

$$AA_1^2 = A_1H^2 + AH^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{7}a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A_1AD} = \frac{1}{2}AA_1.AD.\sin 60^0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}a}{2}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{21}}{8}.$$

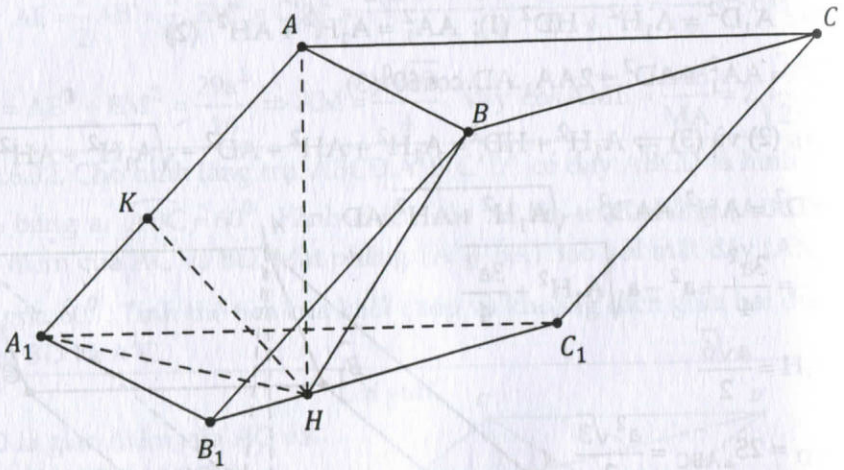
Suy ra $V_{A_1AHD} = \frac{1}{4}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

Do đó $d(H,(A_1AD)) = \frac{3V_{A_1AHD}}{S_{\Delta A_1AD}} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{16}.\frac{8}{a^2\sqrt{21}} = \frac{3a^3\sqrt{42}}{14}$.

* Bài tập vận dụng

Bài 2.6.36. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đoạn thẳng B_1C_1. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a.

Hướng dẫn giải.



Ta có A_1H là hình chiếu của AA_1 lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ nên suy ra $\widehat{AA_1H} = 30^0$

Xét tam giác vuông AHA_1 ta có:

$AH = AA_1.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$, $A_1H = AA_1.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà tam giác $A_1B_1C_1$ đều nên H là trung điểm của B_1C_1.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = AH.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Vẽ đường cao HK của tam giác AHA_1.

Ta có $B_1C_1 \perp (AHA_1)$ nên $B_1C_1 \perp HK$

Suy ra $d(AA_1, B_1C_1) = HK = \frac{AH.A_1H}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 2.6.37. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A₁ trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Hướng dẫn giải.

Gọi $O = AC \cap BD, I$ là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI) \Rightarrow \widehat{A_1IO} = \left((ADD_1A_1),(ABCD)\right) = 60^0$

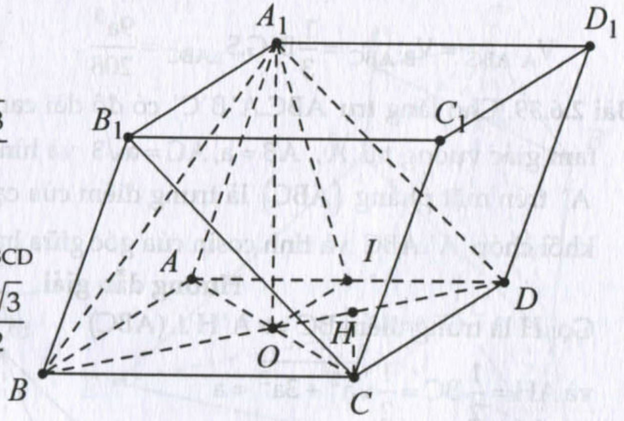
Vì $OI = \frac{a}{2}$, nên ta suy ra

$A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD}$$
$$= a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3a^3}{2}$$



Gọi B_2 là điểm chiếu của B_1 xuống mặt phẳng (ABCD)

Do $B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD) \Rightarrow d(B_1,(A_1BD)) = d(C,(A_1BD)) = CH$

Trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(B_1,(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2.6.38. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60⁰; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'.ABC theo a.

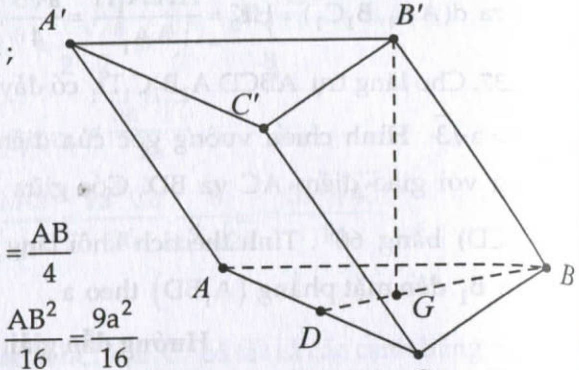
Hướng dẫn giải.

Gọi D là trung điểm AC, G là trong tâm ΔABC

$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^0$

$\Rightarrow B'G = BB'.\sin\widehat{B'BG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$BG = \dfrac{a}{2} \Rightarrow BD = \dfrac{3a}{4}$.



Trong ΔABC, ta có:

$BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow CD = \dfrac{AB}{4}$

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \dfrac{3AB^2}{4} + \dfrac{AB^2}{16} = \dfrac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\Delta ABC} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{104}$

Thể tích khối tứ diện A'.ABC:

$$V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}.$$

Bài 2.6.39. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

và $AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

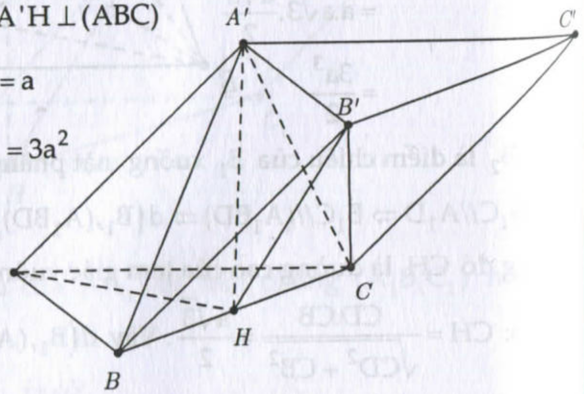
Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt).



Trong tam giác vuông A'B'H có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$

Nên tam giác B'BH cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = \widehat{B'BH}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{a}{2.2a} = \dfrac{1}{4}$.

---

3. Một số bài toán khác

Ví dụ 2.6.34. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng thể tích khối lập phương cạnh a. Trên các cạnh AA', BB' lấy M, N sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{3}$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CM với C'A' và CN với C'B'.

1) Mặt phẳng (CMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.
2) Tính thể tích khối chóp C'CEF.

Lời giải.

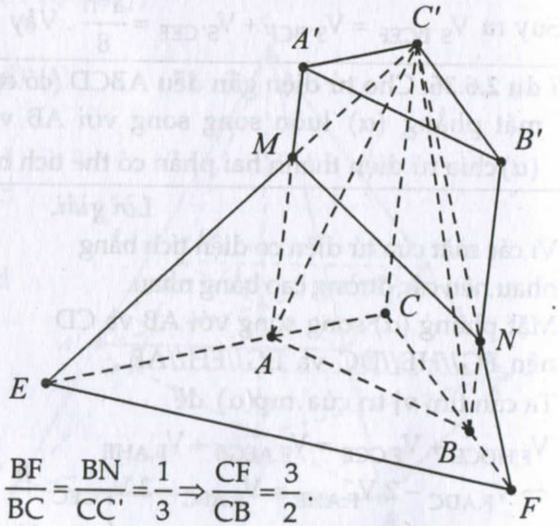
Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$.

1) Do $V_{C'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$, suy ra $V_{C'ABB'A'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2a^3}{3}$

Mặt khác $S_{ABNM} = S_{A'B'NM} \Rightarrow V_{C'A'B'NM} = \dfrac{1}{2}V_{C'ABB'A'} = \dfrac{a^3}{3}$

Suy ra $V_{C'CABNM} = \dfrac{2a^3}{3}$.

Vậy $\dfrac{V_{C'A'B'NM}}{V_{C'CABNM}} = \dfrac{1}{2}$.



2) Ta có:

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{\frac{1}{2}CE.CF.\sin\widehat{ECF}}{\frac{1}{2}CA.CB.\sin\widehat{ACB}} = \frac{CE.CF}{CA.CB}$$

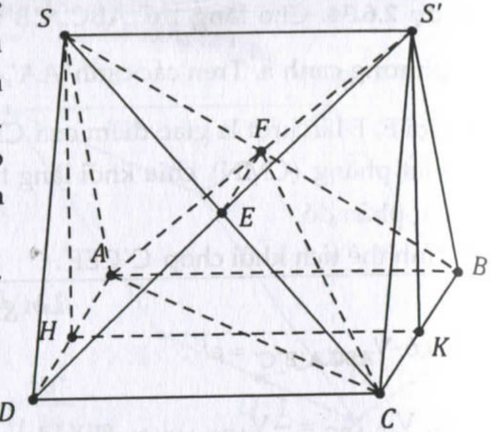
Mà $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{MA}{CC'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{CE}{CA} = 3$, $\dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BN}{CC'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{3}{2}$.

Do đó $\dfrac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}} = \dfrac{9}{2}$. Suy ra $C_{C'CEF} = \dfrac{9}{2}V_{C'CAB} = \dfrac{3a^3}{2}$.

Ví dụ 2.6.35. Cho hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD có chung đáy ABCD là một hình vuông cạnh a (S và S' nằm về cùng một phía của $(ABCD)$). Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC, biết $SH = S'K = h$ và SH, S'K cùng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích phần chung của hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD theo a và h.

Lời giải.

Từ giả thiết đề bài, ta suy ra các tứ giác SDCS', SABS' là các hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là tâm của các hình bình hành SDCS', SABS'. Ta có phần chúng của hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD là khối đa diện: ABCDEF.



Ta có: $V_{ABCDEF} = V_{S'ABCD} - V_{S'BCEF}$.

Mà: $V_{S'ABCD} = \frac{1}{3}S'K.S_{ABCD}$

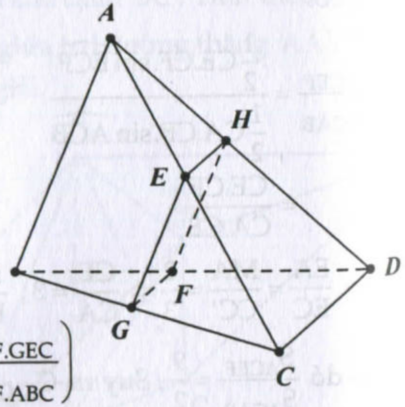
$$= \frac{1}{3}h.a^2 = \frac{a^2h}{3}$$

$$V_{S'BCF} = \frac{S'F}{S'A}.V_{S'ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S'ABCD} = \frac{a^2h}{12},\ V_{S'CEF} = \frac{1}{8}V_{S'ABCD} = \frac{a^2h}{24}$$

Suy ra $V_{S'BCEF} = V_{S'BCF} + V_{S'CEF} = \frac{a^2h}{8}$. Vậy $V_{ABCDEF} = \frac{5a^2h}{24}$.

Ví dụ 2.6.36. Cho tứ diện gần đều ABCD (có các cặp cạnh đối bằng nhau) và mặt phẳng (α) luôn song song với AB và CD. Tìm vị trí của (α) để (α) chia tứ diện thành hai phần có thể tích bằng nhau

Lời giải.



Vì các mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau nên các đường cao bằng nhau.

Mặt phẳng (α) song song với AB và CD nên FG//HE//DC và EG//FH//AB.

Ta cần tìm vị trí của mp(α) để

$$V_{F.HDCE} + V_{F.GCE} = V_{F.AEGB} + V_{F.AHE}$$

$$\Leftrightarrow V_{F.ADC} - 2.V_{F.AHE} = V_{F.ABC} - 2.V_{F.GEC}$$

$$\Leftrightarrow V_{A.FDC}\cdot\left(1 - 2.\frac{V_{F.AHE}}{V_{F.AHE}}\right) = V_{A.FBC}\cdot\left(1 - 2.\frac{V_{F.GEC}}{V_{F.ABC}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{FDC}}{S_{FBC}} = \frac{1 - 2.\frac{S_{GEC}}{S_{ABC}}}{1 - 2.\frac{S_{AHE}}{S_{AHE}}} \Leftrightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1 - 2.(\frac{EC}{EA})^2}{1 - 2\left(\frac{AH}{AD}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{HD}{AH} = \frac{AD^2 - 2.HD^2}{AD^2 - 2.AH^2} \Leftrightarrow (HD - HA)^3 = 0$$

⇔ Mặt phẳng α đi qua trung điểm của cạnh AD.

Ví dụ 2.6.37. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành. G là giao điểm hai đường chéo của ABCD. Trên đoạn SG lấy I sao cho : $\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SG}$. Mặt phẳng ($\alpha$) đi qua I và cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại A′, B′, C′, D′. Tìm vị trí (α) sao cho thể tích hình chóp S.A′B′C′D′ nhỏ nhất (biết thể tích hình chóp S.ABCD là V).

Lời giải.

Đặt : $\frac{SA'}{SA} = a,\ \frac{SB'}{SB} = b,\ \frac{SC'}{SC} = c,\ \frac{SD'}{SD} = d\ \ (0 < a, b, c, d < 1)$

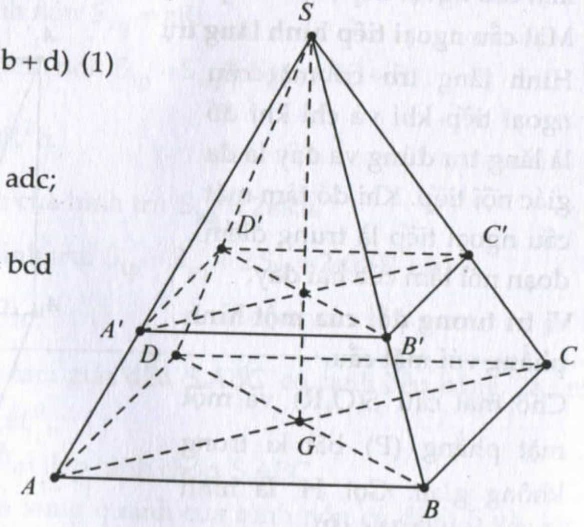
Ta có: $\frac{V_{S.A'IB'}}{V_{S.AGB}} = \frac{SI}{SG}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB} = kab$

Tượng tự có : $\frac{V_{S.B'IC'}}{V_{S.BGC}} = kbc$; $\frac{V_{S.C'ID'}}{V_{S.CGD}} = kcd$; $\frac{V_{S.D'IA'}}{V_{S.DGA}} = kda$,

Suy ra: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{V_{S.A'IB'}}{V_{S.AGB}} + \frac{V_{S.B'IC'}}{V_{S.BGC}} + \frac{V_{S.C'ID'}}{V_{S.CGD}} + \frac{V_{S.D'IA'}}{V_{S.DGA}}\right)$

$$= \frac{k}{4}(ab + bc + cd + da),$$

hay $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V} = \frac{k}{4}(a + c)(b + d)$ (1)



Mặt khác, ta có:

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = abc$; $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = adc$;

$\frac{V_{S.B'A'D'}}{V_{S.BAD}} = bad$; $\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = bcd$

Do đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V} = \frac{1}{2}ac(b + d)$$

$$= \frac{1}{2}bd(a + c)\ (2)$$

Từ (1), (2) ta có:

$$\begin{cases} \frac{k}{4}(a + c)(b + d) = \frac{1}{2}ac(b + d) \\ \frac{k}{4}(a + c)(b + d) = \frac{1}{2}bd(a + c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ac}} \\ \frac{2}{k} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \geq 2\sqrt{\frac{1}{bd}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{ac} \geq k \\ \sqrt{bd} \geq k \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V} = \frac{k}{4}(a + c)(b + d) \geq k\sqrt{ac}.\sqrt{bd} \geq k^3$

Vậy $\min V_{S.A'B'C'D'} = k^3.V$ đạt được khi và chỉ khi:

$a = b = c = d \Leftrightarrow (\alpha)//(ABCD)$.

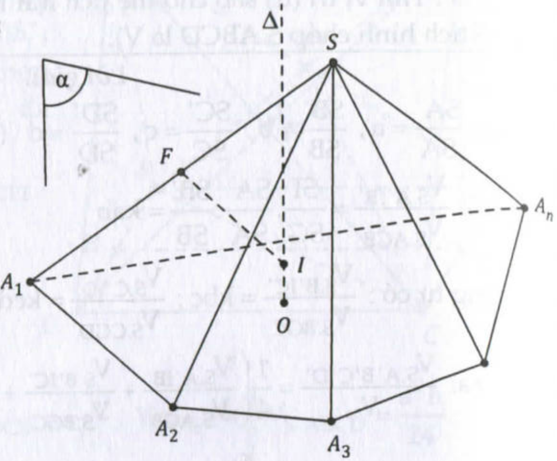
§ 7. MẶT CẦU – MẶT TRỤ TRÒN XOAY

I. Mặt cầu

1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

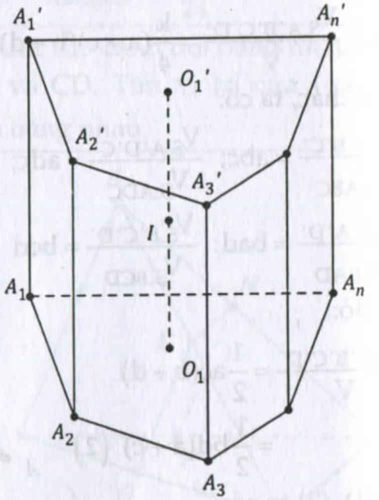
Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ nội tiếp mặt cầu khi và chỉ khi đáy là đa giác nội tiếp. Khi đó để xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp, ta làm như sau:

- Dựng đường thẳng Δ vuông góc với đáy tại tâm của đáy
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên
- Giao điểm $I = \Delta \cap (\alpha)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp



2. Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

Hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp. Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp là trung điểm đoạn nối tâm của hai đáy.



3. Vị trí tương đối của một hình phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu S(O,R) và một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

- Nếu $OH > R$ thì (P) không cắt mặt cầu
- Nếu $OH = R$ thì (P) và (S) có một điểm chung duy nhất là H.

  Khi đó ta nói: (P) tiếp xúc với mặt cầu và (P) gọi là mặt phẳng tiếp diện, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu $OH < R$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$

  Nếu O nằm trên (P) thì (C) gọi là đường tròn lớn và có bán kính R.

4. Vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu S(O,R) và một đường d bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên d.

- Nếu $OH > R$ thì d và mặt cầu không có điểm chung.
- Nếu $OH = R$ thì d và mặt cầu (S) có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói d tiếp xúc với mặt cầu và d gọi là tiếp tuyến cảu mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu $HO < R$ thì d và mặt cầu có đúng hai điểm chung. Khi đó ta nói d cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

5. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Diện tích hình cầu bán kính R: $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu bán kính R: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

II. Mặt trụ, mặt nón tròn xoay

Công thức tính diện tích và thể tích.

- Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R(l + R)$.
- Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.
- Diện tích mặt xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh$.
- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{sq} + 2.S_d = 2\pi R(R + h)$.
- Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$.

Ví dụ 2.7.1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng 2a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0.

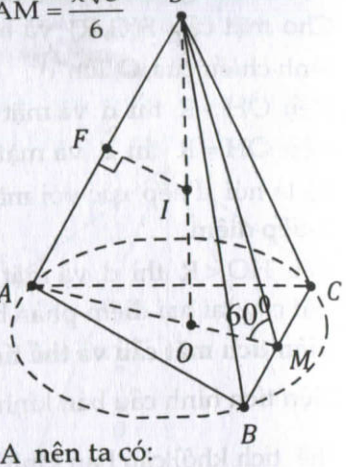
1) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC
2) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

1) Đặt $AB = x$. Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm đoạn AB, suy ra $BC \perp (SMA)$ nên góc $\widehat{SMA}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp, suy ra $SMA = 60^0$

Gọi F là trung điểm cạnh SA, trong mặt phẳng (SMA) đường trung trực đoạn SA cắt SO tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính $R = SI$.



Ta có $AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, $OA=\frac{2}{3}AM=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, $OM=\frac{1}{3}AM=\frac{x\sqrt{3}}{6}$

Trong tam giác SAO, ta có:

$$SO^2=SA^2-AO^2=4a^2-\frac{x^2}{3}$$

Trong tam giác SOM, ta có:

$$SO=OM.\tan 60^0=\frac{x}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{x^2}{4}=4a^2-\frac{x^2}{3}\Leftrightarrow\frac{7x^2}{12}=4a^2\Rightarrow x=\frac{4a\sqrt{21}}{7}.$$

Ta có tam giác SFI đồng dạng với tam giác SOA nên ta có:

$$\frac{SI}{SA}=\frac{SF}{SO}\Rightarrow SI=\frac{SA^2}{2SO}=\frac{2a^2}{\frac{2a\sqrt{21}}{7}}=\frac{a}{\sqrt{21}}.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi a^3}{63\sqrt{21}}$.

2) Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{4a\sqrt{7}}{7}$

Suy ra diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $S_d=\pi r^2=\frac{16\pi a^2}{7}$

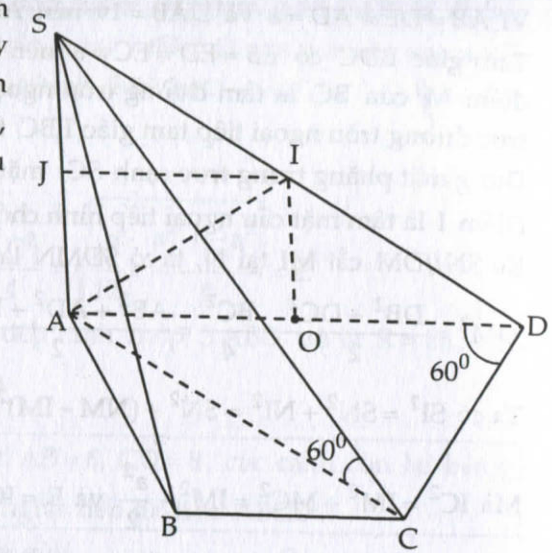
Vậy thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp là:

$$V=\frac{1}{3}SO.S_d=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{16\pi a^2}{7}=\frac{32\pi a^3\sqrt{21}}{147}.$$

Ví dụ 2.7.1. Trong hình phẳng (P) cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp đường tròn đường kính $AD=2R$. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với (P), trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Trong tam giác SAC từ trung điểm J của cạnh SA kẻ Jy song song với AC, ta có Jy là đường trung trực cạnh SA. Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.



Ta có I thuộc Ox nên IA = IB = IC = ID và I thuộc Jy nên IS=IA. Vậy I là tâm hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D. Và bán kính hình cầu này là r = IA.

Theo giải thiết ta có:

$\widehat{SCA}=((SCD),(P))=60^0$.

$\Rightarrow AC=AD\sin 60^0=\sqrt{3}R$,

$SA=AC\tan 60^0=3R$

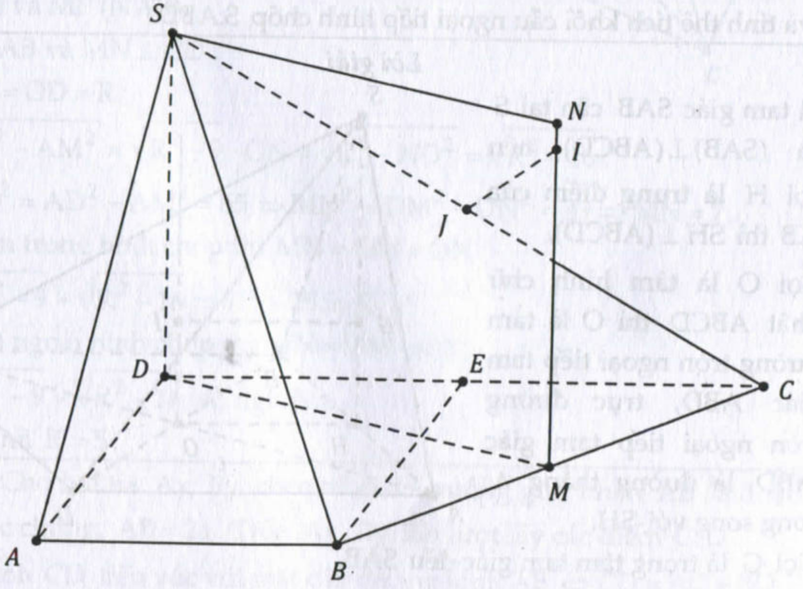
Tứ giác AOIJ là hình chữ nhật

nên $AI=\sqrt{AJ^2+AO^2}=\frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $r=\frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Ví dụ 2.7.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, D, $AB=AD=a$, $CD=2a$. Cạnh bên $SD\perp(ABCD)$ và $SD=a$. Gọi E là trung điểm của DC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

Lời giải.



Vì $AB = DE = AD = a$ và $\widehat{DAB} = 1v$ nên ABED là hình vuông.

Tam giác BDC có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại B, $BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC. Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh SC, mặt phẳng đó cắt Δ tại I.

Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

Kẻ SN//DM cắt MI tại N, ta có SDMN là hình chữ nhật với $SD = a$ và

$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}.$$

Ta có $SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2 = \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$

Mà $IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$ và $R = IC = IS$ nên:

$$\frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3}{2}a$$

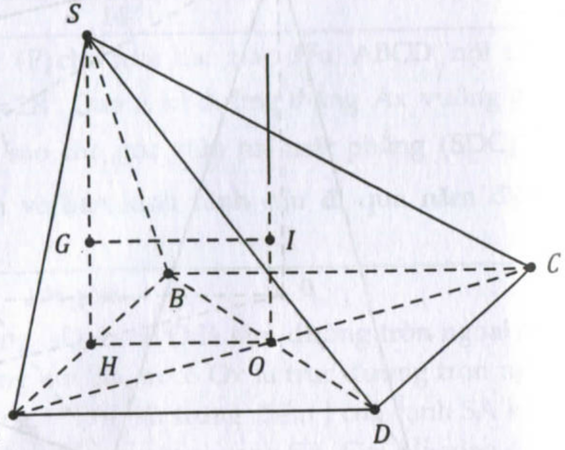
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BEC là:

$$R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}a.$$

Ví dụ 2.7.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Mặt phẳng $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA = SB = a$. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD.

Lời giải.

Vì tam giác SAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp (ABCD)$.



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD là đường thẳng Δ song song với SH.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều SAB.

Vì $HO \perp (SAB)$ nên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là đường thẳng qua G, song song với HO cắt Δ tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD. Tứ giác GHOI là hình chữ nhật.

Ta có $GH = \frac{1}{3}SH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

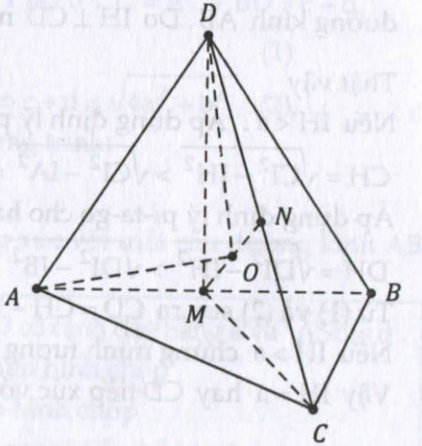
nên $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{GH^2 + \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2 + \frac{8}{3}a^2}{4}} = a.$

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD đó là $R = IA$, nên thể tích khối cầu $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}a^3$.

Ví dụ 2.7.5. Cho tứ diện ABCD có $AB = 6$, $CD = 8$, các cạnh còn lại bằng $\sqrt{74}$. Hãy tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Lời giải.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Do O cách đều AB nên O thuộc mặt phẳng trung trực cạnh AB. Đó chính là mp(MCD). Với M là trung điểm AB. Tương tự O cách đều CD nên O thuộc mp trung trực cạnh CD là mp (NAB), với N là trung điểm CD. Vậy O nằm trên giao tuyến MN của mp(MCD) và MP (NAB).



Do $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Ta có $OA = OD = R$;

$OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 9}$, $ON = \sqrt{R^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - 16}$.

Ta có $DM^2 = AD^2 - AM^2 = 65 \Rightarrow MN^2 = DM^2 - DN^2 = 49 \Rightarrow MN = 7$

- Nếu O nằm trong hình chóp thì $MN = OM + ON$

  $\Leftrightarrow 7 = \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

- Nếu O nằm ngoài hình chóp thì $MN = OM - ON$

  $\Leftrightarrow 7 = \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}$ vô nghiệm.

Vậy bán kính $R = 5$.

Ví dụ 2.7.6. Cho hai tia Ax, By chéo nhau và vuông góc, nhận AB là đoạn vuông góc chung, $AB = 2a$. Trên Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D.

1) Chứng minh CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB $\Leftrightarrow CD = AC + BD$.

2) Với điều kiện ở câu 1, chứng tỏ rằng điểm tiếp xúc của CD với mặt cầu đường kính AB thuộc một đường tròn cố định và góc tạo bởi CD với mặt phẳng chứa đường tròn đó không đổi.

3) Nếu CD thỏa mãn điều kiện $AC^2 + BD^2 = b^2$ (b là số cho trước). Hãy tìm liên hệ giữa a và b để CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Lời giải.

1) Đặt $AC = c$, $BD = d$.

Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của I lên CD.

Ta có $IA = IB = a$.

Cách 1

- Nếu CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB thì ta có H là tiếp điểm. Ta có $CH = CA$, $DH = DB$ nên $CD = CH + DH = AC + BD$.
- Ngược lại nếu $CD = AC + BD$ thì ta chứng minh CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB. Do $IH \perp CD$ nên ta cần chứng minh $IH = \dfrac{AB}{2} = a$.

Thật vậy

* Nếu $IH < a$. Áp dụng định lý pitago cho hai Δ vuông IAC và IHC

$CH = \sqrt{CI^2 - IH^2} > \sqrt{CI^2 - IA^2} = AC$ (1).

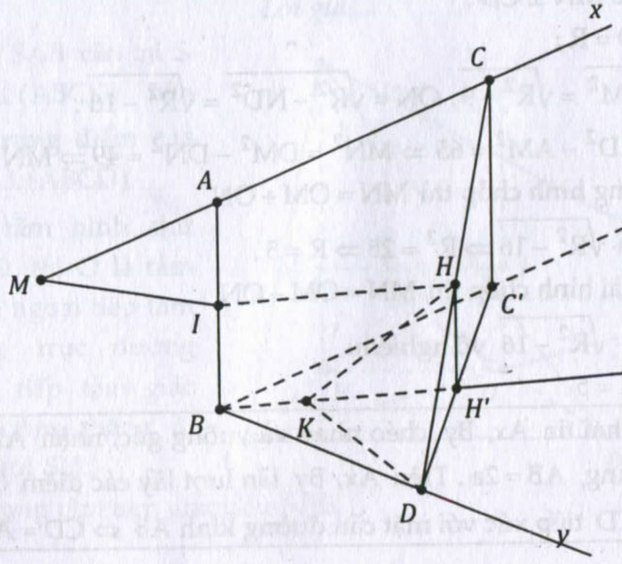
Áp dụng định lý pi-ta-go cho hai Δ vuông IBD và IHD

$DH = \sqrt{DI^2 - IH^2} > \sqrt{DI^2 - IB^2} = BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD = CH + DH > AC + BD$ trái với giả thiết.

* Nếu $IH > a$ chứng minh tương tự ta có $CD < AC + BD$ trái với giả thiết.

Vậy $IH = a$ hay CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.



Cách 2. Lấy điểm M là điểm trên tia đối của tia Ax sao cho $AM = BD$.

Ta dễ chứng minh được $OM = OD$ và $CM = CD \Rightarrow \Delta COM = \Delta COD$. Suy ra $IA = OH = a$ (Hai đường cao tương ứng).

2) • Chứng minh H thuộc đường tròn cố định. Kẻ tia Bx′ song song và cùng chiều với Ax. Gọi C′ và H′ lần lượt là hình chiếu của C, H lên mp(Bx′y). Ta có BH′ là phân giác của góc x′By. Nên H′ cố định thuộc tia phân giác Bz của góc x′By. Vậy H thuộc mp(ABz) cố định. Mặt khác H lại thuộc mặt cầu cố định. Nên H thuộc đường tròn cố định là giao của mp (ABz) với mặt cầu đường kính AB.

- Chứng minh góc giữa CD và mp (ABz) không đổi.

Gọi K là hình chiếu của D lên Bz ta có góc $\widehat{DHK}$ là góc giữa CD và mp (ABz).

Ta có: $\Delta BDK = \Delta HDK \Rightarrow \widehat{DHK} = 45^0$ (không đổi)

3) Hệ thức liên hệ giữa a và b.

Do CD tiếp xúc với mặt cầu nên theo câu 1 ta có $CD = AC + BD = c + d$ suy ra $cd = 2a^2$ (1)

Ta có $AC^2 + BD^2 = b^2 \Rightarrow CD = \sqrt{4a^2 + b^2} \Rightarrow c + d = \sqrt{4a^2 + b^2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có c, d là nghiệm của phương trình:

$x^2 - \sqrt{4a^2 + b^2}.x + 2a^2 = 0$.

Vậy hệ thức liên hệ giữa a và b để CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB là $b \geq 2a$.

Ví dụ 2.7.7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

1) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp

3) Tìm giá trị của α để tâm mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau.

Lời giải.

1) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SHA) kẻ đường trung trực cạnh SA cắt SH tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, bán kính $R = SO$.

Gọi N là trung điểm SA, ta có:

$$\Delta SNO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SN}{SO} = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SN.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}.$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác cân SAB ta có :

$$\frac{SA}{\sin\left(\frac{180^0 - \alpha}{2}\right)} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow SA = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; \; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy $R = SO = \frac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2) Tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của AB, ta có $AB \perp (SHM)$ tại M. Gọi I là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{SMH}$ $(I \in SH)$. Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp. Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS+MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS+MH};\ SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2},\ \ MH = \frac{a}{2}.$$

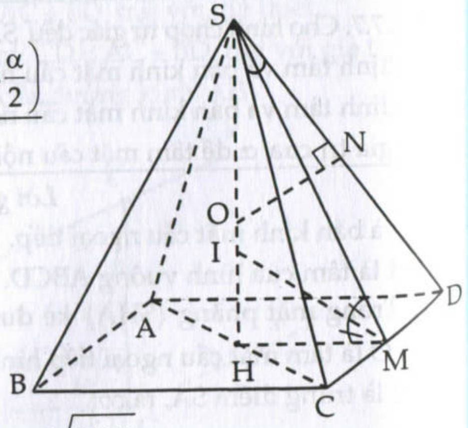
Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $r = IH = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \frac{3V}{\sum S}$.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{3.2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$\sum S = 4S_{\Delta SAB} + S_{ABCD}$$

$$= 4.\frac{1}{2}SM.AB + a^2 = \frac{a^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$



Bán kính $r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3) Tâm của hai hình cầu trùng nhau

$\Leftrightarrow R + r = SH$.

Hay: $$\frac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

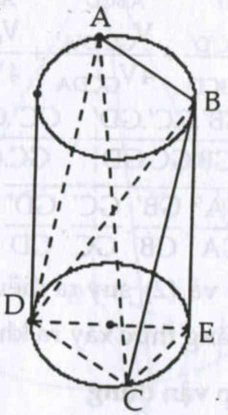
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Vậy khi $\alpha = 45^0$ thì tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

Ví dụ 2.7.9. Bên trong hình trụ có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.



Ta có $DC \perp BC$, CE là hình chiếu của đường xiên

$\Rightarrow DC \perp CE$ (định lí ba đường vuông góc)

do đó $\widehat{BCE} = 45^0$ là góc giữa hình vuông ABCD và đáy hình trụ.

Trong tam giác BEC ta có

$BE = BC.\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}a}{2};\ BD = \sqrt{2}a$.

Trong tam giác vuông BED ta có:

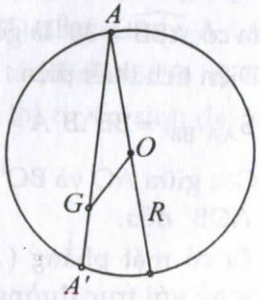
$DE^2 = DB^2 - BE^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Ví dụ 2.7.10. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, nội tiếp trong một mặt cầu (O;R). Các đường thẳng GA, GB, GB, GC lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A′, B′, C′, D′. Chứng minh rằng $V_{ABCD} \le V_{A'B'C'D'}$.

Lời giải.



Theo tính chất phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta có

$GA.GA' = GB.GB' = GC.GC' = GD.GD' = R^2 - OG^2$.

Với mọi điểm M ta có

$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$ nên suy ra

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

Cho $M \equiv O$ thì $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2)$.

Vì thế $4 = \dfrac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2}$

$$= \frac{GA^2}{GA.GA'} + \frac{GB^2}{GB.GB'} + \frac{GC^2}{GC.GC'} + \frac{GD^2}{GD.GD'} \geq 4\sqrt[4]{\frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{GC}{GC'}.\frac{GD}{GD'}}$$

Hay $\dfrac{GA'}{GA}.\dfrac{GB'}{GB}.\dfrac{GC'}{GC}.\dfrac{GD'}{GD} \geq 1$ (1).

Mặt khác, do G là trọng tâm của tứ diện nên

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{GB'C'D'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{V_{ABCD}}$$

$$= \frac{V_{GB'C'D'}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{4V_{GCDA}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{4V_{GABC}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{GB'.GC'.GD'}{GB.GC.GD} + \frac{GC'.GD'.GA'}{GC.GD.GA} + \frac{GD'.GA'.GB'}{GD.GA.GB} + \frac{GA'.GB'.GC'}{GA.GB.GC}\right)$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{GA'}{GA}.\frac{GB'}{GB}.\frac{GC'}{GC}.\frac{GD'}{GD}} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

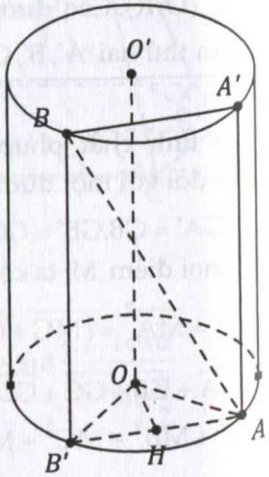
Dấu đẳng thức xảy ra khi $G \equiv O$, hay $ABCD$ là tứ diện gần đều.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 2.7.1. Một khối trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$.

1) Tính diện tích của thiết đi qua *AB* và song song với trục của khối trụ.
2) Tính góc giữa hai bán kính đáy đi qua *A, B*.
3) Cho hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đáy tròn sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ

Hướng dẫn giải



1) Từ A, B ta kẻ AA', BB' song song với trục hình trụ. Khi đó thiết diện là hình chữ nhật $AA'BB'$, ta có $\widehat{ABB'} = 30^0$ là góc giữa AB và trục hình trụ.

Diện tích thiết diện

$S_{AA'BB'} = BB'.B'A = \sqrt{3}R.\sqrt{3}R\tan 30^0 = \sqrt{3}R^2$

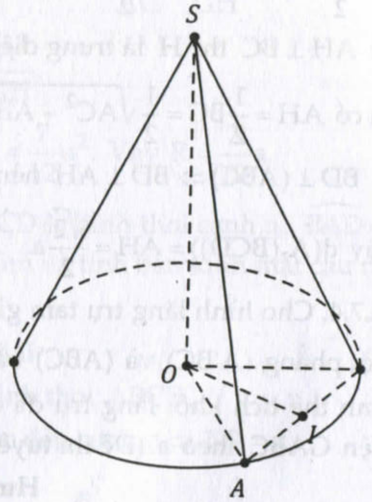
2) Góc giữa AO và BO′ là $\widehat{AOB'} = 60^0$, do tam giác AOB' đều.

3) Ta có mặt phẳng $(AA'BB')$ chứa AB và song song với trục đường tròn. Do đó khoảng cách giữa trục đường tròn OO′ với AB là khoảng cách giữa OO′ và mặt phẳng $(AA'BB')$.

Gọi H là trung điểm của AB, thì OH là khoảng cách giữa OO′ và mặt phẳng $(AA'BB')$. Ta có $OH = \dfrac{\sqrt{3}R}{2}$.

Bài 2.7.2. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0, \widehat{SAB} = 60^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$OI \perp AB, SI \perp AB, OI = a$.

Ta có $AO = SA.\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.SA$;

$AI = SA\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}SA$.

Từ đó suy ra $\dfrac{AI}{AO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta lại có $\dfrac{AI}{AO} = \cos\widehat{IAO}$

$\Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a}{OA} \Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$.

Xét tam giác SAO, ta có $SA = \dfrac{AO}{\cos 30^0} = \sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{3}\pi a^2$.

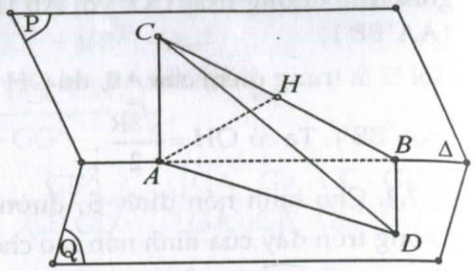
Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$.

Bài 2.7.3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a. (Đề thi tuyển sinh đại học khối D năm 2003)

Hướng dẫn giải

Vì $(P) \perp (Q)$ và $CA \perp \Delta$ nên $CA \perp (Q) \Rightarrow CA \perp AD$.

Tương tự $BD \perp BC$, nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là trung điểm CD và có bán kính $R = \frac{CD}{2}$. Áp dụng định lí Pitago cho các tam giác ABD, ACD ta có



$$R = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Kẻ $AH \perp BC$ thì H là trung điểm của BC (do tam giác ABC vuông cân A).

Ta có $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Vì $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH$ nên $AH \perp (CBD)$.

Vậy $d(A,(BCD)) = AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Bài 2.7.4. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C′ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (A′BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A′BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a. (Đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2010).

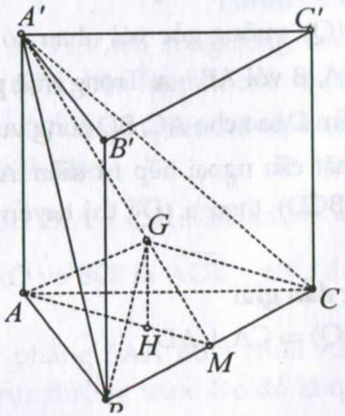
Hướng dẫn giải

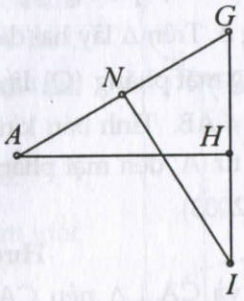
Gọi M là trung điểm của BC.

Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$

$\Rightarrow A'M \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{A'MA} = 60^0$. Ta có $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ nên $A'A = AM.\tan\widehat{A'MA} = \frac{3}{2}a.$





Thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ là $V = AA'.S_{ABC} = \frac{3}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\frac{MG}{MA'} = \frac{1}{3} = \frac{MH}{MA}$ nên $GH // AA'$ $\Rightarrow GH \perp (ABC)$. Do H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên GH là trục đường tròn ngooại tiếp tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của GH với trung trực của GA (qua trung điểm N của GA) thì đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

Ta có hai tam giác IGN và AGH đồng dạng, nên $\frac{IG}{AG} = \frac{GN}{GH}$,

Suy ra bán kính mặt cầu $R = \frac{GA.GN}{GH} = \frac{GA^2}{2GH}$.

Vì $GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2}$ nên $GA^2 = GH^2 + HA^2 = \frac{7}{12}a^2$. Vậy $R = \frac{7}{12}a$.

Bài 2.7.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ và các cạnh bên $SA = SB = SD$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD biết $\widehat{BSD} = 90^0$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi ABCD.

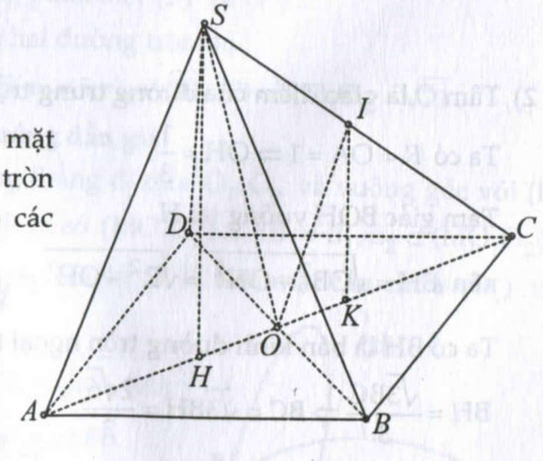
Theo bài ra ta có tam giác ABD là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$.

Mà tam giác SBD vuông tại S nên $SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \frac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên $SA = SB = SC$).

Ta có $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$



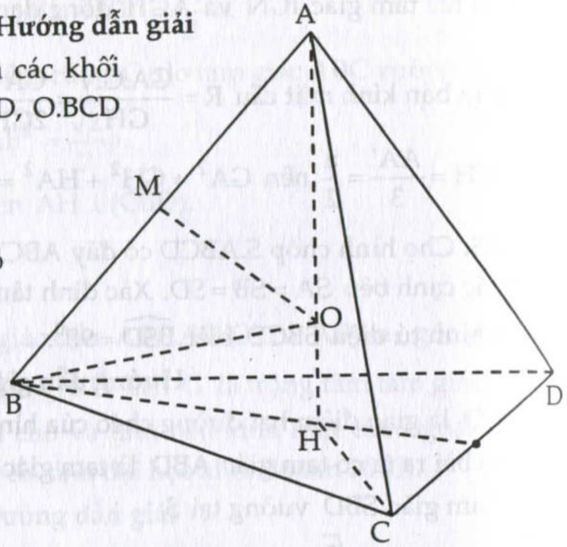
Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I. Ta có I là trung điểm của SC nên IS = IC, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD. Bán kính của mặt cầu là $R=\frac{1}{2}SC=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Bài 2.7.6. Cho tứ diện đều ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là O và H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).

1) Tính tỷ lệ $k=\frac{OA}{OH}$.

2) Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1. Tính độ dài các cạnh của tứ diện.

Hướng dẫn giải



1) Do tứ diện ABCD đều nên các khối chóp O.ABC, O.ACD, O.ABD, O.BCD có thể tích bằng nhau.

$V_{A.BCD}=4V_{O.BCD}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}AH.S_{BCD}=4.\frac{1}{3}OH.S_{BCD}$

$\Leftrightarrow AH=4OH$

$\Rightarrow k=\frac{OA}{OH}=\frac{AH-OH}{OH}$

$=\frac{3OH}{OH}=3$

2) Tâm O là giao điểm của đường trung trực cạnh AB của tam giác ABH.

Ta có $R=OA=1\Rightarrow OH=\frac{1}{3}$.

Tam giác BOH vuông tại H

nên $BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{R^2-OH^1}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

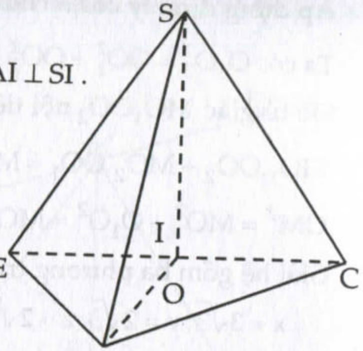
Ta có BH là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD nên

$BH=\frac{\sqrt{3}BC}{3}\Rightarrow BC=\sqrt{3}BH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy cạnh của tứ diện đều là $BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 2.7.7. Cho hình chóp S.ABC có $(SBC)\perp(ABC)$ và các cạnh $AB=AC=SA=SB=a$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp khi $SC=x$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI\perp BC$.

Mặt khác $(SBC)\perp(ABC)$ nên $AI\perp(SBC)\Rightarrow AI\perp SI$.

$\Rightarrow SI$ là đường cao của tam giác SBC.

Ta có $\Delta ABI=\Delta ASI\Rightarrow IS=IB=IC$

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC ta có $OS=OB=OC$ nên O thuộc thẳng d qua I vuông góc với (SBC).

Ta có $(SBC)\perp(ABC)$ $\Rightarrow d\subset(ABC)\Rightarrow O\in(ABC)\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Gọi K là giao của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có : $AB^2=AI.AK=AI.2R\Rightarrow R=\frac{AB^2}{2AI}$.

Ta có: $AI^2=AB^2-BI^2=a^2-\frac{BC^2}{4}=a^2-\frac{SB^2+SC^2}{4}=a^2-\frac{a^2+x^2}{4}=\frac{3a^2-x^2}{4}$

$\Rightarrow AI=\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}$ $(0<x<\sqrt{3}a)$. Vậy $R=\frac{a^2}{\sqrt{3a^2-x^2}}$.

Bài 2.7.8. Cho hai đường tròn (O_1,r_1) và (O_2,r_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

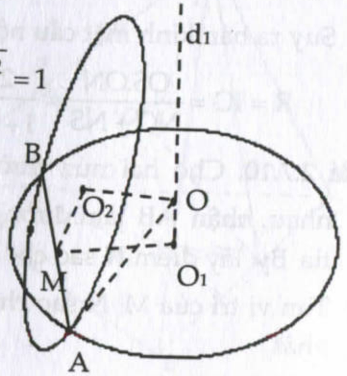
1) Chứng minh có mặt cầu đi qua hai đường tròn đó.

2) Tìm bán kính R của mặt cầu biết $r_1=5; r_2=\sqrt{10}; AB=6; O_1O_2=\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d_1,d_2 lần lượt là hai đường thẳng đi qua O_1,O_2 và vuông góc với (P) và (P′). Gọi M là trung điểm AB ta có $(MO_1O_2)\perp AB\Rightarrow d_1,d_2\subset(MO_1O_2)$.

Gọi O là giao điểm của d_1 và d_2. Ta có O là tâm mặt cầu chứa (O_1) và (O_2). Bán kính $R=OA$.



Ta có $MO_1=\sqrt{r_1^2-MA^2}=4; MO_2=\sqrt{r_2^2-MA^2}=1$

Ta có tứ giác MO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp.

$\cos M=\frac{MO_1^2+MO_2^2-O_1O_2^2}{2MO_1.MO_2}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{O_1MO_2}=120^0\Rightarrow\widehat{O_1OO_2}=60^0$

Đặt $x=OO_2$, $y=OO_1, z=OM$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔO_1OO_2

Ta có: $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1.OO_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 21$ (1).

Do tứ giác MO_1OO_2 nội tiếp nên

$$MO_1.OO_2 + MO_2.OO_1 = MO.O_1O_2 \Leftrightarrow 4x + y = \sqrt{21}.z \quad (2)$$

$$OM^2 = MO_1^2 + O_1O^2 = MO_2^2 + O_2O^2 \Leftrightarrow z^2 = 16 + y^2 = 1 + x^2 \quad (3)$$

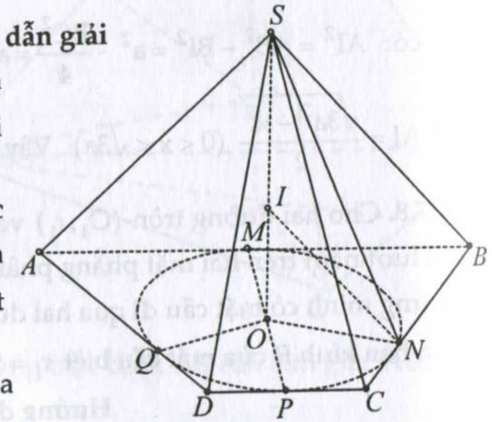
Giải hệ gồm ba phương trình (1),(2) và (3) ta tìm được:

$x = 3\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}; z = 2\sqrt{7}$.

$\Rightarrow OA^2 = AO_1^2 + O_1O^2 = 37 \Rightarrow R = OA = \sqrt{37}$

Bài 2.7.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân và AB//CD. Đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang có bán kính r. Biết $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 2r$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải



Gọi M,N,P,Q là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp hình thang với các cạnh của hình thang.

Do $SO \perp (ABCD)$ nên các tam giác SOM,SON,SOP.SOQ bằng nhau và mọi điểm trên SO cách đều các mặt bên của hình chóp.

Tâm mặt cầu nội tiếp là giao của phân giác trong góc $\widehat{SNO}$ với SO.

Ta có $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = r\sqrt{5}$.

Theo tính chất phân giác: $\dfrac{IO}{IS} = \dfrac{NO}{NS}$

Suy ra bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp là

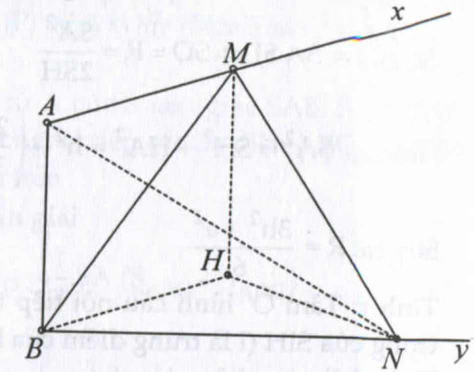
$$R = IO = \frac{OS.ON}{NO + NS} = \frac{2r}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r.$$

Bài 2.7.10. Cho hai nửa đường thẳng Ax,By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia By lấy điểm N sao cho AM + BN = MN.

1) Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABMN là lớn nhất.

2) Chứng minh rằng khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



1) Gọi V là thể tích tứ diện ABMN.

Ta tính được $V = \dfrac{AB^3}{12}$ là giá trị không đổi, mà $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$ nên r lớn nhất khi S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $AB = 2a, AM = x, BN = y$.

Từ $AM + BN = MN$ suy ra $xy = 2a^2$.

Diện tích toàn phần của tứ diện là $S_{tp} = a(x+y) + \dfrac{1}{2}\left(y\sqrt{x^2 + 4a^2} + x\sqrt{y^2 + 4a^2}\right)$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của S_{tp} đạt được khi $x = y = a\sqrt{2}$, hay $AM = BN = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AB$.

2) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2}$ nên

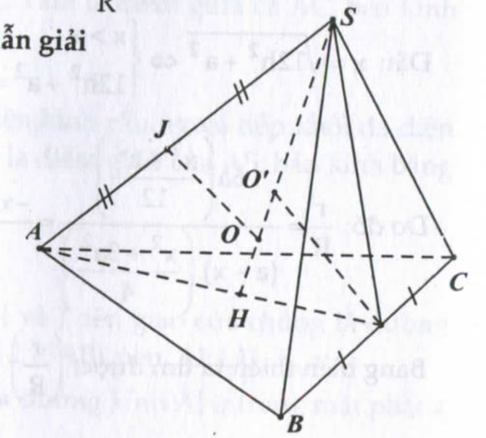
$R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2} \geq \sqrt{2xy + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a$.

$\min R = 2\sqrt{2}a$ khi $x = y = a\sqrt{2}$, hay đạt được tương ứng với bán kính mặt cầu nội tiếp đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2.7.11. Cho SABC là 1 hình chóp tam giác đều với cạnh đáy AB = a, đường cao SH = h.

1. Tính theo a và h các bán kính r, R của hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình chóp.
2. Giả sử *a* cố định và h thay đổi. xác định h để $\dfrac{r}{R}$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Tính R:

Tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC nằm trên SH (trục của đường trong ngoại tiếp tâm giác ABC) và trên đường trung trực của SA vẽ mp(SAH).

Tứ giác AHOJ nội tiếp (J là trung điểm của SA),

Do đó:

$$\frac{r}{R}=\frac{6ah^2}{\left(a+\sqrt{12h^2+a^2}\right).\left(3h^2+a^2\right)} \Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$SO.SH = SA.SJ \Rightarrow SO=R=\frac{SA^2}{2SH}$$

Nhưng: $SA^2=SH^2+HA^2=h^2+\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=h^2+\frac{a^2}{3}=\frac{3h^2+a^2}{3}$

Suy ra: $R=\frac{3h^2+a^2}{6}$

Tính r: Tâm O′ hình cầu nội tiếp tứ diện nằm trên SH và trên phân giác trong của SIH (I là trung điểm của BC), góc phẳng của nhị diện cạnh BC.

Tính chất của phân giác cho:

$$\frac{O'H}{O'S}=\frac{HI}{SI}\Rightarrow r.SI=HI.(h-r)\Rightarrow r=\frac{h.HI}{SI+HI}$$

Ta có: $\begin{cases} HI=\frac{a\sqrt{3}}{6} \\ SI^2=h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=r^2+\frac{a^2}{12} \end{cases} \Rightarrow SI=\frac{\sqrt{12h^2+a^2}}{2\sqrt{3}}$

Cho nên r được tính bởi: $r=\frac{h.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{12h^2+a^2}}{2\sqrt{3}}}=\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$

2. Định h để r/R lớn nhất

Ta có: $\frac{r}{R}=\frac{6ah^2}{(a+\sqrt{12h^2+a^2}).(3h^2+a^2)}$

Đặt: $x=\sqrt{12h^2+a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>a \\ 12h^2+a^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>a \\ h^2=\frac{x^2-a^2}{12} \end{cases}$

Do đó: $\frac{r}{R}=\frac{6a\left(\frac{x^2-a^2}{12}\right)}{(a+x).\left(\frac{x^2+3a^2}{4}\right)}=\frac{-x^2+2ax+3a^2}{(a+3a)^2}$

Bảng biến thiên ta tìm được: $\left(\frac{r}{R}\right)_{max}=\frac{1}{3}$ nếu và chỉ nếu $x=3a \Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 2.7.12. Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC vuông tại B, có cạnh AB, $\widehat{ABC}=a$ và ΔADC vuông tại D có AD = b (B và D không cùng phía đối với AB). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A ta lấy điểm S sao cho SA = x.

1. Tính thể tích hình chóp SABCD
2. AI, AJ, AH là 3 đường cao xuất phát từ A của 3 tam giác SAB, SAC, SAD. Hãy tìm tâm và bán kính của hình cầu ngoại tiếp các đa diện ABCIJ, ASIJH. Từ đó xác định giao của 2 hình cầu nói trên

Hướng dẫn giải

1. Tính V_{SABCD}: $V_{SABCD}=V_{SABC}+V_{SACD}=\frac{1}{3}.SA.(S_{ABC}+S_{ADC})$

Ta có: $AB=a\Rightarrow BC=a.tg\alpha$

Do đó: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.a^2.\tan\alpha$

$$\begin{cases} AD=b \\ AC=\frac{a}{\cos\alpha} \end{cases}\Rightarrow CD^2=\frac{a^2}{\cos^2\alpha}-b^2\Rightarrow CD=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}-b^2}$$

Do đó : $S_{ACD}=\frac{1}{2}.b.\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}-b^2}$

Tóm lại: $V_{SABCD}=\frac{1}{3}.a.\left(\frac{1}{2}a^2.tg\alpha+\frac{1}{2}.b.\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}-b^2}\right)=\frac{1}{6}\left(a^2.tg\alpha+b.\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}-b^2}\right)$

2. Tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp các đa diện ABCIJ và ASIJH

Ta có $\begin{cases} AI\perp SB \\ AI\perp SC \end{cases}$ (do $BC\perp(ABC)$) nên : $AI\perp IC$

Như vậy : I, J và B cùng nhìn AC dưới góc vuông nên hình cầu ngoại tiếp đa diện ABCIJ là hình cầu đường kính AC. Tâm là điểm giữa cả AC, bán kính bằng: $\frac{AC}{2}=\frac{a}{2\cos\alpha}$

I, J, H cùng nhìn AS dưới góc vuông nên hình cầu ngoại tiếp khối đa diện ASIJH là hình cầu đường kính AS. Tâm là điểm giữa của AS, bán kính bằng $\frac{AS}{2}=\frac{a}{2}$

Tìm giao của 2 hình cầu;

Hai hình cầu ấy có chung 3 điểm là A, I và J nên giao của chúng là đường tròn qua 3 điểm ấy. Nhưng ta đã biết $AI\perp(SAB)$ nên $AI\perp IJ$.

Vậy giao của 2 hình cầu ấy là đường tròn đường kính AJ ở trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

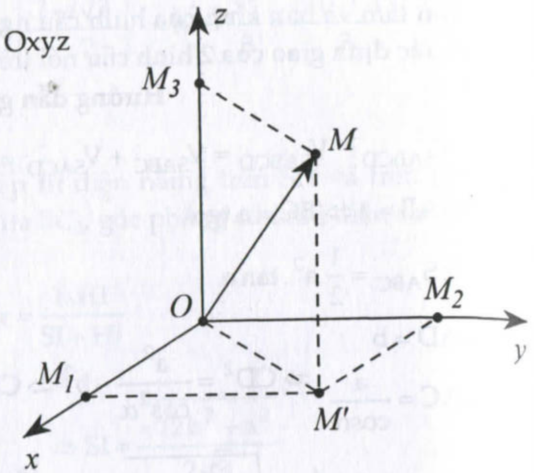
CHƯƠNG 3.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Tọa độ trong không gian

1. Hệ trục tọa độ trong không gian Oxyz



- Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.
- Điểm O gọi là gốc của hệ tọa độ, trục Ox là trục hoành, Oy là trục tung và Oz là trục cao.
- Véctơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

  Ta có:

  $$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

- Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì $M(x;y;z)$. Ngược lại, điểm $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.
- Với véctơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ Oxyz luôn tồn tại duy nhất bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Tọa độ $\vec{u}$ là $(x;y;z)$.

2. Tọa độ véc tơ – Tọa độ điểm

Cho $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$ và số thực k. Khi đó

* $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$.

* $k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$.

* $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$

Chú ý: Nếu $x_2 = 0\ (y_2 = 0, z_2 = 0)$ thì $x_1 = 0\ (y_1 = 0, z_1 = 0)$

* $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

* $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

* $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Cho $A = (x_A;y_A;z_A)$, $B = (x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, $D(x_D;y_D;z_D)$.

Khi đó:

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

* Trung điểm I của đoạn AB: $I = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

* Trọng tâm G của ΔABC: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

* Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

3. Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

b) Các tính chất:

* $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$

* $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{a}$ và $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{b}$

* $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

c) Các ứng dụng của tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Thể tích:

* Hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

* Tứ diện: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:

* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$

* A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0$.

3. Phương trình mặt cầu.

Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1).$$

Phương trình (1) có thể được biểu diễn cách khác như sau

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)

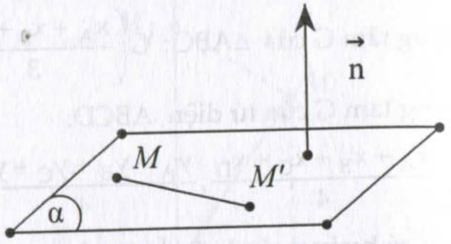
Với $d=a^2+b^2+c^2-R^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2-d>0 \\ R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d} \end{cases}$.

II. Phương trình mặt phẳng

1. Véc tơ pháp tuyến:

Định nghĩa: Cho mặt phẳng (α).

Véc tơ $\vec{n}\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến (VTPT) của mp(α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α), kí hiệu $\overrightarrow{n_\alpha}$ là VTPT của (α).



Chú ý:

- * Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là VTPT của (α). Vậy mp(α) có vô số VTPT.
- * Nếu hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ (không cùng phương) có giá song song (hoặc nằm trên) (α) thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một VTPT của mp (α).
- * Nếu ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng thì véc tơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ là một VTPT của $mp(ABC)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

- * Cho mp(α) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$, có $\vec{n}=(A;B;C)$ là một VTPT.

  Khi đó phương trình tổng quát của (α) có dạng:

  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
- * Nếu $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ thì $\vec{n}=(A;B;C)$ là một VTPT của (α).
- * Nếu $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$; $abc\neq 0$ thì phương trình của (ABC) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và được gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α).

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

Cho hai $mp(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

- (P) cắt (Q) $\Leftrightarrow A:B:C\neq A':B':C'$.
- $(P)//(Q)\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ đến $mp(P): Ax+By+Cz+D=0$ là:

$$d(M,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

III. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ. Véc tơ $\vec{u}\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ. Ta kí hiệu $\overrightarrow{u_\Delta}$ là VTCP của Δ.

Chú ý 1.3.3:

- * Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k.\vec{u}$ $(k\neq 0)$ cũng là VTCP của Δ
- * Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP
- * Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=\overrightarrow{u_\Delta}$ là một VTCP của Δ (Trong đó $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q)).

b) Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$.

Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ (1)

(1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ, t gọi là tham số.

Chú ý. Cho đường thẳng Δ có phương trình (1)

- * $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của Δ
- * $M\in\Delta\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

2. Phương trình chính tắc:

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ với $abc\neq 0$.

Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ (2)

(2) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$ và $d':\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d'}}=(a';b';c')$.

* Nếu $[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}]\overrightarrow{MM'}=0\Rightarrow$ d và d' đồng phẳng. Khi đó xảy ra ba trường hợp

i) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{u'}]\neq\vec{0}$ và tọa độ gia điểm là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\\ \frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}\end{cases}.$$

ii) $d//d'\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]\neq\vec{0}\end{cases}$

iii) $d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]=\vec{0}\end{cases}$

* Nếu $[\vec{u},\vec{u'}]\overrightarrow{MM'}\neq 0\Rightarrow$ d và d' chéo nhau .

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho $mp(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

- Δ cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{n}$ và $\vec{u}$ không cùng phương $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$. Khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0 & (a)\\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} & (b)\end{cases}$

Từ (b) $\Rightarrow x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct$ thế vào (a) $\Rightarrow t\Rightarrow$ giao điểm

* $\Delta//(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ M_0\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$

* $\Delta\subset(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ M_0\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$

* $\Delta\perp(\alpha)\Leftrightarrow\vec{n}$ và $\vec{u}$ cùng phương $\Leftrightarrow\vec{n}=k.\vec{u}$.

5. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0, có VTCP $\vec{u}$ và điểm $M\notin\Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

C1: Sử dụng công thức: $d(M,\Delta)=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$.

C2: Lập phương trình $mp(P)$ đi qua M vuông góc với Δ. Tìm giao điểm H của (P) với Δ. Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

b) Khoảng cách giữ hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có VTCP $\vec{u}$ và Δ' đi qua M_0' có VTCP $\vec{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

C1: Sử dụng công thức: $d(\Delta,\Delta')=\frac{\left|[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{u'}]\right|}$.

C2: Tìm đoạn vuông góc chung MN. Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

C3: Lập phương trình $mp(P)$ đi qua Δ và song song với Δ'. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P).

IV. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và đường thẳng $\Delta':\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$ có VTCP $\vec{u'}=(a';b';c')$. Đặt $\alpha=(\Delta,\Delta')$, khi đó: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{u'}\right)\right|=\frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho mp $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP. Gọi φ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đường thẳng Δ, khi đó ta có:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right|=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(A;B;C)$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(A';B';C')$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng ($0^0 \le \varphi \le 90^0$). Khi đó:

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

§ 1. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ VÀ ỨNG DỤNG.

1. Các ứng dụng của tích có hướng của hai véc tơ

- **Diện tích tam giác:** Diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

- **Thể tích:**

+) Hình hộp: Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' được tính bởi công thức

$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|.$$

+) Tứ diện: Thể tích tứ diện ABCD được tính bởi công thức

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|.$$

- **Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:**

+) Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.

+) Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

Ví dụ 3.1.1. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$A(4;2;1)$, $B(-1;0;3)$, $C(2;-2;0)$, $D(-3;2;1)$.

1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng;
2) Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD;
3) Tính thể tích tứ diện ABCD và đường cao của tứ diện hạ từ A;
4) Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{BA}=(-5;-2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;-2;-3)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;2;-2)$, $\overrightarrow{CD}=(-5;4;1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&-3\\2&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&3\\-2&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-2\\-2&2\end{vmatrix}\right)=(10;12;2)$

Nên $\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=-70\neq 0$. Do đó, ta có A,B,C,D không đồng phẳng.

2) Ta có: $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+12^2+2^2}=2\sqrt{62}$

Vì $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BH.CD$ nên suy ra $BH=\frac{2S_{\Delta BCD}}{CD}=\frac{2\sqrt{62}}{\sqrt{42}}=\frac{2\sqrt{651}}{21}$.

3) Ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{35}{3}$.

Gọi $h=d(A,(BCD))$, thế thì $h=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{35}{2\sqrt{62}}$.

4) Ta có phương trình $AB:\begin{cases}x=4+5t\\y=2+2t\\z=1-2t\end{cases}$, suy ra $M(4+5t;2+2t;1-2t)$.

Do đó: $\overrightarrow{CM}=(2+5t;4+2t;1-2t)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}\right]=(10t;5t-7;30t+28)$

Suy ra $S_{\Delta MCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1025t^2+1610t+833}$

Do $1025t^2+1610t+833=1025\left(t+\frac{161}{205}\right)^2+\frac{8232}{41}\geq\frac{8232}{41}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t=-\frac{161}{205}$.

Vậy $S_{\Delta MCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=-\frac{161}{205}$ hay $M\left(\frac{3}{41};\frac{88}{205};\frac{527}{205}\right)$.

Ví dụ 3.1.2. Trong không gian Oxyz cho A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1) và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

1. Tìm điểm M thuộc (Δ) để thể tích tứ diện MABC bằng 3.
2. Tìm điểm N thuộc (Δ) để thể tích tam giác ABN nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình tham số của (D): $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+2t\end{cases}$

Vì $M\in(\Delta)\Rightarrow M(1+2t;\,-2-t;\,3+2t)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2;\,1;\,2),\ \overrightarrow{AC}=(-2;\,2;1)$;

$[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]=(-3;\,-6;\,6)=-3(1;\,2;\,-2)=-3.\vec{n}$, với $\vec{n}=(1;\,2;\,-2)$.

Phương trình mp (ABC) qua A với pháp vectơ $\vec{n}$: (ABC): $x+2y-2z-2=0$.

Mà $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=\frac{9}{2}$.

Nên đường cao MH của tứ diện MABC là khoảng từ M đến (ABC):

$$MH=d(M(ABC))=\frac{|1+2t+2(-2-t)-2(3+2t)-2|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|-4t-11|}{3}.$$

Thể tích tứ diện MABC bằng 3

$$\Leftrightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{9}{2}.\frac{|4t+11|}{3}=3\Leftrightarrow|4t+11|=6\Leftrightarrow\ t=-\frac{5}{4}\text{ hay }t=-\frac{17}{4}.$$

Vậy, có 2 điểm M cần tìm là: $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$ hay $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\ \frac{11}{2}\right)$

2. Ta có: $N\in(\Delta)\Rightarrow N(1+2t;\,-2-t;\,3+2t)$

Suy ra $S_{ABN}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{NA};\,\overrightarrow{NB}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{32t^2+128t+146}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(4t+8)^2+9}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\max S_{ABN}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4t+8=0\Leftrightarrow t=-2.$

Vậy, điểm N cần tìm là $N(-3;\,0;\,1)$.

Ví dụ 3.1.3. Trong không gian Oxyz cho $A(4;0;0)$, $B(x_0;y_0;0)$ với $x_0,y_0>0$ thỏa mãn $AB=2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB}=45^0$.

1) Tìm tọa độ điểm C nằm trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 8.

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox, điểm N thuộc Oz sao cho tam giác AMB cân tại M và tứ diện ABMN có thể tích bằng 20.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(x_0;y_0;0)$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=4x_0$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(x_0-4)^2+y_0^2=40\\ \dfrac{4x_0}{4.\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-8x_0=24\\ \sqrt{2}x_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0^2=x_0^2\\ x_0^2-4x_0-12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\ y_0=6\end{cases}\Rightarrow B(6;6;0).$$

1) Vì C nằm trên tia Oz nên $C(0;0;m)$ với $m>0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(6;6;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;24)$, $\overrightarrow{OC}=(0;0;m)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=24m$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}.24m=8\Leftrightarrow m=2$. Vậy $C(0;0;2)$.

2) Theo giả thiết ta có $M(x;0;0)$. Ta có tam giác AMB cân tại M nên ta có:

$MA^2=MB^2\Leftrightarrow(x-4)^2=(x-6)^2+6^2\Leftrightarrow x=14\Rightarrow M(14;0;0)$

Gọi $N(0;0;n)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(10;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(0;0;60)$

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AN}=60n\Rightarrow V_{ABMN}=10|n|$

Suy ra $V_{ABMN}=20\Leftrightarrow n=\pm2$.

Vậy $N(0;0;\pm2),M(14;0;0)$.

Ví dụ 3.1.4. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông với $A(1;0;1)$, $B(2;0;0)$, $C(0;1;0)$. Thể tích của khối lăng trụ bằng 3.

1) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của lăng trụ,

2) Xác định tọa độ điểm cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(1;0;-1),\overrightarrow{AC}(-1;1;-1),\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]=(1;2;1)$. Do đó $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là 3 nên $AA'=\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}}=\sqrt{6}$.

Từ $\overrightarrow{AA'}=t.\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]=(t;2t;t)$ suy ra $|t|=1$.

- Nếu $t=1$ thì $A'(2;2;2),B'(3;2;1),C'(1;3;1)$.
- Nếu $t=-1$ thì $A'(0;-2;0),B'(1;-2;-1),C'(-1;-1;-1)$.

2) Điểm I cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ là trung điểm của đường nối tâm hai đáy.

Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của $BC,B'C'$.

- Với $B'(3;2;1),C'(1;3;1)$ thì $M\left(1;\frac{1}{2};0\right),M'\left(2;\frac{5}{2};1\right)\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.
- Với $B'(1;-2;-1),C'(-1;-1;-1)$ thì $M'\left(0;-\frac{3}{2};-1\right)\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 3.1.5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;2;-1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. Lập phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt đường thẳng d tại điểm D sao cho bốn điểm A,B,C,D tạo thành một tứ diện có thể tích bằng $\dfrac{19}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;3;0), \overrightarrow{AC}=(-2;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;2;4)$

Do $\Delta\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;2;4)$

Vì $D\in d$ nên $D(1+2t;-1+t;2+3t)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(2t-1;t-2;3t+2)$

Suy ra $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}|20t+1|=\dfrac{19}{6}$

Suy ra $t=-1, t=\dfrac{9}{10}$.

- Với $t=-1$, ta có $D(-1;-2;-1)$ và phương trình $\Delta: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{4}$
- Với $t=\dfrac{9}{10}$, ta có $D\left(\dfrac{14}{5};-\dfrac{1}{10};-\dfrac{7}{10}\right)$ và phương trình Δ là:

$$\frac{x-\frac{14}{5}}{3}=\frac{y+\frac{1}{10}}{3}=\frac{z+\frac{7}{10}}{4}.$$

Ví dụ 3.1.6. Cho hình chóp S.ABCD với $A(4;-1;2), B(-1;0;-1), C(0;0;-2)$ và $D(10;-2;4)$. Gọi M là trung điểm CD. Biết SM vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích khối chóp S.ABCD bằng 66 (đvdt). Tìm tọa độ điểm S

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;1;-3), \overrightarrow{AC}=(-4;1;-4), \overrightarrow{AD}=(6;-1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1;-8;-1)$, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=0$. Do đó A,B,C,D đồng phẳng và $\vec{n}=(1;8;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABCD).

Vì M là trung điểm CD nên $M(5;-1;1)$, suy ra phương trình SM:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{1}$$

Do đó $S(5+t;-1+8t;1+t)$

Ta có: $\overrightarrow{DB}=(-11;2;-5), \overrightarrow{DC}=(-10;2;-6)\Rightarrow\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=(-2;-16;-2)$

Suy ra $S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|+\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DB}\right|=\dfrac{3}{2}\sqrt{66}$

Nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SM.S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}SM.\sqrt{66}=66\Rightarrow SM=2\sqrt{66}$

$\Leftrightarrow t^2+(8t)^2+t^2=4.66\Leftrightarrow t^2=4\Leftrightarrow t=\pm2$.

Từ đó ta tìm được hai điểm $S(7;15;3)$ và $S(3;-17;-2)$.

Ví dụ 3.1.7. Trong mặt phẳng Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1)$, $B(-3;-1;2)$.

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác ABM có diện tích bằng $3\sqrt{5}$
2. Tìm tọa độ điểm C thuộc Δ và điểm D thuộc trục Ox sao cho tứ diện ABCD có thể tích bằng 3 và AB vuông góc với CD.

Lời giải.

1. Ta có $M(-2+t;1+3t;-5-2t)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;-2;1), \overrightarrow{AM}=(t;3t;-2t-6)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=(t+12;-t-6;-t)$ nên $S_{\Delta AMB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3t^2+36t+180}$

Mà $S_{\Delta AMB}=3\sqrt{5}$ nên ta có: $t^2+12t+60=60\Leftrightarrow t=0, t=-12$

Từ đó ta tìm được hai điểm $M(-2;1;-5)$ và $M(-14;-35;19)$.

2. Gọi $C(-2+t;1+3t;-5-2t)$, $D(x;0;0)$

Mà $\overrightarrow{CD}=(x-t+2;-3t-1;2t+5)$ nên $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

$\Leftrightarrow-(x-t+2)+2(3t+1)+2t+5=0\Leftrightarrow x=9t+5$.

Mặt khác: $\overrightarrow{AC}=(t;3t;-2t-6)$, $\overrightarrow{AD}=(x+2;-1;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(t+12;-t-6;-t)$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}=(t+7)(x+2)+2t+6=9t^2+117t+90$

Do đó $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}\left|9t^2+117t+90\right|=3$

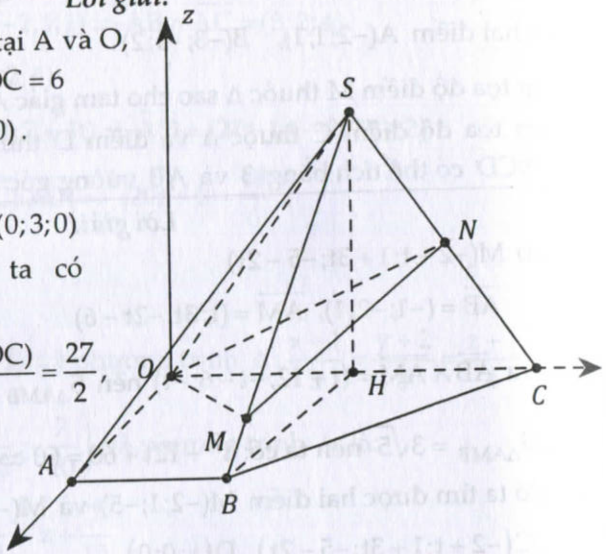
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9t^2+117t+72=0\\9t^2+117t+108=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-13\pm\sqrt{137}}{2}\\t=-1,t=-12\end{array}\right..$$

Vậy $C_1(-3;-2;-3)$, $D_1(-4;0;0)$; $C_2(-14;-35;19)$, $D_2(-103;0;0)$

Ví dụ 3.1.8. Trong không gian Oxyz cho hình chóp S.OABC có đáy OABC là hình thang vuông tại O và $A(3;0;0)$, $AB = OA = \frac{1}{2}OC$, $S(0;3;4)$ và $y_C > 0$.

1) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích của hình chóp S.OABC.
2) Một mặt phẳng (α) đi qua O và vuông góc với SA cắt SB, SC tại M và N. Tính thể tích khối chóp SOMN.

Lời giải.



1) Do ABCD là thang vuông tại A và O, đồng thời $A \in Ox, y_C > 0, OC = 6$

Nên ta suy ra được $C(0;6;0)$.

Tương tự ta có: $B(3;3;0)$.

Vì $S(0;3;4)$, nên ta gọi $H(0;3;0)$ là trung điểm OC thì ta có $SH \perp (OABC)$

Ta có: $S_{OABC} = \frac{OA(AB+OC)}{2} = \frac{27}{2}$

$SH = 4$ nên thể tích khối chóp S.OABC là:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{OABC} = \frac{1}{3}.4.\frac{27}{2} = 18 \text{ (đvtt)}.$$

2) Ta có: $\overrightarrow{SB} = (3;-3;-4)$, suy ra phương trình mặt phẳng (α)

$$3x - 3y - 4z = 0.$$

Vì $\overrightarrow{SB} = (3;0;-4)$, $\overrightarrow{SC} = (0;3;-4)$ nên ta có phương trình

$$SB: \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ và } SC: \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 + 3t' \\ z = -4t' \end{cases}.$$

Từ đó ta tìm được các giao điểm của (α) với SB, SC là:

$$M(3;3;0) \text{ và } N\left(0;\frac{96}{7};-\frac{72}{7}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{OS} = (0;3;4)$, $\overrightarrow{OM} = (3;3;0)$, $\overrightarrow{ON} = \left(0;\frac{96}{7};-\frac{72}{7}\right)$

$\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM} = (-12;12;-9)$, $(\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM})\overrightarrow{ON} = \frac{1800}{7}$.

Vậy $V_{SOMN} = \frac{300}{7}$ (đvtt).

Ví dụ 3.1.9. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm CC', biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục Oxyz sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Ox, A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy.

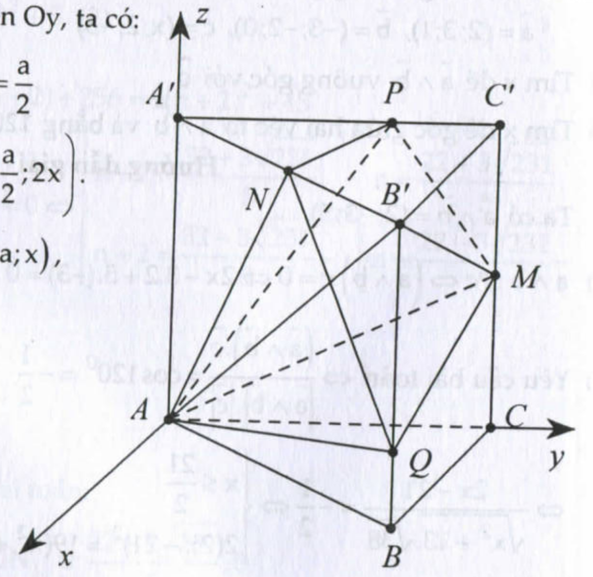
1) Xác định tọa độ các đỉnh của lăng trụ,
2) Trên các cạnh A'B', A'C', BB' lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$, $A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện AMPNQ.

Lời giải.

Đặt $AA' = 2x$, $x > 0$

1) Ta có $A(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;2x)$, $C'(0;a;2x)$

Gọi K là hình chiếu của B lên Oy, ta có:



$BK = AB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK = \frac{a}{2}$

Nên $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2x\right)$.

Suy ra $M(0;a;x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;a;x)$,

$\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = \frac{a^2}{2} - x^2$.

Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = 0$

nên suy ra $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $A'\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$ và $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

2) Ta có $\overrightarrow{A'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{A'P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow P\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{B'Q} = \frac{3}{4}\overrightarrow{B'B} \Rightarrow Q\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$ và $M\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AP}=\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$,

$$\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{6}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}=-\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;\ \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Do đó $V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{AMPNQ}=V_{A.MPQ}+V_{A.MPQ}=\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

*** Bài tập vận dụng**

Bài 3.1.1. Trong không gian Oxyz cho các véc tơ:

$\vec{a}=(2;3;1),\ \vec{b}=(-3;-2;0),\ \vec{c}=(x;2;-3)$

1) Tìm x để $\vec{a}\wedge\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$

2) Tìm x để góc giữa hai véc tơ $\vec{a}\wedge\vec{b}$ và bằng 120^0.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{a}\wedge\vec{b}=(2;-3;5)$

1) $\vec{a}\wedge\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c}=0\Leftrightarrow 2x-3.2+5.(-3)=0\Leftrightarrow x=\frac{21}{2}$

2) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\frac{\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c}}{\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|.\left|\vec{c}\right|}=\cos120^0=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-21}{\sqrt{x^2+13}.\sqrt{38}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{21}{2}\\2(2x-21)^2=19(x^2+13)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{21}{2}\\11x^2+168x-635=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-84\pm\sqrt{14041}}{11}.$$

Bài 3.1.2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(3;-2;4)$

1) Tìm tọa độ các hình chiếu của A lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm $M\in Ox, N\in Oy$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A

3) Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1;4;-4)$.

Hướng dẫn giải

1) Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox,Oy,Oz. B_1,B_2,B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy),(Oyz),(Ozx).

Ta có: $A_1(3;0;0),A_2(0;-2;0),A_3(0;0;4)$ và $B_1(3;-2;0),B_2(3;0;4),B_3(0;-2;4)$

2) Do $M\in Ox\Rightarrow M(m;0;0)$, $N\in Oy\Rightarrow N(0;n;0)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(m-3;2;-4)$, $\overrightarrow{AN}=(-3;n+2;-4)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0\\AM^2=AN^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3(m-3)+2(n+2)+16=0\\(m-3)^2+2^2+(-4)^2=(-3)^2+(n+2)^2+(-4)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3=\frac{2(n+2)+16}{3}\quad(1)\\\left[\frac{2(n+2)+16}{3}\right]^2=(n+2)^2+5\quad(2)\end{cases}$$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow 4(n+2)^2+64(n+2)+256=9(n+2)^2+45$

$$\Leftrightarrow 5(n+2)^2-64(n+2)-211=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n+2=\frac{32+3\sqrt{231}}{5}\\n+2=\frac{32-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=\frac{22+3\sqrt{231}}{5}\\n=\frac{22-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{189+6\sqrt{231}}{5}\\m=\frac{189-6\sqrt{231}}{5}\end{array}\right..$$

Vậy có hai bộ thỏa yêu cầu bài toán:

$$M_1\left(\frac{189+6\sqrt{231}}{15};0;0\right),N_1\left(0;\frac{22+3\sqrt{231}}{5};0\right)$$

hoặc $M_2\left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15};0;0\right),N_2\left(0;\frac{22-3\sqrt{231}}{5};0\right)$.

3) Vì $E\in(Oyz)$ nên $E(0;x;y)$

Suy ra $\overrightarrow{AE}=(-3;y+2;z-4)$, $\overrightarrow{BE}=(1;y-4;z+4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]=(8y+6z-8;4z+8;10-4y)$

Nên từ giả thiết bài toán ta có: $\begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}\right]\right\| = 3\sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ \left\|\left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}\right]\right\|^2 = 1044 \end{cases}$

$$AE^2 = BE^2 \Leftrightarrow 9 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1 + (y-4)^2 + (z+4)^2 \Leftrightarrow y = \frac{4z+1}{3}$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}\right]\right\|^2 = 1044 \Leftrightarrow (8y+6z-8)^2 + (4z+8)^2 + (10-4y)^2 = 1044$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{50z-16}{3}\right)^2 + (4z+8)^2 + \left(\frac{26-16z}{3}\right)^2 - 1044 = 0 \Leftrightarrow z = 2, z = -\frac{34}{25}$$

- Với $z = 2 \Rightarrow y = 3$ nên $E(0;3;2)$
- Với $z = -\frac{34}{25} \Rightarrow y = -\frac{37}{25}$ nên $\left(0; -\frac{37}{25}; -\frac{34}{25}\right)$.

Bài 3.1.3. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$A(1;2;1), B(2;-1;-3), C(-2;0;3), D(0;3;4)$

1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích của tứ diện ABCD.
2) Tính chiều cao vẽ từ B của tam giác BCD và chiều cao của tứ diện ABCD vẽ từ A.
3) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng CM và BN.
4) Tìm E trên đường thẳng AB sao cho tam giác ECD có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{BC} = (-4;1;6)$, $\overrightarrow{BD} = (-2;4;7)$, $\overrightarrow{BA} = (-1;3;4)$

Suy ra $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-17;16;-14)$, $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BA} = 9 \neq 0$

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng và thể tích khối tứ diện ABCD là:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BA}\right| = \frac{3}{2} \text{ (đvtt).}$$

2) Ta có: $\overrightarrow{CD} = (2;3;1) \Rightarrow CD = \sqrt{14}, S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right| = \frac{\sqrt{741}}{2}$

Suy ra đường cao $BB' = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \sqrt{\frac{741}{14}}$.

Chiều cao của hình chóp vẽ từ A là: $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{9}{\sqrt{241}}$.

3) Ta có $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$, $N\left(-1; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; -4\right), \overrightarrow{BN} = \left(-3; \frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = -\frac{141}{4}$

Nên $\cos(CM, BN) = \frac{\left|\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}\right|}{CM.BN} = \frac{141}{2\sqrt{6555}}$.

4) Ta có phương trình $AB: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 1-4t \end{cases}$, suy ra $E(1+t; 2-3t; 1-4t)$

$\overrightarrow{CE} = (t+3; -3t+2; -4t-2)$, $\overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{CD} = (9t+8; -9t-7; 9t+5)$

Suy ra $S_{\Delta CDE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{CD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{243t^2 + 360t + 138}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{243\left(t + \frac{20}{27}\right)^2 + \frac{14}{3}} \geq \frac{\sqrt{42}}{6}$$

Vậy $S_{\Delta CDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\left(\frac{7}{27}; \frac{38}{9}; \frac{107}{27}\right)$.

Bài 3.1.4. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm

$A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$.

1) Chứng minh rằng các điểm A, B, C không thẳng hàng.
2) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.
3) Tính $\cos A, \sin B, \tan C$ của tam giác ABC.
4) Tính độ dài đường cao từ đỉnh A, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.
5) Tìm tọa độ giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(4;0;-3), \overrightarrow{AC}(6;8;0)$ nên các điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, tức là $\begin{cases} 4 = 6k \\ 0 = 8k \\ -3 = 0.k \end{cases}$ (vô lí). Vậy A, B, C không thẳng hàng.

2) Vì A, B, C không thẳng hàng nên ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, hay $\begin{cases}7-x_D=4\\9-y_D=0\\1-z_D=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=9\Rightarrow D(3;9;4).\\z_D=4\end{cases}$

3) Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5,\left|\overrightarrow{AC}\right|=10,\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{77}.$

Vậy $\cos A=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{24}{50}=\dfrac{12}{25}.$

Tương tự $\cos B=\dfrac{\sqrt{77}}{385},\cos C=\dfrac{38\sqrt{77}}{385}$. Vì $B,C\in(0;\pi)$ nên

+) $\sin B>0\Rightarrow\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{481}{77}}.$

+) $\tan C,\cos C$ cùng dấu $\tan C=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 C}-1}=\dfrac{\sqrt{481}}{38}.$

4) Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}BA.BC.\sin B=\dfrac{1}{2}5.\sqrt{77}.\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{481}{77}}=\sqrt{481}.$

Do đó

+) $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2S}{BC}=2\sqrt{\dfrac{481}{77}}.$

+) $R=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{AC}{2\sin B}=25.\sqrt{\dfrac{77}{481}}.$

+) $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{2S}{AB+BC+CA}=\dfrac{2\sqrt{481}}{15+\sqrt{77}}.$

Chú ý: Có thể tính diện tích bằng công thức $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$

5) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC

Theo tính chất phân giác, ta có $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{FB}{FC}=\dfrac{AB}{AC}$

+) Vì E nằm trong đoạn BC nên $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{EB}$

Giả sử $E(x_E;y_E;z_E)$ thì $\overrightarrow{EC}(7-x_E;9-y_E;1-z_E),\overrightarrow{EB}(5-x_E;1-y_E;-2-z_E)$

Nên $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EB}$ tương đương với

$$\begin{cases}7-x_E=-2(5-x_E)\\9-y_E=-2(1-y_E)\\1-z_E=-2(-2-z_E)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=\dfrac{17}{3}\\y_E=\dfrac{11}{3}\Rightarrow E\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{11}{3};-1\right).\\z_E=-1\end{cases}$$

Tương tự, do F nằm ngoài đoạn BC nên $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FB}$, từ đó ta tìm được tọa độ điểm F là $F(3;-7;3)$.

Bài 3.1.5. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có
$A(2;3;1),B(-1;2;0),C(1;1;-2).$

1) Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.
2) Tìm tọa độ H là trực tâm của tam giác ABC.
3) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.
4) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Hướng dẫn giải

1) Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;-1;-2)$, phương trình BC: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=-2t\end{cases}$

Suy ra $K(2t-1;2-t;-2t),\overrightarrow{AK}(2t-3;-1-t;-1-2t)$

Vì $AK\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow(2t-3).2+(-1-t).(-1)+(-1-2t).(-2)=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$. Tọa độ điểm K cần tìm là $K\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right).$

2) Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$\overrightarrow{AH}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BH}(x+1;y-2;z)$

$\overrightarrow{AB}(-3;-1;-1),\overrightarrow{AC}(-1;-2;-3),\overrightarrow{BC}(2;-1;-2)$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&-3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-3\\-3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&-2\end{vmatrix}\right)=(1;-8;5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AH\perp BC\\BH\perp CA\\H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-2z=-1\\x+2y+3z=3\\x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$.

3) Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$\overrightarrow{AI}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BI}(x+1;y-2;z),\overrightarrow{CI}(x-1;y-1;z+2)$.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AI=BI\\AI=CI\\I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+2y+2z=9\\x+2y+3z=4\\x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right)$.

4) Trọng tâm G của tam giác ABC có tạo độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2-1+1}{3};\frac{3+2+1}{3};\frac{1+0-2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};2;-\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15};\frac{1}{15};0\right),\overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15};\frac{1}{30};0\right)$ nên $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 3.1.6. Cho tam giác đều ABC có $A(5;3;-1),B(2;3;-4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3

1) Tìm tọa độ điểm D biết ABCD là tứ diện đều.
2) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Hướng dẫn giải

Vì $C\in(Oxy)$ nên $C(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;0;-3),\overrightarrow{AC}(x-5;y-3;1),\overrightarrow{BC}(x-2;y-3;4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB=AC=BC$, do đó

$$\begin{cases}AC=AB\\AC=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+1^2=18\\(x-5)^2+(y-3)^2+1^2=(x-2)^2+(y-3)^2+4^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-3)^2=1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=4\\x=1;y=2\end{array}\right..$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1;2;0)$.

1) Gọi $D(x;y;z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5;y-3;z+1),\overrightarrow{BD}(x-2;y-3;z+4),\overrightarrow{CD}(x-1;y-2;z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD=BD=CD=AB=3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\(x-5)^2+(13-5x)^2+(2-x)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\3x^2-16x+20=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2-16x+20=0$ ta được $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{10}{3}\end{array}\right.$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2;6;-1)$ hoặc $D\left(\frac{10}{3};-\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

2) Gọi $S(x;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS}(x-5;y-3;z+1),\overrightarrow{BS}(x-2;y-3;z+4),\overrightarrow{CS}(x-1;y-2;z)$

SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BS}=0\\\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{CS}=0\\\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{AS}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-2)+(y-3)^2+(z+1)(z+4)=0\\(x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z+4)z=0\\(x-1)(x-5)+(y-2)(y-3)+z(z+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-7x-6y+5z=-23\\x^2+y^2+z^2-3x-5y+4z=-8\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-4z=12\\-3x-3z=-3\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5z+11\\x=1-z\\3z^2+10z+8=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2+10z+8=0$ ta được $z=-2;z=-\frac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3;1;-2),S\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Bài 3.1.7. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, A' \in Oz$ và $AB = 1,\ AD = 2,\ AA' = 3$.

1) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp.

2) Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$

3) Tìm điểm M thuộc A'C, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD, MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau A'C và BD.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C, hình chiếu của C lên Oz là A nên $C(1;2;0)$.

Hình chiếu của B',C',D' lên mp(Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B,C,D và A' nên $B'(1;0;3),\ C'(1;2;3),\ D'(0;2;3)$.

2) Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0;2;z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1;2;z-3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E}.\overrightarrow{A'C} = 0$

$\Leftrightarrow -1+4-3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$. Vậy $E(0;2;4)$.

3) Đặt $\overrightarrow{A'M} = x.\overrightarrow{A'C};\ \overrightarrow{BN} = y.\overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x.\overrightarrow{A'C} = (x;2x;3-3x)$, suy ra $M(x;2x;3-3x)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{BD} = (1-y;2y;0) \Rightarrow N(1-y;2y;0)$

Theo giả thiết của đề bài, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{MN} = (1-x-y;2y-2x;3x-3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;2;0)$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9 = 0 \\ -1+x+y+4y-4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y = -10 \\ -3x+5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{53}{61} \\ y = \dfrac{44}{61} \end{cases}$

Do đó $M\left(\dfrac{53}{61};\dfrac{106}{61};\dfrac{24}{61}\right), N\left(\dfrac{17}{61};\dfrac{88}{61};0\right)$.

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng A'C, BD nên

$$d(A'C,BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Bài 3.1.8. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a;\ AD = 2a;\ A \equiv O$, B thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

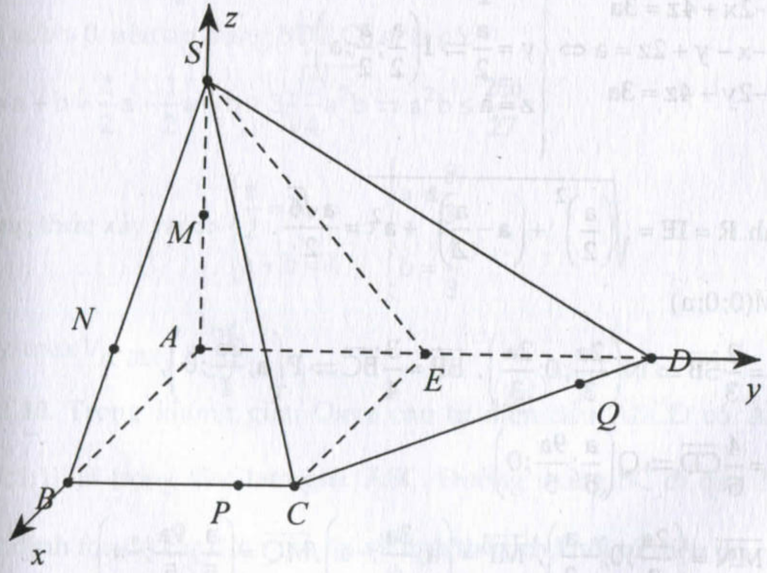
1) Xác định tọa độ các đỉnh của hình chóp

2) Chứng minh rằng ΔSCD vuông, tính diện tích tam giác SCD và tính cô sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

3) Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

4) Trên các cạnh SA, SB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q thỏa $SM = MA,\ SN = 2NB,\ BP = 3PC, CQ = 4QD$. Chứng minh rằng M, N, P, Q không đồng phẳng và tính thể tích khối chóp MNPQ.

Hướng dẫn giải



1) Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$. Đặt $SA = x \Rightarrow S(0;0;x)$

$\overrightarrow{BD} = (-a;2a;0), \overrightarrow{SC} = (a;a;-x) \Rightarrow DB = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{x^2+2a^2}; \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{SC} = a^2$

Nên $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}\right|}{SC.BD} = \dfrac{a}{\sqrt{5(x^2+2a^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S(0;0;2a)$.

2) Ta có $\overrightarrow{CS}=(-a;-a;2a),\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)\Rightarrow \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Do đó: $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CS.CD=\frac{1}{2}.a\sqrt{6}.a\sqrt{2}=a^2\sqrt{3}$

Gọi $\beta=\left((SCD),(SAB)\right)$. Ta có hình chiếu của tam giác SCD lên mặt phẳng (SAB) là tam giác SAB nên ta suy ra $\cos\beta=\frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{\frac{1}{2}a.2a}{a^2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) Ta có $E(0;a;0)$. Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SBCE

Khi đó $\begin{cases}IB^2=IS^2\\IC^2=IS^2\\IE^2=IS^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\\(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\\x^2+(y-a)^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4z=3a\\-x-y+2z=a\\-2y+4z=3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{a}{2}\\y=\frac{a}{2}\\z=a\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right).$$

Bán kính $R=IE=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

4) Ta có M(0;0;a)

Do $\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}\Rightarrow N\left(\frac{2a}{3};0;\frac{2a}{3}\right)$, $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\Rightarrow P\left(a;\frac{3a}{4};0\right)$,

$\overrightarrow{CQ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CD}\Rightarrow Q\left(\frac{a}{5};\frac{9a}{5};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{2a}{3};0;-\frac{a}{3}\right)$, $\overrightarrow{MP}=\left(a;\frac{3a}{4};-a\right)$, $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{a}{5};\frac{9a}{5};-a\right)$

$\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}=\left(\frac{a^2}{4};\frac{a^2}{3};\frac{a^2}{2}\right)\Rightarrow\left(\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}\right).\overrightarrow{MQ}=\frac{3a^3}{20}\neq 0$

nên M, N, P, Q không đồng phẳng.

Vậy $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP}\right).\overrightarrow{MQ}\right|=\frac{a^3}{40}$.

Bài 3.1.9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0),D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của CC'.

1) Tính thể tích của khối tứ diện BDA'M.

2) Cho $a+b=4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $C(a;a;0)$, $B'(a;0;b)$, $C'(a;a;b)$, $D'(0;a;b)\Rightarrow M(a;a;\frac{b}{2})$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b)$, $\overrightarrow{A'D}=(0;a;-b)$, $\overrightarrow{A'M}=\left(a;a;-\frac{b}{2}\right)$

nên $\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(ab;ab;a^2)\Rightarrow\overrightarrow{A'M}.\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=\frac{3a^2b}{2}$.

Vậy $V_{A'MBD}=\frac{a^2b}{4}$.

2) Do $a,b>0$ nên áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$4=a+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}\Rightarrow a^2b\le\frac{256}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}=b\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{8}{3}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$

Vậy $\max V_{A'BDM}=\frac{64}{27}$.

Bài 3.1.10. Trong không gian Oxyz cho tứ diện đều ABCD có $A(3;-1;2)$ và $G(1;1;1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC đi qua $M\left(4;4;-\frac{7}{2}\right)$ Xác định tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích khối tứ diện đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AG}=(-2;2;-1)$, $\overrightarrow{AM}=(1;5;\frac{11}{2})$

Suy ra $\vec{n}_{ABC}=\overrightarrow{AG}\wedge 2\overrightarrow{AM}=(-12;-24;-24)$

Phương trình $(ABC):x+2y+2z-5=0$.

$\overrightarrow{u_{BC}}=\overrightarrow{AG}\wedge\vec{n}_{ABC}=(6;3;-6)$

Phương trình $BC:\begin{cases} x=4+2t \\ y=4+t \\ z=-\dfrac{7}{2}-2t \end{cases}$

Gọi a là cạnh của tứ diện ABCD, ta có $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=3\Rightarrow a=3\sqrt{3}$

Ta có: $B\left(4+2t;4+t;-\dfrac{7}{2}-2t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2t+1;t+5;-2t-\dfrac{11}{2}\right)$

Nên ta được phương trình : $(2t+1)^2+(t+5)^2+(2t+\dfrac{11}{2})^2=27$

$\Leftrightarrow t^2+4t+\dfrac{13}{4}=0\Leftrightarrow t=-2\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $B\left(-\sqrt{3};\dfrac{4-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{3};\dfrac{4+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$

Do $DG\perp(ABC)$ nên phương trình $GD:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \end{cases}$

Suy ra $D(1+t;1+2t;1+2t)$

Mà $GD=\sqrt{DA^2-AG^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}\Rightarrow 3|t|=3\sqrt{2}\Rightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Do đó $S(1+\sqrt{2};1+2\sqrt{2};1+2\sqrt{2})$ hoặc $S(1-\sqrt{2};1-2\sqrt{2};1-2\sqrt{2})$.

Thể tích của tứ diện: $V=\dfrac{1}{3}DG.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{6}}{4}$ (đvtt).

§ 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Để lập phương trình mặt phẳng (α), ta có các cách sau:

Cách 1: Tìm một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ mà mặt phẳng (α) đi qua và một VTPT $\vec{n}=(a;b;c)$. Khi đó phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Một số lưu ý khi tìm VTPT của mặt phẳng (α):

- Nếu hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trên (α) thì $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{n}$ là VTPT của (α).
- Nếu mặt phẳng (α) đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng A,B,C thì $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ là VTPT của (α).
- Nếu $(\alpha)//(\beta)$ thì $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}$.
- Nếu $\Delta\perp(\alpha)$ thì $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_\Delta}$.
- Nếu $(\alpha)//(\beta)$ thì $\overrightarrow{n_\beta}//(\alpha)$.
- Nếu $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì phương trình (ABC):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Cách 2: Giả sử phương trình (α) có dạng:

$$ax+by+cz+d=0 \text{ với } a^2+b^2+c^2>0.$$

Dựa vào giả thiết của đề bài ta tìm được ba trong bốn ẩn a,b,c,d theo ẩn còn lại. Chẳng hạn $a=mb,c=nb,d=pb$. Khi đó phương trình (α) là:

$$mx+y+nz+p=0.$$

Chú ý: Nếu mặt phẳng (α) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ thì phương trình của (α) có dạng: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

1) **Các dạng lập phương trình mặt phẳng.**

Dạng 1: Lập phương trình mặt phẳng biết mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

Ta có $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ là VTPT và A là điểm đi qua.

Ví dụ 3.2.1. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết (α) đi qua

1) $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$, $C(-2;3;-1)$

2) Các hình chiếu của A lên các trục tọa độ.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;2;-2)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(2;-5;-8)$

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-5;-8)$. Do đó, phương trình của (α) là:

$2(x-1)-5(y-1)-8(z-1)=0$ hay $2x-5y-8z+11=0$.

2) Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz.

Ta có $A_1(1;0;0)$, $A_2(0;1;0)$, $A_3(0;0;1)$.

Vì (α) đi qua A_1,A_2,A_3 nên phương trình có dạng:

$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$ hay $x+y+z-1=0$.

Dạng 2. Lập phương trình mặt phẳng (α)song song với mặt phẳng (β) hoặc (α) ⊥ AB.

Ta có $\overrightarrow{n_\beta}$ hoặc $\overrightarrow{AB}$ là VTPT của (α).

Chú ý: Nếu $(\beta): ax+by+cz+d=0$ thì $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$.

Ví dụ 3.2.2. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết:

1) (α) đi qua $M(2;3;1)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x+3y-z+1=0$

2) (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1;4;2)$, $B(-3;2;-1)$.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{n_\beta}=(2;3;-1)$.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(2;3;-1)$.Phương trình mặt phẳng (α) là:

$2(x-2)+3(y-3)-1(z-1)=0$ hay $2x+3y-z-12=0$.

2) Vì (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;-3)$ là VTPT của (α).

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$4(x-1)+2(y-4)+3(z-2)=0$ hay $4x+2y+3z-18=0$.

Dạng 3: Lập phương trình mặt phẳng (α) biết (α) song song với hai vectơ không cùng phương a, b

Khi đó $\overrightarrow{n_\alpha}=\vec{a}\wedge\vec{b}$.

Chú ý:

- Nếu (P) chứa (hoặc song song) với AB thì giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ nằm trên (hoặc song song) với (P).
- Nếu $(P)\perp(Q)$ thì VTPT của mặt phẳng này sẽ có giá nằm trên hoặc song song với mặt phẳng kia.

Ví dụ 3.2.3. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:

1) (α) chứa $A(1;1;2)$, $B(1;-1;1)$ và song song với CD trong đó C(0; 3; 0), $D(-2;0;-1)$.

2) (α) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y+z+1=0$

3) (α) đi qua C và vuông góc với hai mặt phẳng (β) và $(\gamma): 2x-y+z-3=0$.

4) (α) đi qua A, B và cách đều hai điểm $M(3;-5;-1)$, $N(-5;-1;7)$.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2;-1)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;-3;-1)$.

Vì (α) đi qua A, B và song song với CD nên $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-1;2;-4)$.

Phương trình $(\alpha): x-2y+4z-7=0$.

2) Ta có $\overrightarrow{n_\beta}=(1;1;1)$.

Vì (α) chứa A, B và song song với (β) nên $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-1;-1;2)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z+2=0$.

3) Ta có $\overrightarrow{n_\gamma}=(2;-1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (β) và (γ) nên $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}\wedge\overrightarrow{n_\gamma}=(2;1;-3)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-3z-3=0$.

4) Vì (α) cách đều hai điểm M, N nên ta có các trường hợp sau

TH 1: $MN//(\alpha)$. Khi đó $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MN}=(-12;8;-16)$.

Phương trình $(\alpha): 3x-2y+4z-9=0$.

TH 2: MN cắt (α) tại I, suy ra I là trung điểm đoạn MN.

Do đó $I(-1;-3;3)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{BI}=(-6;2;-4)$.

Phương trình $(\alpha): 3x-y+2z-6=0$.

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và liên quan đến khoảng cách hoặc góc

Phương trình đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có dạng

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Dựa vào điều kiện khoảng cách hoặc góc ta tìm được $a=mb, c=nb$. Khi đó ta chọn b bằng một giá trị bất kì ($b\neq 0$) ta tìm được a,c.

Ví dụ 3.2.4. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết

1) (α) song song với $(Q): 2x-3y-6z-14=0$ và khoảng cách từ O đến (P) bằng 5.

2) (α) đi qua $A(0;1;2)$, $B(2;1;3)$ và cách O một khoảng bằng 2

3) (α) đi qua hai điểm $C(1;3;-2), D(-1;0;3)$ và cách đều hai điểm $M(-1;-1;-1)$ và $N(3;2;2)$

4) (α) đi qua $E(0;-1;1)$, $F(2;1;2)$ và tạo với mp $(\beta): x+y+z-1=0$ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải.

1) Vì $(\alpha)//(Q)$ nên phương trình (α) có dạng: $2x-3y-6z+m=0$.

Mặt khác $d(O,(\alpha))=5 \Rightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{49}}=5 \Rightarrow m=\pm 35$.

Phương trình $(\alpha): 2x-3y-6z\pm 35=0$.

2) Vì mặt phẳng (α) đi qua $A(0;1;2)$ nên phương trình có dạng

$ax+b(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-b-2c=0$.

(α) đi qua $B(2;1;3)$ nên $2a+b+3c-b-2c=0 \Leftrightarrow c=-2a$.

Mặt khác $d(O,(\alpha))=2$ nên ta có

$$\frac{|b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \Leftrightarrow |b-4a|=2\sqrt{5a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (b-4a)^2=4(5a^2+b^2) \Leftrightarrow 4a^2+8ab+3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{2}b \\ a=-\dfrac{3}{2}b \end{array}\right..$$

- $a=-\dfrac{1}{2}b \Rightarrow b=-2a$, ta chọn $a=1 \Rightarrow b=c=-2$.

  Phương trình mặt phẳng (α): $x-2y-2z+6=0$.

- $a=-\dfrac{3}{2}b \Rightarrow b=-\dfrac{2}{3}a$, ta chọn $a=3 \Rightarrow b=-2, c=-6$.

  Phương trình mặt phẳng (α): $3x-2y-6z+14=0$.

3) Vì mặt phẳng (α) đi qua $C(1;3;-2)$ nên phương trình có dạng

$a(x-1)+b(y-3)+c(z+2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-a-3b+2c=0$.

(α) đi qua $D(-1;0;3)$ nên $-a+3c-a-3b+2c=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{5c-3b}{2}$.

Mặt khác $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))$ nên ta có

$|-a-b-c-a-3b+2c|=|3a+2b+2c-a-3b+2c|$

$$\Leftrightarrow |-2a-4b+c|=|2a-b+4c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+4b-c=2a-b+4c \\ 2a+4b-c=-2a+b-4c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=c \\ a=\dfrac{-3b-3c}{4} \end{array}\right..$$

- $b=c$, ta chọn $c=1 \Rightarrow b=1, a=1$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

  $x+y+z-2=0$.

- $a=\dfrac{-3b-3c}{4}$, ta có $\dfrac{5c-3b}{2}=\dfrac{-3c-3b}{4} \Leftrightarrow b=\dfrac{13}{3}c, a=-\dfrac{15}{4}c$.

  Ta chọn $c=-12 \Rightarrow a=45, b=-52$.

  Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 45x-52y-12z+81=0$.

4) Vì mặt phẳng (α) đi qua $E(0;-1;1)$ nên phương trình có dạng

$ax+b(y+1)+c(z-1)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+b-c=0$.

(α) đi qua $F(2;1;2)$ nên $2a+b+2c+b-c=0 \Leftrightarrow c=-2a-2b$.

Mặt khác $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right)\right|=\cos\varphi=\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 3|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+(2a+2b)^2} \Leftrightarrow 9(a+b)^2=5a^2+8ab+5b^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+5ab+2b^2=0 \Leftrightarrow a=-2b, a=-\dfrac{1}{2}b$.

- $a=-2b \Rightarrow c=2b$, chọn $b=-1 \Rightarrow a=2, c=-2$.

  Phương trình (α) là: $2x-y-2z+1=0$.

- $a=-\frac{1}{2}b$, ta chọn $b=-2\Rightarrow a=1, c=2$.

Phương trình (α) là: $x-2y+2z-4=0$.

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng
$(\alpha_1): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(\alpha_2): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Cho z bởi hai giá trị, giải hệ tìm được hai bộ (x;y) tương ứng. Gọi A, B là hai điểm có tọa độ là hai nghiệm của hệ. Khi đó (α) đi qua giao tuyến của (α_1) và $(\alpha_2) \Leftrightarrow A, B\in(\alpha)$.

Ví dụ 3.2.5. Cho ba mặt phẳng:
$(\alpha_1): x+y+z-3=0$; $(\alpha_2): 2x+3y+4z-1=0$.
Chứng minh rằng hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) cắt nhau. Viết phương trình (P) đi qua $A(1;0;1)$ và giao tuyến của (α_1) và (α_2).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{n_2}=(2;3;4)$ lần lượt là VTPT của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2).

Vì $\overrightarrow{n_1}\neq k\overrightarrow{n_2}$ nên hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) cắt nhau.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+3y+4z-1=0 \end{cases}$.

- Cho $z=-1$, ta có hệ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow M(7;-3;-1)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$
- Cho $z=-2$, ta có hệ $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow N(6;-1;-2)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$.

Vì (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên (α) đi qua M, N.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(6;-3;-2)$, $\overrightarrow{AN}=(5;-1;-2)\Rightarrow \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AN}=(4;2;2)$.

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là: $2x+y+z-3=0$.

Dạng 6: Phương trình đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (α) đi qua $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, $abc\neq 0$ thì phương trình (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ví dụ 3.2.6. . Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các (α) trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

1) M là trực tâm của tam giác ABC.
2) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất.
3) $OA=OB=OC$.
4) $8OA=12OB+16=37OC$ và $x_A>0, z_C<0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}(1-a;9;4), \overrightarrow{BC}(0;-b;c), \overrightarrow{BM}(1;9-b;4), \overrightarrow{CA}(a;0;-c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} M\in(\alpha) \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1 \\ 9b=4c \\ a=4c \end{cases} \Rightarrow a=98; b=\frac{98}{9}; c=\frac{49}{2}.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0$.

2)

Cách 1: Ta có: $d(O,(\alpha))=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ với các số thực $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

Áp dụng bđt Bunhiacopski ta có:

$$\left(1.\frac{1}{a}+9.\frac{1}{b}+4.\frac{1}{c}\right)^2 \le (1^2+9^2+4^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T \ge \frac{1}{98}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 1:\frac{1}{a}=9:\frac{1}{b}=4:\frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=9b=4c=98.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α).

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên

$$d(O,(\alpha)) = OH \le OM = \sqrt{98}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1;9;4)$ nên phương trình (α) là

$1.(x-1)+9(y-9)+4.(z-4)=0 \Leftrightarrow x+9y+4z-98=0.$

3) Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $a=b=c$.

  Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=14$, nên phương trình (α) là:

  $x+y+z-14=0.$

- Trường hợp 2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=6$, nên phương trình (α) là $x+y-z-6=0$.

- Trường hợp 3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-4$, nên phương trình (α) là $x-y+z+4=0$.

- Trường hợp 4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-12$, nên phương trình (α) là $x-y-z+12=0$.

  Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x+y+z-14=0$, và các mặt phẳng $x+y-z-6=0, x-y+z+4=0, x-y-z+12=0$.

4) Vì $x_A>0, z_C<0$ nên $a>0, c<0$, do đó

$8OA=12OB+16=37OC \Leftrightarrow 8a=12|b|+16=-37c.$

- Nếu $b>0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{2a-4}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

  $$\frac{1}{a}+\frac{27}{2a-4}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+2a-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-7 \end{array}\right.$$

  Vì $a>2$ nên $a=5 \Rightarrow b=2; c=-\frac{40}{37}$, phương trình mặt phẳng cần tìm là $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$

- Nếu $b<0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{4-2a}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

  $$\frac{1}{a}+\frac{27}{4-2a}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+29a-35=0 \Leftrightarrow a=\frac{-29\pm 3\sqrt{109}}{2}$$

  Vì $a>2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

  Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$

2) Tìm tọa độ điểm thuộc mặt phẳng

- Điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in (\alpha): ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0.$
- Hình chiếu H của M lên mp(P) được xác định bởi $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH}=t.\overrightarrow{n_P} \end{cases}$.

Ví dụ 3.2.7. Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(3;3;3), B(1;2;4), C(0;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$.

1) Tìm tọa độ hình chiếu của A lên (α).

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc (α) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Gọi H là hình chiếu của A lên (α).

Phương trình $AH: \begin{cases} x=3+t \\ y=3+t \\ z=3+t \end{cases} \Rightarrow H(3+t;3+t;3+t).$

Vì $H \in (\alpha)$ nên ta có: $3+t+3+t+3+t-3=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(1;1;1).$

2) Với mỗi điểm $K(x;y;z)$ ta đặt $f(K)=x+y+z-3$.

Ta có $f(A)=6, f(B)=4 \Rightarrow A, B$ nằm cùng phía so với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (α), suy ra $A'(-2;-2;-2)$

Khi đó, với mọi điểm $M \in (\alpha)$, ta có: $MA+MB=MA'+MB \ge A'B$.

Dấu "=" xảy ra khi $M = A'B \cap (\alpha)$.

Vì $\overrightarrow{A'B} = (3;4;6)$, phương trình A'B: $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = -2+4t \\ z = -2+6t \end{cases} \Rightarrow M(-2+3t;-2+4t;-2+6t)$.

Mà $M \in (\alpha)$ nên $-2+3t-2+4t-2+6t-3 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{9}{13} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{13};\dfrac{10}{13};\dfrac{28}{13}\right)$.

3) Tổng hợp

Ví dụ 3.2.8. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:

1) (α) đi qua hai điểm $A(1;1;1), B(2;-1;3)$ và song song với OC với $C(-1;2;-1)$.

2) (α) đi qua $M(1;1;1)$, vuông góc với $(\beta): 2x-y+z-1=0$ và song song với $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-3}$.

3) (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2x-y+3z-4=0$ và khoảng cách từ O đến (α) bằng $\sqrt{26}$.

4) (α) đi qua BC và cách đều hai điểm A, O.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{OC} = (-1;2;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC} = (-2;-1;0)$

Vì (α) đi qua A, B và song song với CD nên:

(α) nhận $\vec{n} = -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC} = (2;1;0)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình $(\alpha): 2x+y-3=0$.

2) Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} = (2;-1;1)$, $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;-3)$

Do $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) // \Delta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} \wedge \overrightarrow{u_\Delta} = (2;8;4)$.

Phương trình $(\alpha): x+4y+2z-7=0$.

3) Ta có $\overrightarrow{n_1} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{n_2} = (2;-1;3)$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q).

Vì (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên (α) nhận véc tơ $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (4;-1;-3)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình (α) có dạng : $4x-y-3z+d=0$.

Mặt khác: $d(O,(\alpha)) = \sqrt{26}$ nên ta có: $\dfrac{|d|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Rightarrow d = \pm 26$.

Vậy phương trình $(\alpha): 4x-y-3z \pm 26 = 0$.

4) Vì (α) cách đều A, O nên ta có các trường hợp sau

TH 1: $AO // (\alpha)$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3;3;-4)$, $\overrightarrow{OA} = (1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{OA} = (7;-1;-6)$.

Phương trình $(\alpha): 7x-y-6z+3=0$.

TH 2: $(\alpha) \cap OA = \{I\}$, suy ra I là trung điểm đoạn $OA \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{IB} = \left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{IB} = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$ là VTPT của (α).

Phương trình $(\alpha): x+y-1=0$.

Ví dụ 3.2.9. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết :

1) (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-3z-2=0$; $(\beta): y-2z+1=0$ và khoảng cách từ $M\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ đến (P) bằng $\dfrac{7}{6\sqrt{3}}$.

2) (P) đi qua hai điểm $A(1;2;1), B(-2;1;3)$ sao cho khoảng cách từ $C(2;-1;1)$ đến (P) bằng hai khoảng cách từ $D(0;3;1)$ đến (P).

Lời giải.

1) Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$.

Ta có $A(2;-1;0), B(5;1;1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$

Suy ra $\begin{cases} 2a-b+d=0 \\ 5a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a+d \\ c = -7a-2d \end{cases}$.

Mặt khác: $d(M,(P)) = \dfrac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{2}c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{7}{6\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |c+2d| = \dfrac{7}{3\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow 27(c+2d)^2 = 49(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 27.49a^2 = 49\left[a^2+(2a+d)^2+(7a+2d)^2\right]$

$\Leftrightarrow 27a^2+32ad+5d^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -d \\ a = -\dfrac{5}{27}d \end{array}\right.$.

- $d = -a \Rightarrow b = a; c = -5a$. Suy ra phương trình (P) là: $ax+ay-5az-a=0 \Leftrightarrow x+y-5z-1=0$.

- $d=-\frac{27}{5}a \Rightarrow b=-\frac{17}{5}a; c=-\frac{36}{5}a$. Suy ra phương trình (P) là:

$5x-17y-36z-27=0$.

2) Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$

Vì $A,B\in(P) \Rightarrow \begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -2a+b+3c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-b+2c}{3} \\ d=-\dfrac{5b+5c}{3} \end{cases}$

Mặt khác: $d\big(C,(P)\big)=2d\big(D,(P)\big) \Leftrightarrow |2a-b+c+d|=2|3b+c+d|$

$\Leftrightarrow |5b-c|=2|2b-c| \Leftrightarrow c=-b, c=3b$

- Với $c=-b$, ta chọn $b=-1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow a=1, d=0$

Phương trình $(\alpha): x-y+z=0$.

- Với $c=3b$, ta chọn $b=1 \Rightarrow c=3, a=\frac{5}{3}, d=-\frac{20}{3}$.

Phương trình $(\alpha): 5x+3y+9z-20=0$.

Ví dụ 3.2.10. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$; $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-4}$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và d_1.

2) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_1 và d_2.

Lời giải.

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;-1;-2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $N(2;-2;1)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-4)$

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}=(0;-3;-5)$

Do (P) đi qua A và d_1 nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u_1}=(-8;10;-6)$

Suy ra phương trình $(P): 4x-5y+3z-3=0$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+2t=2+t' \\ -1+t=-2+2t' \\ -2-t=1-4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-t'=1 \\ t-2t'=-1 \\ -t+4t'=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=t'=1$

Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau tại $E(3;0;-3)$.

Ta có $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-2;7;3)$

Phương trình (Q): $2x-7y-3z-15=0$.

Ví dụ 3.2.11. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$, $d_2: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ và $d_3: \begin{cases} x=-2t \\ y=-1-4t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_1 và song song với d_2.

1) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua d_2 và cắt d_1, d_3 lần lượt tại A,B sao cho $AB=\sqrt{13}$.

2) Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và d_3. Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_2 và tạo với mặt phẳng (P) một góc φ thỏa $\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{145}}$.

Lời giải.

1) Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;-1;1)$ có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ là VTCP

d_2 có $\overrightarrow{u_2}=(2;3;-1)$ là VTCP

Vì (α) chứa d_1 và song song với d_2 nên $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(1;-1;-1)$ là VTPT của (α).

Phương trình $(\alpha): x-y-z-1=0$.

2) Ta có $A\in d_1 \Rightarrow A(1+a;-1+2a;1-a)$, $B\in d_3 \Rightarrow B(-2b;-1-4b;-1+2b)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-a-2b-1;-2(a+2b);a+2b-2)$, đặt $x=a+2b$

Từ $AB=\sqrt{13} \Rightarrow (x+1)^2+4x^2+(x-2)^2=13 \Leftrightarrow x=-1, x=\frac{4}{3}$.

- Với $x=1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;2;-3)$, ta có $\vec{u}=(2;3;-1)$ là VTCP của d_2 và $A(-1;1;0)\in d_2 \Rightarrow A\in(\alpha)$.

Suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(7;-6;-4)$ là VTPT của (β).

Phương trình $(\beta): 7x-6y-4z+13=0$.

- Với $x=\frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-\frac{7}{3};-\frac{8}{3};-\frac{2}{3})$.

Suy ra $\vec{n}=\left[-3\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-14;11;5)$ là VTPT của (β).

Phương trình $(\beta): 14x-11y-5z-25=0$.

3) Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;-1;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $E(-1;1;0)$, có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;3;-1)$.

Đường thẳng d_3 đi qua $N(0;-1;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(-2;-4;2)$.

Ta có $\overrightarrow{u_3}=-2\overrightarrow{u_1} \Rightarrow d_1//d_3$. Do đó $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{MN}=(-4;3;2)$.

Vì mặt phẳng (Q) đi qua d_2 nên phương trình (Q) có dạng:

$$ax+by+cz+a-b=0 \ (1)$$

với $a^2+b^2+c^2>0$ và $2a+3b-c=0 \Leftrightarrow c=2a+3b$.

Mặt khác $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\dfrac{|4a-3b-2c|}{\sqrt{29(a^2+b^2+c^2)}}=\dfrac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2+12ab+10b^2)}}$

Nên ta có: $\dfrac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2+12ab+10b^2)}}=\dfrac{6}{\sqrt{145}}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}|b|=2\sqrt{5a^2+12ab+10b^2} \Leftrightarrow 20a^2+48ab-5b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{10}b \\ a=-\dfrac{5}{2}b \end{array}\right.$$

- Với $a=\dfrac{1}{10}b$ ta chọn $b=10 \Rightarrow a=1, c=32$.

  Phương trình (Q) là: $x+10y+32z-9=0$.

- Với $a=-\dfrac{5}{2}b$ ta chọn $b=-2 \Rightarrow a=5, c=4$.

  Phương trình (Q) là: $5x-2y+4z+7=0$.

Ví dụ 3.2.12. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{3}$ và điểm $M(1;2;0)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, song song với Δ và (α) tạo với ba tia Ox, Oy, Oz một tứ diện có thể tích bằng 8.
2) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, vuông góc với $(P): x+y+z-3=0$ và tạo với Δ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\sqrt{\dfrac{31}{34}}$.

Lời giải.

1) Giả sử (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại

$$A\left(\frac{1}{a};0;0\right), B\left(0;\frac{1}{b};0\right), C\left(0;0;\frac{1}{c}\right) \text{ với } a,b,c>0.$$

Khi đó, phương trình $(\alpha): ax+by+cz=1$

Vì (α) đi qua M và song song với Δ nên ta có:

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ -2a+2b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b+1 \\ c=-2b+\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Mặt khác $V_{OABC}=8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}OA.OB.OC=8 \Leftrightarrow abc=\dfrac{1}{48}$

$$\Leftrightarrow b(2b-1)\left(2b-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{48} \Leftrightarrow 192b^3-160b^2+32b-1=0$$

$$\Leftrightarrow (4b-1)(48b^2-28b+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{1}{4} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{6} \\ b=\dfrac{7+\sqrt{37}}{24} \Rightarrow a=\dfrac{5-\sqrt{37}}{12}, c=\dfrac{1-\sqrt{37}}{12} \\ b=\dfrac{7-\sqrt{37}}{24} \Rightarrow a=\dfrac{5+\sqrt{37}}{12}, c=\dfrac{1+\sqrt{37}}{12} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình mặt cần lập là: $(\alpha_1): 6x+3y+2z-12=0$;

$(\alpha_2): 2(5-\sqrt{37})x+(7+\sqrt{37})y+2(1-\sqrt{37})z-24=0$;

và $(\alpha_3): 2(5+\sqrt{37})x+(7-\sqrt{37})y+2(1+\sqrt{37})z-24=0$.

2) Vì mặt phẳng (β) đi qua M nên phương trình của (β) có dạng:

$$a(x-1)+b(y-2)+cz=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-a-2b=0 \ (*)$$

với $a^2+b^2+c^2>0$.

Mặt khác, $(\beta)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow a+b+c=0 \Leftrightarrow c=-a-b$.

Ta có: $\sin\varphi=\left|\sin(\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_\beta})\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}=\dfrac{|-2a+2b+3c|}{\sqrt{17}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|5a+b|}{\sqrt{34(a^2+ab+b^2)}}$

Mà $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{\dfrac{3}{34}}$ nên ta có: $\dfrac{|5a+b|}{\sqrt{34(a^2+ab+b^2)}}=\sqrt{\dfrac{3}{34}}$

$$\Leftrightarrow (5a+b)^2=3(a^2+ab+b^2) \Leftrightarrow 22a^2+7ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{11}b \\ a=-\dfrac{1}{2}b \end{array}\right..$$

- Với $a=\dfrac{2}{11}b$, ta chọn $b=11 \Rightarrow a=2, c=-13$

  nên phương trình của (β) là: $2x+11y-13z-24=0$.

- Với $a=-\dfrac{1}{2}b$, ta chọn $b=-2 \Rightarrow a=1, c=1$

  nên phương trình của (β) là: $x-2y+z+3=0=0$.

Ví dụ 3.2.13. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng $(Q): 2x-y+2z-9=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$.

1) Gọi (α) là mặt phẳng phân giác của góc hợp bởi hai mặt phẳng (P) và (Q). Tìm giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

2) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời cách $E(8;-2;-9)$ một khoảng lớn nhất.

Lời giải.

1) Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có $M \in \Delta$ nên $M(4+t;t;-2t)$

Vì $M \in (\alpha)$ nên ta có: $d(M,(P)) = d(M,(Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|4+t+2t-4t-3|}{3} = \frac{|2(4+t)-t-4t-9|}{3} \Leftrightarrow |t-1| = |3t+1| \Leftrightarrow t=0, t=-1.$$

Từ đó ta có được hai điểm M là: $M_1(4;0;0)$ và $M_2(3;-1;2)$.

2) Ta có $A(3;-1;1)$ và $B(-4;1;9)$ là hai điểm thuộc giao của (P) và (Q).

Do đó (β) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) khi và chỉ khi $A, B \in (\beta)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7;2;8)$ nên phương trình $AB: \begin{cases} x = 3-7t \\ y = -1+2t \\ z = 1+8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Gọi K là hình chiếu của E lên AB, suy ra $K(3-7t;-1+2t;1+8t) \Rightarrow \overrightarrow{EK} = (-5-7t;1+2t;10+8t)$

Vì $EK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -7(-5-7t)+2(1+2t)+8(10+8t)=0 \Leftrightarrow t=-1$

Suy ra $K(10;-3;-7)$, $\overrightarrow{EK} = (2;-1;2)$.

Gọi H là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β), khi đó: $d(E,(\beta)) = EH \le EK$

Suy ra $d(E,(\beta))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$ hay (β) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với EK.

Phương trình $(\beta): 2x-y+2z-9=0$. (ta thấy $(\beta) \equiv (Q)$).

Ví dụ 3.2.14. Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(1; 2; 1), B(−1; 0; −2), C(2; 0; 0). Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-4;-5;6)$

Phương trình $(ABC): 4x+5y-6z-8=0$.

1. Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$\begin{cases} AI = IC \\ IB = IC \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+y^2+z^2 \\ (x+1)^2+y^2+(z+2)^2 = (x-2)^2+y^2+z^2 \\ 4x+5y-6z-8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=-1 \\ 6x+4z=-1 \\ 4x+5y-6z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{154} \\ y = \frac{65}{77} \\ z = -\frac{79}{154} \end{cases}.$$

Vậy $I\left(\frac{27}{154};\frac{65}{77};-\frac{79}{154}\right)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases}$ (*).

Mà $\overrightarrow{AH} = (x-1;y-2;z-1)$, $\overrightarrow{BC} = (3;0;2)$, $\overrightarrow{BH} = (x+1;y;z+2)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-2;-1)$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)+2(z-1)=0 \\ x+1-2y-(z+2)=0 \\ 4x+5y-6z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2z-5=0 \\ x-2y-z-1=0 \\ 4x+5y-6z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{127}{77} \\ y = \frac{24}{77} \\ z = \frac{2}{77} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(\frac{127}{77};\frac{24}{77};\frac{2}{77}\right)$.

Ví dụ 3.2.15. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(-2;1;0)$. Chứng minh A, d_1, d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC biết đường cao từ B nằm trên d_1 và đường phân giác trong góc C nằm trên d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;2;4)$ vàc có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;1;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $N(0;3;2)$ vàc có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;2)$.

Gọi I là giao điểm của $d_1,d_2 \Rightarrow I(1;2;4)$.

Mặt phẳng (α) chứa d_1,d_2 có $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(3;-1;-2)$ và đi qua I nên phương trình : $3x-y-2z+7=0$.

Ta thấy $A\in(\alpha)$. Vậy A,d_1,d_2 cùng thuộc mp (α).

Xác định điểm C:

Gọi (β) là mp đi qua A và vuông góc với $d_1 \Rightarrow \ (\beta): x+y+z+1=0$.

Có $C=(\beta)\cap(d_2)$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow C(-3;6;-4)$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d_2.

Kẻ $AH\perp d_2 \Rightarrow H(t;3-t;2+2t) \ \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t+2;2-t;2+2t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_2}=0 \Leftrightarrow (t+2)-(2-t)+2(2+2t)=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow H\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow A'\left(\frac{2}{3};\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Có đường thẳng BC là đường thẳng BA' đi qua C và có VTCP

$\vec{u}=\overrightarrow{CA'}=\frac{1}{3}(11;1;16)$ chọn $\vec{u}'=(11;1;16)$

Suy ra phương trình $BC:\dfrac{x+3}{11}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+4}{16}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{11}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+4}{16} \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{1} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{29}{5};\frac{34}{5};\frac{44}{5}\right).$$

Vậy $B\left(\dfrac{29}{5};\dfrac{34}{5};\dfrac{44}{5}\right);C(-3;6;-4)$.

Ví dụ 3.2.16. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng

$$d_m:\frac{x-4m+3}{2m-1}=\frac{y-2m-3}{m+1}=\frac{z-8m-7}{4m+3} \text{ với } m\notin\left\{-1;-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right\}$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn nằm trong một mặt phẳng cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Lời giải.

Đường thẳng d_m đi qua $A(4m-3;2m+3;8m+7)$ và có VTCP $\vec{u}=(2m-1;m+1;4m+3)$

Giả sử $d_m\subset(\alpha): ax+by+cz+d=0$ với mọi m, khi đó ta có:

$$\begin{cases} a(2m-1)+b(m+1)+c(4m+3)=0 \\ a(4m-3)+b(2m+3)+c(8m+7)+d=0 \end{cases} \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+4c)m-a+b+3c=0 \\ (4a+2b+8c)m-3a+3b+7c+d=0 \end{cases} \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+4c=0 \\ -a+b+3c=0 \\ 2a+b+4c=0 \\ -3a+3b+7c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=10a \\ c=-3a \\ d=-6a \end{cases},$$

Ta chọn $a=1\Rightarrow b=10, c=-3, d=-6$

Vậy $d_m\subset(\alpha): x+10y-3z-6=0$.

Ví dụ 3.2.17. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(1;1;1), B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0), D(-2;2;3)$.

1) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện và tính thể tích tứ diện ABCD.

2) Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD và cắt hai đường thẳng AC, BD lần lượt tại hai điểm M, N thỏa $\left(\dfrac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1$.

3) Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, (P) là mặt phẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D'. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết tứ diện AB'C'D' có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

1) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;-3), \overrightarrow{AC}=(1;-2;-1), \overrightarrow{AD}=(-3;1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-5;-5;5)\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=20\neq 0$

Do đó A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.

Thể tích tứ diện ABCD là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right| = \frac{10}{3}$.

2) Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1;2;5)$ nên $BD = \sqrt{30}, AC = \sqrt{6}$,

$$\overrightarrow{CD} = (-4;3;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (6;18;-10).$$

Vì (α) song song với AB, CD nên $\overrightarrow{n_\alpha} = (3;9;-5)$.

Vì MN, AB, CD lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song gồm : Mặt phẳng đi qua AB và song song với CD, mặt phẳng đi qua CD và song song với AB và mặt phẳng (α) nên theo định lý Talet đảo trong không gian ta suy ra: $\frac{BN}{BD} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{BN}{\sqrt{30}} = \frac{AM}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow BN = \sqrt{5}AM \Leftrightarrow BN^2 = 5AM^2$.

Mặt khác: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1 \Leftrightarrow AM^4 - AM^2 = BN^2 = 5AM^2 \Rightarrow AM^2 = 6$.

Ta có phương trình $AC: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow M(1+t; 1-2t; 1-t)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (t; -2t; -t) \Rightarrow AM^2 = 6 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

- Với $t = 1$, ta có $M(2;-1;0) \equiv C$ nên ta loại trường hợp này.
- Với $t = -1$, ta có $M(0;3;2)$ nên phương trình $(\alpha): 3x + 9y - 5z - 17 = 0$.

3) Ta có $G\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $A_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1} = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'}\overrightarrow{AD'}\right).$$

Vì B', C', D', G đồng phẳng nên ta có:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}\right) = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB}{AB'}.\frac{AC}{AC'}.\frac{AD}{AD'}} \Rightarrow \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}.\frac{AD'}{AD} \geq \frac{27}{64}$$

Mặt khác: $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64}V_{ABCD} = \frac{45}{32}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{3}{4}$.

Do đó: $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (\alpha)$ song song với mặt phẳng (BCD).

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (3;-1;2), \overrightarrow{BD} = (-1;2;5) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-9;-17;5)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $9x + 17y - 5z - 6 = 0$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 3.2.1. Viết phương trình mặt phẳng (α), biết:

1) (α) đi qua điểm $A(2;3;-1)$ và đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

2) (α) chứa hai đường thẳng d_1 và $d_2: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

3) (α) chứa d_1 và song song với Oy.

Hướng dẫn giải

1) Đường thẳng d_1 đi qua $B(0;1;2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-2;-2;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u_1} = (1;8;6)$.

Phương trình $(\alpha): x + 8y + 6z - 20 = 0$.

2) Đường thẳng d_2 đi qua $C(-1;2;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{BC} = (-1;1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{BC} = (1;3;1)$

Phương trình $(\alpha): x + 3y + z - 5 = 0$.

3) Oy có VTCP $\overrightarrow{k} = (0;1;0)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{k} = (-1;0;2)$

Phương trình $(\alpha): x - 2z = 0$.

Bài 3.2.2. Trong không gian Oxyz cho 4 điểm:

$A(1;1;1), B(-1;2;0), C(-2;0;-1), D(3;-1;2)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.
2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua AB và song song với CD.
3) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua AB và cách đều C, D.
4) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua BC và cách A một khoảng lớn nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1), \overrightarrow{AC} = (-3;1;2) \Rightarrow n_{ABC} = (3;7;1)$

Phương trình $(ABC): 3x+7y+z-11=0$

Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases} H\in(ABC) \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+7b+c-11=0 \\ 2a-b+c+5=0 \\ 3a-b-2c+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{72}{59} \\ b=\dfrac{127}{59} \\ c=\dfrac{-24}{59} \end{cases}$$

Vậy $H\left(-\dfrac{72}{59};\dfrac{127}{59};-\dfrac{24}{59}\right)$.

2) Ta có $\overrightarrow{CD}=(5;-1;3)\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(2;1;-3)$

Phương trình $(\alpha): 2x+y-3z=0$.

3) Phương trình (β) có dạng: $a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$

Do $B\in(\alpha)$ nên suy ra $-2a+b-c=0\Rightarrow c=-2a+b$

Nên ta viết lại phương trình (β) như sau: $ax+by+(-2a+b)z+a-2b=0$

Vì (α) cách đều C, D nên $d(C,(\alpha))=d(D,(\alpha))$

$\Leftrightarrow |a-3b|=|b|\Leftrightarrow a=4b, a=2b$

- Với $a=4b$, ta chọn $b=1\Rightarrow a=4$. Phương trình $(\beta): 4x+y-7z+2=0$
- Với $a=2b$, ta chọn $b=1\Rightarrow a=2$. Phương trình $(\beta): 2x+y-3z=0$.

4) Ta có phương trình BC: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=t \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu của A lên BC, suy ra $K(-1+t;2+2t;t)$

$\overrightarrow{AK}=(t-2;2t+1;t-1)$.

Do $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{6}\Rightarrow \overrightarrow{AK}=\left(-\dfrac{11}{6};\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P), ta có $AH=d(A,(P))$,

và $AH\le AK$ nên $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK

Phương trình $(P): 11x-4y+5z+19=0$.

Bài 3.2.3. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-2},\ d_2: \frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{4},\ d_3: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(1;2;3), B(-1;0;2)$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại C,D sao cho $CD=\sqrt{38}$.

2) Viết phương trình mặt phẳng (β) song song và cách đều hai đường thẳng d_1 và d_3.

3) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O và cắt d_2, d_3 lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN=\sqrt{14}$ đồng thời MN song song với mặt phẳng $(Q): 2x+y+z-1=0$ và $x_N<-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;-2)$, đường thẳng d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;2)$ và đường thẳng d_3 có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(1;1;1)$.

$C\in d_1\Rightarrow C(2c;-c;1-2c)$, $D\in d_2\Rightarrow D(1-2d;-1+d;-2+2d)$

$\overrightarrow{CD}=(-2x+1;x-1;2x-3)$, $x=d+c$

Suy ra $CD=\sqrt{38}\Leftrightarrow (2x-1)^2+(x-1)^2+(2x-3)^2=38$

$\Leftrightarrow 9x^2-18x-27=0\Leftrightarrow x=-1, x=3$

- Với $x=-1\Rightarrow \overrightarrow{CD}=(3;-2;-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)$

  Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(8;-13;10)$

  Phương trình $(\alpha): 8x-13y+10z-12=0$
- Với $x=3\Rightarrow \overrightarrow{CD}=(-5;2;3)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-4;11;-14)$

  Phương trình $(\alpha): 4x-11y+14z-24=0$.

2) Vì (β) song song với hai đường thẳng d_1, d_3 nên ta có

$\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_3}=(1;-4;3)$

Phương trình (β) có dạng: $x-4y+3z+m=0$

Lấy $E(0;0;1)\in d_1$, $F(-1;0;-1)\in d_3$

Vì (β) cách đều hai đường thẳng d_1, d_3 nên ta có:

$d(E,(\beta))=d(F,(\beta))\Leftrightarrow |m+3|=|m-4|\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình $(\beta): x-4y+3z+\dfrac{1}{2}=0$.

3) Ta có $M(1-2m;-1+m;-2+2m)$, $N(-1+n;n;-1+n)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(n+2m-2;n-m+1;n-2m+1)$

Do MN//(Q) nên $\overrightarrow{MN}.\vec{n}_Q = 0$

$\Leftrightarrow 2(n+2m-2)+(n-m+1)+(n-2m+1)=0 \Leftrightarrow m=2-4n$

Mặt khác: $MN=\sqrt{14} \Leftrightarrow (n+2m-2)^2+(n-m+1)^2+(n-2m+1)^2=14$

$\Leftrightarrow 155n^2-92n=0 \Leftrightarrow n=0, n=\frac{92}{155}$.

Do $x_N < -\frac{1}{2}$ nên ta có $n=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow M(-3;1;2), N(-1;0;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}=(-1;-5;1)$

Phương trình $(P): x+5y-z=0$.

Bài 3.2.4. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

1) (α) qua hai điểm $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y-z+1=0$.

2) (α) cách đều hai mặt phẳng $(\beta):\ x+2y-2z+2=0,\ (\gamma): 2x+2y+z+3=0$.

3) (α) qua hai điểm $C(-1;0;2), D(1;-2;3)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) là 2.

4) (α) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y-2z-3=0$ và khoảng cách giữa hai mặt phẳng là 3.

5) (α) đi qua $E(0;1;1)$ và $d(A,(\alpha))=2; d(B,(\alpha))=\frac{11}{7}$, trong đó $A(1;2;-1)$, $B(0;-3;2)$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-5;3), \vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right]=(8;5;11)$.

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$\vec{n}_{(\alpha)} \perp \overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right]=(8;5;11)$.

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm

$8(x-1)+5(y-2)+11(z+1)=0 \Leftrightarrow 8x+5y+11z-7=0$.

2) Gọi $M(x;y;z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α).

Ta có $d(M,(\beta))=d(M,(\gamma)) \Leftrightarrow \frac{|x+2y-2z+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+2y+z+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow |x+2y-2z+2|=|2x+2y+z+3|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y-2z+2=2x+2y+z+3 \\ x+2y-2z+2=-2x-2y-z-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+1=0 \\ 3x+4y-z+5=0 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$(\alpha):\ x+3z+1=0$ hoặc $(\alpha):\ 3x+4y-z+5=0$.

3) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1;0;2)$ nên có phương trình dạng

$A(x+1)+By+C(z-2)=0,\ A^2+B^2+C^2>0$.

Vì (α) qua $D(1;-2;3)$ nên $2A-2B+C=0 \Rightarrow C=2B-2A$ (1).

Ta có $d(O,(\alpha))=2$ nên $\frac{|A-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2$ (2).

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$5A^2-8AB-4B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=2B \\ A=-\frac{2}{5}B \end{array}\right.$. Do $A^2+B^2+C^2>0$ nên

- Nếu $A=2B$ thì chọn $B=1 \Rightarrow A=2, C=-2$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x+y-2z+6=0$.
- Nếu $A=-\frac{2}{5}B$ thì chọn $B=-5 \Rightarrow A=2, C=-14$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x-5y-14z+30=0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $2x+y-2z+6=0,\ 2x-5y-14z+30=0$.

4) (α) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y-2z-3=0$ nên có phương trình $(\alpha): x-2y-2z+D=0$. Lấy điểm $N(3;0;0) \in (Q)$.

Ta có $d((\alpha),(Q))=d(N,(\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|3+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

$\Leftrightarrow |D+3|=9 \Leftrightarrow D=6; D=-12$.

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm $x-2y-2z+6=0,\ x-2y-2z-12=0$.

5) Mặt phẳng (α) qua $E(0;1;1)$ có phương trình dạng

$Ax+B(y-1)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0$.

Theo bài ra $d(A,(\alpha))=2; d(B,(\alpha))=\frac{11}{7}$ với $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$ nên

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2 \\ \frac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{11}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |A+B-2C|=2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ (1) \\ 11|A+B-2C|=14|-4B+C|\ (2) \end{array}\right.$$

Từ (2) ta có $\left[\begin{array}{l}11(A+B-2C)=14(-4B+C)\\ 11(A+B-2C)=14(4B-C)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=\dfrac{-67B+36C}{11}\\ A=\dfrac{45B+8C}{11}\end{array}\right.$

- Với $A=\dfrac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình:

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]$$

$\Leftrightarrow 3826B^2-4432BC+1368C^2=0$ (3)

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B=C=0$, khi đó $A=0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2+B^2+C^2>0$)

- Với $A=\dfrac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]$$

$\Leftrightarrow 1362B^2+1112BC+136C^2=0 \Leftrightarrow B=-\dfrac{2}{3}C, B=-\dfrac{34}{227}C.$

+) Với $B=-\dfrac{2}{3}C$ thì chọn $C=-3 \Rightarrow B=2, A=6$ phương trình mặt phẳng (α) là $6x+2y-3z+1=0.$

+) Với $B=-\dfrac{34}{227}C$ thì chọn $C=227 \Rightarrow B=-34, A=26$ phương trình (α) là $26x-34y+227z-193=0.$ Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là

$6x+2y-3z+1=0,\ 26x-34y+227z-193=0.$

Bài 3.2.5. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-28=0$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+13}{2}; d_2: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-8}{1}$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng $d_1; d_2$.

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_1 và tạo với d_2 một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

3) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d_2 và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{93}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;1)$, bán kính $R=\sqrt{42}$

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(-5;1;-13)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;2)$

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-7;-1;8)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(3;-2;1)$

1) Vì mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên ta có:

$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(1;4;5)$

Suy ra phương trình (P) có dạng: $x+4y+5z+m=0$.

Mặt khác, (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=R$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|m-5|}{\sqrt{42}}=\sqrt{42} \Leftrightarrow |m-5|=42 \Leftrightarrow m=47, m=-37$.

Vậy phương trình (P) là: $x+4y+5z-37=0$ hoặc $x+4y+5z+47=0$.

2) Vì mặt phẳng (α) chứa d_1 nên phương trình (α) có dạng

$a(x+5)+b(y-1)+c(z+13)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+5a-b+13c=0$.

Với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ và $2a-3b+2c=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{2a+2c}{3}$.

Ta có: $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos\varphi}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, suy ra $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{|3a-2b+c|}{\sqrt{14}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow \left|3a-2.\frac{2a+2c}{3}+c\right|=\sqrt{2\left[a^2+\left(\frac{2a+2c}{3}\right)^2+c^2\right]}$$

$\Leftrightarrow (5a-c)^2=2(13a^2+8ac+13c^2) \Leftrightarrow a^2+26ab+25c^2=0$

$\Leftrightarrow a=-c, a=-25c$.

- Với $a=-c$, chọn $c=-1, a=1, b=0$. Phương trình $(\alpha): x-z-8=0$.
- Với $a=-25c$, chọn $c=-1, a=25, b=16$.

Phương trình $(\alpha): 25x+16y-z+96=0$.

3) Vì (β) chứa d_2 nên phương trình có dạng:

$$ax+by+cz+7a+b-8c=0$$

Với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ và $3a-2b+c=0 \Rightarrow c=2b-3a$.

Theo giả thiết bài toán, ta có: $d(I,(\beta))=\sqrt{42-\dfrac{124}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{|9a-2b-7c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 3|30a-16b|=\sqrt{6(10a^2-12ab+5b^2)}$$

$$\Leftrightarrow 3(15a-8b)^2=2(10a^2-12ab+5b^2) \Leftrightarrow 1340a^2-1428ab+379b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{379}{670}b,\ a=\frac{1}{2}b.$$

- Với $a=\frac{1}{2}b$, chọn $b=2, a=1, c=1$.

  Phương trình mặt phẳng (β) là: $x+2y+z+1=0$.

- Với $a=\frac{379}{670}b$, chọn $b=670, a=379, c=203$.

  Phương trình (β) là: $379x+670y+203z+1699=0$.

Bài 3.2.6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(2;0;1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=3$.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm AB ta có: $E(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB có phương trình:

$x+y-z+2=0$.

Vì $MA=MB$ nên suy ra $M\in(Q)\Rightarrow M\in(P)\cap(Q)$

Gọi $M(a;b;c)$ suy ra: $\begin{cases}2a-b-c+4=0\\ a+b-c+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3+\frac{3}{2}a\\ b=1+\frac{1}{2}a\end{cases}$

Mặt khác: $MA^2=9\Rightarrow(a-2)^2+\left(\frac{1}{2}a+1\right)^2+(\frac{3}{2}a+2)^2=9$.

Giải ra ta được $a=0, a=-\frac{6}{7}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $M(0;1;3)$, $M\left(-\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Bài 3.2.7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Hướng dẫn giải

Xét $B(a;b;c)$. Vì tam giác AOB đều nên ta có hệ:

$$\begin{cases}OA=OB\\ OA=AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=32\\ (a-4)^2+(b-4)^2+c^2=32\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-4=0\\ c^2=32-a^2-b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4-b\\ c^2=16-2b^2+8b\end{cases}$$

Mà $B\in(S)$ nên: $a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0$

$\Leftrightarrow(4-b)^2+b^2+16-2b^2+8b-4(4-b)-4b-4c=0$

Hay $c=4\Rightarrow b^2-4b=0\Rightarrow b=0, b=4$. Do đó $B(4;0;4)$ hoặc $B(0;4;4)$.

- $B(0;4;4)$, ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;16)$ nên phương trình (OAB): $x-y+z=0$.
- $B(4;0;4)$, ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;-16)$ nên phương trình (OAB): $x-y-z=0$.

Bài 3.2.8. Trong không gian hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI=4\sqrt{14}$.

Hướng dẫn giải

Ta có Δ cắt (P) tại $I(1;1;1)$.

Điểm $M(x;y;3-x-y)\in(P)\Rightarrow\overrightarrow{MI}=(1-x;1-y;x+y-2)$

Đường thẳng Δ có $\vec{a}=(1;-2;-1)$ là VTCP

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MI}.\vec{a}=0\\ MI^2=16.14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ (1-x)^2+(1-y)^2+(-2+x+y)^2=16.14\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-7\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=5\\ y=9\end{cases}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-3;-7;13)$ và $M(5;9;-11)$.

Bài 3.2.9. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC=\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-t\end{cases},t\in R$.

Thay x, y, z vào phương trình (P) ta được:

$1+2t-2t-t-2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow C(-1;-1;-1)$.

Điểm $M\in\Delta\Leftrightarrow M(1+2t;t;-2-t)\Rightarrow MC=\sqrt{6}\Leftrightarrow(2t+2)^2+(t+1)^2+(t+1)^2=6$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\Rightarrow M(1;0;-2)\Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ t=-2\Rightarrow M(-3;-2;0)\Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right.$$

Cách 2: Đường thẳng Δ có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(1;-2;1)$ là VTPT

Gọi H là hình chiếu của M lên (P), suy ra $\cos\widehat{HMC}=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|$ nên ta có

$d(M,(P))=MH=MC.\cos\widehat{HMC}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 3.2.10. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $(ABC):\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Vì $(ABC)\perp(P)\Rightarrow\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c\Rightarrow(ABC):bx+y+z-b=0$.

Mà $d(O,(ABC))=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+2}}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ (do $b>0$).

Vậy $b=c=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.2.11. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và $(Q):x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$ là VTPT, mp(Q) có $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;1)$ là VTPT.

Do $\begin{cases}(R)\perp(P)\\ (R)\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow$ mp(R) có $\overrightarrow{n_R}=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;0;-1)$ là VTPT

Suy ra $(R):x-z+m=0$.

Ta có $d(O;(R))=2\Leftrightarrow\dfrac{|m|}{\sqrt{1+0+1}}=2\Leftrightarrow m=\pm2\sqrt{2}$

Vậy $(R):x-z\pm2\sqrt{2}=0$.

Bài 3.2.12. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) thoả mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) đi qua A, B song song với CD.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;4;0)$, suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$ là VTPT của (P). Phương trình (P): $4x+2y+7z-15=0$.

Trường hợp 2: (P) đi qua A, B và cắt CD tại I, suy ra I là trung điểm của CD Do đó $I(1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=(0;-1;0)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $n=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)$.

Phương trình $(P):2x+3z-5=0$.

Vậy $(P):4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P):2x+3z-5=0$.

Bài 3.2.13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(0;0;3)$, $M(1;2;0)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AM}(1;2;-3)$ nên phương trình của AM là: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Gọi tọa độ điểm $B(a;0;0),C(b;0;0),ab\neq0$

Trọng tâm tam giác ABC là: $G\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{b}{3};1\right)$.

Vì $G \in AM$ nên $\frac{a}{3}=\frac{b}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow a=2;b=4$.

Khi đó, phương trình (P) có dạng: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$..

Bài 3.2.14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(2;5;3) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Hướng dẫn giải

- Đường thẳng d có $\vec{u}_d=(2;1;2)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A lên d

$\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2t-1;t-5;2t-1)$

Do $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0$

$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;1;4)$.

- Gọi H' là hình chiếu của A lên mp(P).

Khi đó, ta có: $AH' \le AH \Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất

$\Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow (P) \perp AH$

Suy ra $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H.

Vậy phương trình (P): $x-4y+z-3=0$.

Bài 3.2.15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(0;1;2) B(2;−2;1), C(−2;0;1).

1) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C và tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.
2) Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8)$ là một VTPT của mp(ABC). Phương trình mp(ABC): $x+2y-4z+6=0$.

Gọi H(a;b;c) là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow H \in (ABC) \Rightarrow a+2b-4c+6=0$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{CH}=(a;b-1;c-2), \overrightarrow{BH}=(a-2;b+2;c-1)$

Vì $\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-c+5=0 \\ 2a+b+c-3=0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=0;b=1;c=2$.

Vậy H(0;1;2).

2) Giả sử $M(a;b;c) \in (P) \Rightarrow 2a+2b+c-3=0$ (3)

Do $\begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MB^2=MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-4c+5=-4a+4b-2c+9 \\ -4a+4b-2c+9=4a-2c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-c=2 \\ 2a-b=1 \end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) ta tìm được: $a=2;b=3;c=-7$.

Vậy M(2;3;−7) là điểm cần tìm.

Bài 3.2.16. Tìm m,n để 3 mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:

$(P): x+my+nz-2=0$, $(Q): x+y-3z+1=0$ và $(R): 2x+3y+z-1=0$.

Khi đó hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng chung đó và tạo với (P) một góc φ sao cho $\cos\varphi=\frac{23}{\sqrt{679}}$.

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-3z+1=0 \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases}$

- Cho $z=1 \Rightarrow x=6, y=-4 \Rightarrow A(6;-4;1) \in (Q)\cap(R)$.
- Cho $z=0 \Rightarrow x=-4, y=3 \Rightarrow B(-4;3;0) \in (Q)\cap(R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A,B \in (P)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m+n=-4 \\ 3m=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Ta có: $\vec{n}=(1;2;4)$ là VTPT của (P)

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x-6)+b(y+4)+c(z-1)=0$.

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $c=-10a+7b$.

Suy ra $\vec{v}=(a;b;-10a+7b)$ là VTPT của (α)

Nên theo giả thiết ta có: $\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}$.

Suy ra $\cos\varphi=\frac{23}{\sqrt{679}} \Leftrightarrow \frac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}=\frac{23}{\sqrt{679}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{97}\left|39a-30b\right| = 23\sqrt{3\left(101a^2+50b^2-140ab\right)}$

$\Leftrightarrow 3.97\left(13a-10b\right)^2 = 23^2\left(101a^2-140ab+50b^2\right)$

$\Leftrightarrow 85a^2+32ab-53b^2=0 \Leftrightarrow a=-b, a=\frac{53}{85}b$.

- Với $a=-b$, ta chọn $b=-1 \Rightarrow a=1, c=-17$.

  Phương trình $(\alpha): x-y-17z+7=0$

- Với $a=\frac{53}{85}b$, ta chọn $b=85 \Rightarrow a=53, c=65$.

  Phương trình $(\alpha): 53x+85y+65z-43=0$.

Bài 3.2.17. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$ và điểm $M(0;3;-2)$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và Δ.
2. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, song song với Δ và cách Δ một khoảng bằng 3.

Hướng dẫn giải

1. Đường thẳng Δ đi qua $A(0;0;1)$, VTCP $\vec{u}=(1;1;4)$.

   Ta có $\overrightarrow{AM}=(0;3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=(15;-3;-3)$. Suy ra $\vec{n}=(5;-1;-1)$ là một VTPT của (α).

   Phương trình $(\alpha): 5x-y-z+1=0$.

2. Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là một VTPT của (β), phương trình (β):

   $ax+by+cz-3b+2c=0$.

   Vì $(\beta)//\Delta$ nên $\vec{n}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow a+b+4c=0 \Rightarrow a=-b-4c$

   $d(\Delta,(\alpha))=3 \Leftrightarrow d(A,(\alpha))=3 \Leftrightarrow \frac{|3c-3b|}{\sqrt{(b+4c)^2+b^2+c^2}}=3$

   $\Leftrightarrow |c-b|=\sqrt{2b^2+8bc+17c^2} \Leftrightarrow b^2+10bc+16c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2c \\ b=-8c \end{array}\right.$.

- Với $b=-2c$, ta chọn $c=1 \Rightarrow b=-2, a=-2$.

  Phương trình $(\beta): 2x+2y-z-8=0$

- Với $b=-8c$, ta chọn $c=1 \Rightarrow b=-8, a=4$.

  Phương trình $(\beta): 4x-8y+z+26=0$.

Bài 3.2.18. Trong không gian Oxyz cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Viết phương trình mặt phẳng (α) biết:

1. Tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất
2. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình $(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do (α) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ (*).

1. Ta có thể tích tứ diện OABC là: $V=\frac{1}{6}abc$

   Mặt khác, từ (*) ta suy ra: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow abc \ge 6.27 \Rightarrow V \ge 27$

   Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}$.

   Vậy phương trình $(\alpha): \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

2. Gọi $h=d(O,(\alpha))$.

   Vì OABC là tứ diện vuông tại O nên $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

   Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

   $1=\left(\frac{1}{a}+2\frac{1}{b}+3\frac{1}{c}\right)^2 \le (1+4+9)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{h^2}\ge\frac{1}{14} \Rightarrow h \le \sqrt{14}$

   Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=7 \\ c=\frac{14}{3} \end{cases}$.

   Phương trình $(\alpha): \frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Bài 3.2.19. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d_m có phương trình

$$\frac{x-3m-1}{2m}=\frac{y-1}{1-m}=\frac{z-6m}{3m+1},\ m\notin\left\{0;1;-\frac{1}{3}\right\}$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng d_m luôn nằm trong một mặt phẳng (α) cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_m đi qua $A(3m+1;1;6m)$

và có VTCP $\vec{u}=(2m;1-m;1+3m)$.

Xét mặt phẳng cố định $(\alpha): ax+by+cx+d=0$ chứa d_m.

Khi đó: $\begin{cases}A\in(\alpha)\\ \vec{n_\alpha}.\vec{u}=0\end{cases},\forall m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a(3m+1)+b+c.6m+d=0\\ a.2m+b(1-m)+c(1+3m)=0\end{cases},\forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3a+6c)m+a+b+d=0\\ (2a-b+3c)m+b+c=0\end{cases},\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a+6c=0\\ a+b+d=0\\ 2a-b+3c=0\\ b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2c\\ b=-c\\ d=3c\end{cases}.\ \text{Chọn } c=-1\Rightarrow a=2,b=1,d=-3$$

Vậy d_m luôn nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z-3=0$.

Bài 3.2.20. Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A(1;1;–1), B(1;1;2), C(–1;2;–2) và mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y+2z+1=0$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$. Viết phương trình mặt phẳng (α).

Hướng dẫn giải

Gọi mặt phẳng (α) có phương trình là $ax+by+cz+d=0$ với $a;b;c$ không cùng bằng 0

Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;-1)$ nên ta có : $a+b-c+d=0$ (1)

Vì $(\alpha)\perp mp(P): x-2y+2z+1=0$ nên $a-2b+2c=0$ (2)

$IB=2IC$ nên suy ra khoảng cách từ B tới $mp(\alpha)$ bằng 2 lần khoảng cách từ C tới (α).

$$\Rightarrow\frac{|a+b+2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\frac{|-a+2b-2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a-3b+6c-d=0\\ -a+5b-2c+3d=0\end{array}\right.\quad(3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau :

- $\begin{cases}a+b-c+d=0\\ a-2b+2c=0\\ 3a-3b+6c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{-1}{2}a\\ c=-a\\ d=\frac{-3}{2}a\end{cases}$ chọn $a=2\Rightarrow b=-1;c=-2;d=-3$.

Ta có phương trình mp (α) là $2x-y-2z-3=0$.

- $\begin{cases}a+b-c+d=0\\ a-2b+2c=0\\ -a+5b-2c+3d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{3}{2}a\\ c=a\\ d=\frac{-3}{2}a\end{cases}$ chọn $a=2\Rightarrow b=3;c=2;d=-3$.

Ta có phương trình mp (α) là $2x+3y+2z-3=0$.

Vậy tìm được 2 mp (α) là $2x-y-2z-3=0$ hoặc $2x+3y+2z-3=0$.

Bài 3.2.21. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) : $\begin{cases}x=t\\ y=-2+t\\ z=-6+2t\end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ là đường tròn có bán kính $r=1$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua $A(0;-2;-6)$ và có $\vec{u}=(1;1;2)$ là VTCP.

Phương trình (P) có dạng: $ax+by+cz+2b+6c=0$

Vì $d\subset(P)$ nên $\vec{u}.\vec{n_P}=0\Leftrightarrow a+b+2c=0\Rightarrow a=-b-2c$.

Mặt phẳng (P) có dạng: $(b+2c)x-by-cz-2b-6c=0$

Mặt cầu (S) có tâm I(-1; 1; -1), bán kính R = 2.

(P) cắt (S) theo một đường tròn giao tiếp (C) có bán kính r = 1

$$\Leftrightarrow d(I;P)=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|-b-2c-b+c-2b-6c|}{\sqrt{(b+2c)^2+b^2+c^2}}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow|-4b-7c|=\sqrt{3}.\sqrt{2b^2+5c^2+4bc}\Leftrightarrow 5b^2+22bc+17c^2=0.$$

Cho $c=1\Rightarrow 5b^2+22b+17=0\Leftrightarrow b=-1$ hay $b=-\frac{17}{5}$.

Vậy, có 2 mặt phẳng (P): $\left[\begin{array}{l}(P_1): x+y-z-4=0\\(P_2): 7x-17y+5z-4=0\end{array}\right.$.

Bài 3.2.22. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của (α) và mặt phẳng (xOy) và (P) tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (xOy): $z=0$

Phương trình mặt phẳng (P) thuộc chùm xác định bởi (α) và (xOy) có dạng: $m(2x-y+z-5)-nz=0 \Leftrightarrow (P): 2mx-my+(m+n)z-5m=0$

Giao điểm A, B, C của (P) và 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ:

$A\left(\frac{5}{2};0;0\right)$, $B(0;-5;0)$, $C\left(0;0;\frac{5m}{m+n}\right)$

Thể tích tứ diện OABC bằng

$$\frac{125}{36} \Leftrightarrow V=\frac{1}{6}.OA.OB.OC=\frac{1}{6}\frac{5}{2}.5.\left|\frac{5m}{m+n}\right|=\frac{125}{36}$$

$$\Leftrightarrow |m+n|=3|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m+n=3m\\m+n=-3m\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=1,\ n=2\\m=1,\ n=-4\end{array}\right.$$

Vậy, có 2 phương trình mặt phẳng (P):

$$\left[\begin{array}{l}(P_1): 2x-y+3z-5=0\quad (m=1;\ n=2)\\(P_2): 2x-y-3z-5=0\quad (m=1;\ n=-4)\end{array}\right.$$

Bài 3.2.23. Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$

Trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm B', C', D' thỏa:

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4.$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (B'C'D') biết tứ diện AB'C'D' có thể tích lớn nhất.

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD cắt AC, BD lần lượt tại M và N thỏa $AM+BN=6$.

Hướng dẫn giải

1) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}} \Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}$$

Suy ra $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}\Rightarrow V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}$.

Do đó $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}$.

Hay mặt phẳng (B'C'D') // (BCD).

$\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2), \overrightarrow{BD}=(-2;3;2)\Rightarrow \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(4;10;-11)$

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_{B'}-1=\frac{3}{4}\\y_{B'}-1=-\frac{3}{4}\\z_{B'}-1=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$$

Vậy phương trình mặt phẳng (B'C'D') là:

$$4x+10y-11z+\frac{39}{4}=0.$$

2) Từ giả thiết, áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BD}\Rightarrow BM=2AN\Rightarrow AN=2$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N-1=-\frac{4}{3}\\y_N-1=-\frac{4}{3}\\z_N-1=-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow N\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Mà $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-8;-3;5)$,

Phương trình $(\alpha): 8x+3y-5z+\frac{16}{3}=0$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để lập phương trình đường thẳng Δ, ta cần tìm một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ mà Δ đi qua và một VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}(a;b;c)$. Khi đó phương trình của Δ có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

1. Các dạng toán về viết phương trình đường thẳng

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B

Ta có $\overrightarrow{AB}$ là VTCP và A là điểm đi qua.

Ví dụ 3.3.1. Trong không gian Oxyz cho ba điểm

$$A(1;1;1),\ B(-2;0;0),\ C(0;3;-2).$$

1) Viết phương trình đường thẳng AB.

2) Viết phương trình đường thẳng trung tuyến AM của tam giác ABC.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;-1)$ là VTCP của đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

2) Vì M là trung điểm AB nên $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là VTCP của AM.

Phương trình $AM: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và Δ//d hoặc Δ ⊥ (α)

Ta có $\overrightarrow{u_d}$ là VTCP của Δ hoặc $\overrightarrow{n_\alpha}$ là VTCP của Δ.

Ví dụ 3.3.2. Viết phương trình đường thẳng Δ biết:

1) Δ đi qua $A(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

2) Δ đi qua $B(2;3;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 3z + 1 = 0$.

Lời giải.

1) Đường thẳng d có $\vec{u} = (2;-1;3)$ là VTCP.

Vì Δ//d nên $\vec{u} = (2;-1;3)$ là VTCP của đường thẳng Δ.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$.

2) Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (2;1;-3)$ là VTPT.

Vì $\Delta \perp (\alpha)$ nên $\vec{n} = (2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng Δ.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-3}$.

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt

$$d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

- *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt* d *và vuông góc với* d'.

Gọi $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt, z_0 + ct)$. Dựa vào $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_{d'}} = 0$ ta tìm được t.

Ví dụ 3.3.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$$

1) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;0;2)$ cắt d_1 và vuông góc với d_2.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $B(1;2;-4)$ cắt d_2 và vuông góc với d_1.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1} = (1;2;-1)$ là VTCP, đường thẳng d_2 có $\overrightarrow{u_2} = (1;2;2)$ là VTCP.

1) Gọi $M = \Delta \cap d_1$, suy ra $M(1+t;-1+2t;-t)$. Do đó $\overrightarrow{AM} = (t;2t-1;-t-2)$.

Vì $\Delta \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow t + 2(2t-1) + 2(-t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;3;-4)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

2) Gọi $N = \Delta \cap d_2$, suy ra $N(2+t;2t;-3+2t)$. Do đó $\overrightarrow{BM} = (t+1;2t-2;2t+1)$.

Vì $\Delta \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow t + 1 + 2(2t-2) - (2t+1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$.

- *Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt d và song song với (α).*

Gọi $M=\Delta\cap d\Rightarrow M(x_0+at;y_0+bt,z_0+ct)$. Dựa vào $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$ ta tìm được t.

Ví dụ 3.3.4. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-y+4z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;1)$ cắt d và song song với (α).

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}=(1;-1;4)$ là VTPT.

Gọi $M=\Delta\cap d\Rightarrow M(4-3t;-2t;1-t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3-3t;-2t-2;-t)$.

Vì $\Delta//(\alpha)$ nên ta có

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 3-3t+2t+2-4t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(0;-4;-1)$.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=2-4t,\ t\in\mathbb{R}.\\z=1-t\end{cases}$

- *Viết phương trình đường thẳng Δ đi nằm trong (α) cắt d và vuông góc (hoặc cắt) d'.*

Gọi $M=\Delta\cap d\Rightarrow M=d\cap(\alpha)$, suy ra tọa độ M. $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_{d'}}$

Ví dụ 3.3.5. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-z+1=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

1) Viết phương trình đường thẳng d đi nằm trong (α) cắt d_1 và vuông góc với d_2.
2) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) cắt d_1 và d_2.

Lời giải.

1) Gọi $A=d_1\cap d\Rightarrow A(-1+2t;1+t;2-t)$.

Vì $d\subset(\alpha)$

nên $A\in(\alpha)\Rightarrow 2(2t-1)-(1+t)-(2-t)+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow A(1;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_{d_2}}=(-3;-5;-1)$.

Phương trình $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{1}$.

2) Gọi $B=d\cap d_2\Rightarrow B(1+t;3-t;1+2t)$.

Vì $d\subset(\alpha)$ nên $B\in(\alpha)$

hay $2(1+t)-(3-t)-(1+2t)+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;2;3)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=(1;0;2)$. Phương trình $AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=1+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

- *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d và d'.*

Gọi $A=\Delta\cap d$, $B=\Delta\cap d'$. Tham số hóa hai điểm A, B theo t và t'. Dựa vào A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$ ta tìm được t, t'.

Ví dụ 3.3.6. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=-t\end{cases}\text{ và }d':\begin{cases}x=4-3t'\\y=3-t'\\z=-2+4t'\end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(-1;4;-6)$ đồng thời cắt cả hai đường thẳng d và d'.

Lời giải.

Gọi $M=\Delta\cap d, N=\Delta\cap d'$, ta có $M(1+t;-1+2t;-t)$, $N(4-3t';3-t';-2+4t')$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(t+2;2t-5;-t+6)$, $\overrightarrow{AN}=(5-3t';-1-t'4+4t')$.

Vì A, M, N thẳng hàng

nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AN}\Rightarrow\begin{cases}t+2=5k-3kt'\\2t-5=-k-kt'\\-t+6=4k+4kt'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-5k+3kt'=-2\\2t+k+kt'=5\\t+4k+4kt'=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow t=2,k=\frac{7}{8},kt'=\frac{1}{8}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(4;-1;4)$.

Phương trình $\Delta:\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+6}{4}$.

- *Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d, d' và vuông góc với (P) hoặc song song với d_1.*

Gọi $A=\Delta\cap d$, $B=\Delta\cap d'$. Tham số hóa hai điểm A, B theo t và t'.

Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ (hoặc $\overrightarrow{u_{d_1}}$) ta tìm được t, t'.

Ví dụ 3.3.7. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=1-2t\\y=2+t\\z=3+2t\end{cases}\text{ và } d':\begin{cases}x=2-3t'\\y=1+t'\\z=-1+2t'\end{cases}.$$

1) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d,d' và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): y+4z-2=0$.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d,d' và song song với đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{4}$.

Lời giải.

1) Gọi $A=\Delta\cap d, B=\Delta\cap d'$, suy ra

$A(1-2t;2+t;3+2t)$, $B(2-3t';1+t';-1+2t')$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2t-3t'+1;-t+t'-1;-2t+2t'-4)$.

Vì $\Delta\perp(\alpha)$ nên

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{n_\alpha}\Rightarrow\begin{cases}2t-3t'+1=0\\-t+t'-1=k\\-2t+2t'-4=4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-3t'=-1\\t-t'+k=-1\\t-t'+2k=-2\end{cases}\Leftrightarrow t=1,t'=1,k=-1$$

Do đó $A(-1;3;5)$, $\overrightarrow{AB}=(0;-1;-4)$. Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-1\\y=3-t\\z=5-4t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2) Gọi $A=\Delta\cap d, B=\Delta\cap d'$, suy ra

$A(1-2t;2+t;3+2t)$, $B(2-3t';1+t';-1+2t')$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2t-3t'+1;-t+t'-1;-2t+2t'-4)$.

Vì $\Delta // d_1$ nên

$$\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{u_{d_1}}\Rightarrow\begin{cases}2t-3t'+1=-2k\\-t+t'-1=k\\-2t+2t'-4=4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-3t'+2k=-1\\t-t'+k=-1\\t-t'+2k=-2\end{cases}\Leftrightarrow t=-1,t'=-1,k=-1.$$

Do đó $A(3;1;1)$, $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-4)$. Phương trình $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

- *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và tạo với d' một góc φ.*

Gọi $B=\Delta\cap d$, tham số hóa tọa độ B theo t. Dựa vào $\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_{d'}}\right)\right|=\cos\varphi$ ta tìm được t.

Ví dụ 3.3.8. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}, d':\begin{cases}x=1-t'\\y=2+3t'\\z=-1+t'\end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;0)$, cắt d và tạo với d' một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{7}{3\sqrt{11}}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{u_{d'}}=(-1;3;1)$.

Gọi $B=\Delta\cap d\Rightarrow B(t;1-2t;2+3t)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t-1;-2t;3t+2)$

Vì Δ tạo với d' một góc φ nên ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_{d'}}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d'}}\right|}\Leftrightarrow\frac{7}{3\sqrt{11}}=\frac{|-t+1-6t+3t+2|}{\sqrt{11}.\sqrt{(t-1)^2+4t^2+(3t+2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{14t^2+10t+5}=3|4t-3|\Leftrightarrow 49\left(14t^2+10t+5\right)=9\left(16t^2-24t+9\right)$$

$$\Leftrightarrow 542t^2+706t+164=0\Leftrightarrow t=-1, t=-\frac{82}{271}.$$

- Với $t=-1$, ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;-1)$. Phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.
- Với $t=-\dfrac{82}{271}$, ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{353}{271};\dfrac{164}{271};\dfrac{296}{271}\right)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{-353}=\dfrac{y-1}{164}=\dfrac{z}{296}$.

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với hai vecto không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{u_\Delta}=\vec{a}\wedge\vec{b}$.

- *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với hai đường thẳng d và d'(Hoặc song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).*

Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{u_d}\wedge\overrightarrow{u_{d'}}$ (hoặc $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}$).

Ví dụ 3.3.9. Viết phương trình đường thẳng Δ biết Δ

1) Đi qua $A(1;2;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-2t\\ z=3+2t\end{cases},\quad d_2:\begin{cases}x=4-3t'\\ y=2+t'\\ z=3-t'\end{cases}.$$

2) Đi qua $B(-1;0;1)$ và song song với hai mặt phẳng

$(\alpha): x+z-1=0,\ (\beta): 3x+y-2z-1=0$.

3) Đi qua $C(2;2;-1)$ vuông góc với d_1 và song song với (β).

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{u_2}=(-3;1;-1)$ là VTCP của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Vì Δ vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 nên $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(0;-5;-5)$.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1\\ y=2+t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1+t\end{cases}$.

2) Ta có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(3;1;-2)$.

Vì Δ song song với hai mặt phẳng (α) và (β) nên $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-1;5;1)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{1}$.

3) Vì Δ vuông góc với d_1 và song song với (β) nên ta có

$\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(2;8;7)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z+1}{7}$.

- *Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).*

  Lấy điểm $M\in(\alpha)\cap(\beta)\Rightarrow M\in\Delta$ và $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}$

Ví dụ 3.3.10. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$, $(Q): 2x+y-1=0$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau. Viết phương trình đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_Q}=(2;1;0)$.

Vì $\overrightarrow{n_P}\neq k\overrightarrow{n_Q}$ nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

Vì d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên :

$\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;-1)$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x+y-z-3=0\\ 2x+y-1=0\end{cases}$,

cho $x=0\Rightarrow y=1, z=-2\Rightarrow A(0;1;-2)\in d$.

Phương trình $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Dạng 5: Viết phương trình đường vuông góc chung d của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Gọi $M=d\cap a, N=d\cap b$. Tham số hóa tọa độ của M, N theo t và t′.

Dựa vào hệ $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_a}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_b}=0\end{cases}$ để xác định t và t′.

Ví dụ 3.3.11. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng chéo nhau

$a:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1},\ b:\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$.

Viết phương trình đường vuông góc chung của a và b.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=(1;-1;-1)$, $\vec{b}=(-1;-2;4)$ là VTCP của hai đường thẳng a và b.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b với $M\in a, N\in b$.

Ta có $M(1+a;2-a;1-a)$, $N(4-b;2-2b;1+4b)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-a-b+3;a-2b;a+4b)$

Vì MN vuông góc với a và b nên ta có:

$$\begin{cases}\vec{a}.\overrightarrow{MN}=0\\ \vec{b}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-a-b+3)-(a-2b)-(a+4b)=0\\ -(-a-b+3)-2(a-2b)+4(a+4b)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a+7b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow M(4;2;1),\overrightarrow{MN}=(2;1;1).$$

Phương trình $MN:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

2) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) khi và chỉ khi $\vec{n}.\vec{u}\neq 0$, hay $Aa+Bb+Cc\neq 0$.

Tọa độ giao điểm M thỏa mãn

+) $M\in\Delta$ nên $M(x_0+at;\,y_0+bt;\,z_0+ct)$.

+) $M\in(\alpha)$ nên $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$.

Ta tìm được t từ đó suy ra tọa độ của M.

- Đường thẳng Δ song song mặt phẳng (α) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}.$$

- Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ M\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$$

Ví dụ 3.3.12. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp(α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có.

1) $d:\begin{cases}x=12+4t\\ y=9+3t\\ z=1+t\end{cases};\quad (\alpha):3x+4y-z-2=0.$

2) $d:\dfrac{x+10}{-3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{-1};\quad (\alpha):y+4z+17=0.$

3) $d:\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3};\quad (\alpha):x+2y-4z+1=0.$

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{u_d}=(4;3;1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;4;-1)$.

Vì $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=23\neq 0$ nên d và (α) cắt nhau.

Thay $x=12+4t, y=9+3t, z=1+t$ vào phương trình (α) ta có

$3(12+4t)+4(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow 23t+69=0\Leftrightarrow t=-3$

Vậy d và (α) cắt nhau tại $M(0;0;-2)$.

2) Ta có $\overrightarrow{u_d}=(-3;4;-1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(0;1;4)$. Suy ra $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$.

Mặt khác $A(-10;4;1)\in d$ mà $A\notin(\alpha)$ nên $d//(\alpha)$.

3) Ta có $\overrightarrow{u_d}=(8;2;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;-4)$. Suy ra $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$.

Mặt khác $A(13;1;4)\in d$ và $A\in(\alpha)$ nên $d\subset(\alpha)$.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Xét hai đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t_1\\ y=y_1+b_1t_1,(t_1\in R),\\ z=z_1+c_1t_1\end{cases}\quad \Delta_2:\begin{cases}x=x_2+a_2t_2\\ y=y_2+b_2t_2\ \ (t_2\in R)\\ z=z_2+c_2t_2\end{cases}$$

Δ_1 qua điểm $M_1(x_1;y_1;z_1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1(a_1;b_1;c_1)$.

Δ_2 qua điểm $M_2(x_2;y_2;z_2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2(a_2;b_2;c_2)$.

- Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cách 1:

- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].M_1M_2\neq 0$.
- Δ_1 và Δ_2 đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].M_1M_2=0$.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2].M_1M_2=0\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}\end{cases}$.
- Δ_1 và Δ_2 song song khi và chỉ khi $\begin{cases}M_1\notin\Delta_2\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\end{cases}$.
- Δ_1 và Δ_2 trùng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}M_1\in\Delta_2\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\end{cases}$.

Cách 2:

- Nếu $\vec{u}_1=k.\vec{u}_2$ và $M_1\in\Delta_2$ thì hai đường thẳng trùng nhau.
- Nếu $\vec{u}_1=k.\vec{u}_2$ và $M_1\notin\Delta_2$ thì hai đường thẳng song song.
- Nếu $\vec{u}_1\neq k.\vec{u}_2$ thì xét hệ phương trình $\begin{cases}x_1+a_1t_1=x_2+a_2t_2\\ y_1+b_1t_1=y_2+b_2t_2\\ z_1+c_1t_1=z_2+c_2t_2\end{cases}$. Khi đó có hai trường hợp: Hệ vô nghiệm thì hai đường thẳng chéo nhau, hệ có nghiệm duy nhất thì hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ 3.3.13. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau

1) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

2) $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$ và $d_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+6}{1}$.

3) $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ và $d_2:\dfrac{2x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

1) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;3;0)$ và có $u_1=(2;-1;-2)$ là VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-1;1;-2)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;3)$ là VTCP.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2;-2;-2)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;0)\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)=6\neq 0$.

Suy ra d_1 và d_2 chéo nhau.

2) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;2;-3)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;2)$ là VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-3;5;-6)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(3;-1;1)$ là VTCP.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4;3;-3)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(0;5;5)\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)=0$

và $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\neq\vec{0}$.

Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau.

3) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;-2;-1)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;2)$ là VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2\left(-\frac{1}{2};1;2\right)$ và có $u_2=(-1;2;-2)$ là VTCP.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(-\frac{3}{2};3;3\right)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(0;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)=0$

và $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=\vec{0}$.

Mặt khác $M_1\notin d_2$ nên suy ra d_1 và d_2 song song với nhau.

4. Bài toán liên quan đến khoảng cách

+) Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến đường thẳng Δ_1:

$$d(M,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_1},\vec{u}_1\right]\right|}{\left|\vec{u}_1\right|}.$$

+) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song:

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=d(M_2,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_2M_1},\vec{u}_1\right]\right|}{\left|\vec{u}_1\right|}.$$

Ví dụ 3.3.14. Tính các khoảng cách sau

1) Khoảng cách từ $A(3;2;1)$ đến đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$.

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng

$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ và $\Delta_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{4}$.

3) Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-4y+2z+1=0$.

Lời giải.

1) Ta có $M(-1;2;0)\in\Delta$ và $\vec{u}=(2;3;1)$ là VTCP của Δ

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(-4;0;-1)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=(3;2;-12)$

Do đó $d(A,\Delta)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{3^2+2^2+(-12)^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\sqrt{\frac{157}{14}}$.

2) Ta có Δ_1 đi qua $M_1(1;-1;-2)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;3)$ là VTCP.

Δ_2 đi qua $M_2(2;1;3)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;4)$ là VTCP.

Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;2;5)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(2;-5;-3)\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)=-23\neq 0$.

Do đó hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Vậy $d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{23}{\sqrt{38}}$.

3) Đường thẳng Δ đi qua $M(1;1;-2)$ và $\vec{u}=(-2;1;3)$ là VTCP.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}=(1;-4;2)$ là VTPT.

Ta có $\vec{u}.\vec{n}=0$ và $M\notin(\alpha)$ nên $\Delta//(\alpha)$.

Suy ra $d(\Delta,(\alpha))=d(M,(\alpha))=\frac{|1-4-4+1|}{\sqrt{1+16+4}}=\frac{6}{\sqrt{21}}$.

5. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d thỏa tính chất T

Tham số hóa tọa độ điểm M theo t. Dựa vào tính chất T ta tìm được t.

Chú ý: $M\in d:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

Ví dụ 3.3.15. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng

$\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-1}$ và điểm $A(4;3;2)$.

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM=\sqrt{105}$.

2) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua Δ.

3) Tìm tọa độ điểm D thuộc Δ sao cho khoảng cách từ D đến $(\alpha): x-2y+2z+2=0$ bằng 1.

Lời giải.

1) Ta có $M\in\Delta$ nên $M(1+2t;-1-3t;2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2t-3;-3t-4;-t)$

Do đó $AM=\sqrt{105}\Leftrightarrow AM^2=105\Leftrightarrow(2t-3)^2+(3t+4)^2+t^2=105$

$\Leftrightarrow 14t^2+12t-80=0\Leftrightarrow t=2, t=-\dfrac{20}{7}$.

Vậy có 2 điểm M thỏa yêu cầu bài toán là: $M(5;-7;0)$ và $M\left(-\dfrac{33}{7};\dfrac{53}{7};\dfrac{34}{7}\right)$.

2) Gọi H là hình chiếu của A lên Δ.

Ta có $H\in\Delta$ nên $H(1+2t;-1-3t;2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2t-3;-3t-4;-t)$

Vì $AH\perp\Delta$ nên :

$\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{AH}=0\Leftrightarrow 2(2t-3)-3(-3t-4)-(-t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{7}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{17}{7}\right)$.

Do H là trung điểm của AA' nên $A'\left(-\dfrac{26}{7};-\dfrac{17}{7};\dfrac{20}{7}\right)$.

3) Ta có $D\in\Delta$ nên $D(1+2t;-1-3t;2-t)$

Suy ra $d(D,(\alpha))=\dfrac{|1+2t-2(-1-3t)+2(2-t)+2|}{3}=|2t+3|$.

Do đó $d(D,(\alpha))=1\Leftrightarrow|2t+3|=1\Leftrightarrow t=-1, t=-2$.

Vậy $D(-1;2;3)$ hoặc $D(-3;5;4)$.

6. Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 3.3.16. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-2}\ \text{và}\ d_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

1) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại M, N thỏa $MN=3\sqrt{3}$ và MN song song với mp$(\alpha): x-2y+3z=0$.

2) Viết phương trình đường thẳng d đi qua O và cắt d_2 tại A sao cho mặt cầu tâm A và đi qua O tiếp xúc với mặt phẳng $(\beta): 5x+y-4z-16=0$.

Lời giải.

1) Vì $M\in d_1, N\in d_2$ nên suy ra $M(1+m;-1+2m;-2m)$, $N(3+2n;-3+n;2-n)$

Do đó $\overrightarrow{MN}=(2n-m+2;n-2m-2;-n+2m+2)$.

Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases}MN^2=27\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2n-m+2)^2+2(n-2m-2)^2=27\\ 2n-m+2-2(n-2m-2)+3(-n+2m+2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n=3m+4\\(5m+10)^2+2(m+2)^2=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}\ \text{v}\ \begin{cases}m=-3\\n=-5\end{cases}.$$

- $\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$, suy ra $M(0;-3;2), \overrightarrow{MN}=(5;-2;1)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

- $\begin{cases}m=-3\\n=-5\end{cases}$, suy ra $M(-2;-7;6), \overrightarrow{MN}=(-5;-1;1)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y+7}{-1}=\dfrac{z-6}{1}$.

2) Ta có $A\in d_2$ nên $A(3+2a;-3+a;2-a)$

Vì mặt cầu tâm A đi qua O tiếp xúc với (β) nên ta có : $OA=d(A,(\beta))$

Mà $OA^2=(3+2a)^2+(a-3)^2+(a-2)^2=6a^2+2a+22$

$d(A,(\beta))=\dfrac{|15a-12|}{\sqrt{42}}$ nên ta có :

$6a^2+2a+22=\dfrac{(15a-12)^2}{42}\Leftrightarrow 9a^2+148a+260=0\Leftrightarrow a=-2, a=-\dfrac{130}{9}$.

- Với $a=-2$, suy ra $A(-1;-5;4)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{OA}=(-1;-5;4)$

Phương trình $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-4}$.

- Với $a=-\dfrac{130}{9}$, suy ra $A\left(-\dfrac{233}{9};\dfrac{157}{9};\dfrac{148}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=-9\overrightarrow{OA}=(233;157;-148)$.

Phương trình $d:\dfrac{x}{233}=\dfrac{y}{157}=\dfrac{z}{-148}$.

Ví dụ 3.3.17. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2},\ \Delta_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua O, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2.

Lời giải.

1) Ta dễ dàng chứng minh được Δ_1,Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Ta có $\Delta \cap \Delta_1 = A(2-a;-1+a;2a)$, $\Delta \cap \Delta_2 = B(3+2b;2-b;-1-b)$.

Do đó một véc tơ chi phương của Δ là:

$\overrightarrow{AB}(1+2b+a;3-b-a;-1-b-2a)$.

Vì $\begin{cases}\Delta \perp \Delta_1\\ \Delta \perp \Delta_2\end{cases}$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{\Delta_1}\\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{\Delta_2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_1} = 0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_2} = 0\end{cases}$, do đó

$$\begin{cases}-1-2b-a+3-b-a-2-2b-2a=0\\ 2+4b+2a-3+b+a+1+b+2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+5b=0\\ 5a+6b=0\end{cases}$$

Do đó $a=0, b=0$ nên $A(2;-1;0)$, $B(3;2;-1)$, $\overrightarrow{AB}(1;3;-1)$.

Phương trình đường vuông góc chung cần tìm là $\begin{cases}x=2+t\\ y=-1+3t\ (t \in R).\\ z=-t\end{cases}$

2) Gọi $M = \Delta \cap \Delta_1 \Rightarrow M(2-m;-1+m;2m) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (2-m;-1+m;2m)$

Vì $\Delta \perp \Delta_2$ nên $\overrightarrow{MO}.\vec{u}_{\Delta_2} = 0 \Leftrightarrow 2(2-m)-(-1+m)-2m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Suy ra $u_\Delta = \overrightarrow{OM} = (1;0;2)$.

Phương trình $\Delta: \begin{cases}x=t\\ y=0\ , t \in \mathbb{R}\ .\\ z=2t\end{cases}$

Ví dụ 3.3.18. Trong không gian toạ độ Oxyz cho các điểm $A(8;2;0)$, $B(3;-13;-5)$, $C(-3;3;5)$, $D(2;-2;0)$. Gọi H là điểm trên đoạn CD mà $3HD = 2HC$ và P, Q thứ tự là trung điểm của AD, BC. Tìm toạ độ điểm M trên đường thẳng AB sao cho các đường thẳng HM, PQ cắt nhau.

Lời giải.

Gọi $H(x;y;z)$

Ta có $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases}x-2=3\\ y+2=-3\\ z=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=-5\\ z=-3\end{cases} \Rightarrow H(5;-5;-3)$.

Vì P,Q là trung điểm AD, BC nên $P(5;0;0)$, $Q(0;-5;0)$.

$\overrightarrow{HP} = (0;5;3)$, $\overrightarrow{HQ} = (-5;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{HP} \wedge \overrightarrow{HQ} = (15;-15;25)$

Phương trình $(HPQ): 3x-3y+5z-15=0$.

$\overrightarrow{AB} = (-5;-15;-5)$, phương trình $AB: \begin{cases}x=8+t\\ y=2+3t\ .\\ z=t\end{cases}$

Vì $M \in AB$ nên $M(8+t;2+3t;t)$

HM và PQ cắt nhau thì $M \in (HPQ)$ hay

$3(8+t)-3(2+3t)+5t-15=0 \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow M(11;11;3)$

Suy ra $\overrightarrow{HM} = (6;16;6)$, $\overrightarrow{PQ} = (-5;-5;0) \Rightarrow \overrightarrow{HM} \neq k.\overrightarrow{PQ}$

Do đó HM và PQ cắt nhau.

Vậy $M(11;11;3)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.3.19. Trong không gian toạ độ Oxyz cho điểm $M(4;3;1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+3=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với d và cách M một khoảng bé nhất.

Lời giải.

Cách 1. Đường thẳng d có $\vec{u} = (-2;3;-1)$ là VTCP.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n} = (1;2;-1)$ là VTPT.

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên $\overrightarrow{u'} = \vec{n} \wedge \vec{u} = (1;3;7)$ là VTCP của Δ.

Gọi $N(a;b;c)$ là một điểm thuộc Δ, ta có $N \in (\alpha) \Rightarrow a+2b-c+3=0$ (1)

$\overrightarrow{MN} = (a-4;b-3;c-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{u'} = (7b-3c-18;-7a+c+27;3a-b-9)$

Suy ra $d(M,\Delta) = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{u'}\right|}{\left|\overrightarrow{u'}\right|}$

Mà $\left|\overrightarrow{u'}\right|$ không đổi nên $d(M,\Delta)$ nhỏ nhất khi và chi khi $\left|\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{u'}\right|$ nhỏ nhất

Hay $P = (7b-3c-18)^2 + (7a-c-27)^2 + (3a-b-9)^2$ nhỏ nhất với a,b,c thỏa (1).

Áp dụng bất đẳng thức: $x^2+y^2 \geq -2xy$ ta có:

$(7b-3c-18)^2 + 34^2 \geq -2.34(7b-3c-18)$

$\Leftrightarrow (7a-c-27)^2 + 16^2 \geq -2.16(7a-c-27)$

$\Leftrightarrow (3a-b-9)^2+2^2 \ge -4(3a-b-9)$

Suy ra $P \ge -236a-472b+236c+2124=-236(a+2b-c)+2124=2832$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+2b-c+3=0 \\ 7b-3c-18=-34 \\ 7a-c-27=-16 \\ 3a-b-9=-2 \end{cases}$, ta chọn $a=2, b=-1, c=3$

Suy ra $N(2;-1;3)$.

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{7}$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{u'}=\vec{n} \wedge \vec{u}=(1;3;7)$ là VTCP của Δ.

Do đó phương của đường thẳng Δ không đổi.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (α) và Δ

Suy ra $d(M,\Delta)=MK \ge MH$.

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$ hay Δ đi qua H.

Ta có phương trình $MH: \begin{cases} x=4+t \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow H(4+t;3+2t;1-t)$.

Mà $H \in (\alpha)$ nên $4+t+2(3+2t)-(1-t)+3=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(2;-1;3)$.

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{7}$.

Ví dụ 3.3.20. Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+4}{2}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-y+z+1=0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d biết khoảng cách từ d đến (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, d cắt Δ và tạo với Δ một góc 45°.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có $\vec{u}=(1;2;2)$ là VTCP.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(1;-1;1)$ là VTPT.

Gọi M là giao điểm của Δ và d, suy ra $M(-2+t;-2+2t;-4+2t)$.

Vì d cách (P) một khoảng bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ nên d//(P) và $d(M,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $d(M,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{|t-3|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t=5, t=1$.

Suy ra có hai điểm $M_1(3;8;6)$ và $M_2(-1;0;-2)$.

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của d.

Vì d//(P) nên $\vec{u'}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow a-b+c=0 \Rightarrow b=a+c$

d tạo với Δ một góc 45^0 nên $\dfrac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|}=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|3a+4c|=3\sqrt{2a^2+2ac+2c^2}$

$\Leftrightarrow (3a+4c)^2=9(a^2+ac+c^2) \Leftrightarrow 7c^2+3ac=0 \Leftrightarrow c=0, c=-\dfrac{7}{3}a$.

- Với $c=0 \Rightarrow a=b$, ta chọn $a=b=1$.

  Phương trình $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=8+t \\ z=6 \end{cases}$.

- Với $c=-\dfrac{7}{3}a$, ta chọn $a=3 \Rightarrow c=-7, b=-4$.

  Phương trình $d: \begin{cases} x=3+2t \\ y=8-4t \\ z=6-7t \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-4t \\ z=-2-7t \end{cases}$.

Ví dụ 3.3.21. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t, \\ z=1 \end{cases} \quad \Delta_2: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-1}{3}$$

và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-11=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và mặt phẳng (α) lần lượt tại A, B, M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$ đồng thời $\Delta \perp \Delta_1$.

Lời giải.

Vì $A \in \Delta_1, B \in \Delta_2$ nên $A(1+a;-2+a;1), B(3+2b;4+b;1+3b)$.

Gọi $M(x;y;z)$, từ $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$, ta có:

$$\begin{cases} x-a-1=2(3+2b-x) \\ y-a+2=2(4+b-y) \\ z-1=2(1+3b-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+4b+7}{3} \\ y=\dfrac{a+2b+6}{3} \\ z=2b+1 \end{cases}$$

Vì $M\in(\alpha)$ nên $\dfrac{a+4b+7}{3}+\dfrac{a+2b+6}{3}+2b+1-11=0$

$\Leftrightarrow 2a+12b-17=0$ (1)

Mặt khác $\Delta\perp\Delta_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow 2a-3b-8=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=\dfrac{49}{10}, b=\dfrac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{17}{10};\dfrac{17}{10};\dfrac{9}{5}\right), B\left(\dfrac{21}{5};\dfrac{23}{5};\dfrac{14}{5}\right)$.

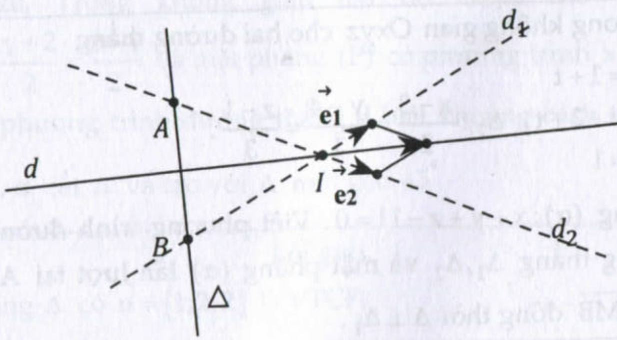
Ví dụ 3.3.22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{1};\quad d_2:\frac{x+5}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$$

1) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng Δ tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 một tam giác cân tại I và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{41}}{42}$.

2) Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.



1) Xét hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{1} \\ \dfrac{x+5}{6}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$.

Vậy d_1 cắt d_2 tại giao điểm $I(1;1;2)$.

d_1 đi qua điểm $M_1(3;3;3)$ có $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ là VTCP ;

d_2 đi qua $M_2(-5;-2;0)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(6;3;2)$ là VTCP.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2

Ta có : $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\dfrac{20}{21} \Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\dfrac{\sqrt{41}}{21}$

Giả sử $IA=IB=a>0$.

Diện tích của tam giác IAB là : $S=\dfrac{1}{2}.IA.IB.\sin\varphi=a^2\dfrac{\sqrt{41}}{42}=\dfrac{\sqrt{41}}{42} \Rightarrow a=1$.

Ta có: $A\in d_1 \Rightarrow A(3+2t;3+2t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(2t+2;2t+2;t+1)$

Nên $IA^2=1 \Leftrightarrow 9(t+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{3} \\ t=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow A_1\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right)\; A_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

$B\in d_2 \Rightarrow B(-5+6t;-2+3t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IB}=(6t-6;3t-3;2t-2)$

Do đó: $IB^2=1 \Leftrightarrow 49(t-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{8}{7} \\ t=\dfrac{6}{7} \end{array}\right.$.

Suy ra $B_1\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right)$, $B_2\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

Vậy ta có 4 trường hợp là:

- $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right); B\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{4}{21};-\dfrac{5}{21};-\dfrac{1}{21}\right)$

Phương trình $\Delta:\dfrac{x-\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-5}=\dfrac{z-\frac{7}{3}}{-1}$.

- $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right); B\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{32}{21};-\dfrac{23}{21};-\dfrac{13}{21}\right)$

Phương trình $\Delta:\dfrac{x-\frac{5}{3}}{32}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{23}=\dfrac{z-\frac{7}{3}}{13}$.

- $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right); B\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{32}{21};\dfrac{23}{21};\dfrac{13}{21}\right)$

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-\frac{1}{3}}{32} = \dfrac{y-\frac{1}{3}}{23} = \dfrac{z-\frac{5}{3}}{13}$.

- $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right); B\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{4}{21};\dfrac{5}{21};\dfrac{1}{21}\right)$

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-\frac{1}{3}}{4} = \dfrac{y-\frac{1}{3}}{-5} = \dfrac{z-\frac{5}{3}}{-1}$.

2) Gọi d là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2.

Ta có $I \in d$. Đặt $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\overrightarrow{u_1} = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\overrightarrow{u_2} = \left(\dfrac{6}{7};\dfrac{3}{7};\dfrac{2}{7}\right)$

Khi đó $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ là các véc tơ đơn vị trên d_1, d_2. Suy ra $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} \pm \overrightarrow{e_2}$

- $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \left(\dfrac{32}{21};\dfrac{23}{21};\dfrac{13}{21}\right)$, suy ra phương trình d là: $\dfrac{x-1}{32} = \dfrac{y-1}{23} = \dfrac{z-2}{13}$.
- $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \left(-\dfrac{4}{21};\dfrac{5}{21};\dfrac{1}{21}\right)$, suy ra phương trình d là: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{1}$.

Ví dụ 3.3.23. Trong không gian Oxyz cho hình chóp S.ABC có $S(2;1;2)$, $A(3;0;-1)$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC lần lượt là hai điểm M, N và mặt phẳng (AMN) có phương trình $2y + 3z + 3 = 0$. Gọi D là điểm đối xứng với A qua trung điểm E của BC.

1) Viết phương trình đường thẳng SD.

2) Viết phương trình đường thẳng BC.

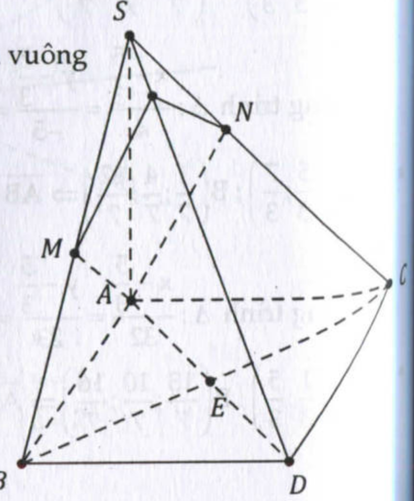
Lời giải.

1) Từ giải thiết ta suy ra được ABDC là hình vuông

Ta có: $BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$, lại có $AM \perp SB$ nên suy ra $AM \perp (SBD)$ hay ta suy ra được $AM \perp AD$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$, suy ra $SD \perp (AMN)$.

Vậy phương trình SD: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.



---

2) Ta có $\overrightarrow{SA} = (1;-1;-3)$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x - y - 3z - 6 = 0$.

Vì $D = SD \cap (ABC)$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \\ x - y - 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow D(2;-1;-1). \\ z = -1 \end{cases}$$

Suy ra trung điểm của BC là: $E\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2};-1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Phương trình BC: $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + t \\ y = -\dfrac{1}{2} + t \\ z = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 3.3.24. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$d_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-5}$; $d_2: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B, đồng thời khoảng cách từ Δ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$. Viết phương trình Δ, biết điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Ta có $A \in d_1$ nên $A(3 + a; 1 + 2a; -5a)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(2 + 3b; 1 - b; 3 + 2b)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3b - a - 1; -b - 2a; 2b + 5a + 3)$.

Do Δ cách (α) một khoảng bằng $\sqrt{6}$ nên ta có $\begin{cases} AB // (\alpha) \\ d(A,(\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \\ d(A,(\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3b - a - 1) + (-b - 2a) + (2b + 5a + 3) = 0 \\ \dfrac{|a|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \text{ (do } x_A > 0) \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow A(9; 13; -30),\ \overrightarrow{AB} = (-10; -11; 31).$$

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-9}{10} = \dfrac{y-13}{11} = \dfrac{z+30}{-31}$.

Ví dụ 3.3.25. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1-2t\\y=2+t\\z=3-2t\end{cases} \text{ và } d_2:\begin{cases}x=3-k\\y=1+2k\\z=2+2k\end{cases}.$$

1) Hai điểm M,N đi động trên d_1 sao cho $MN=4$. Tìm trên đường thẳng d_2 điểm P sao cho tam giác MPN có diện tích bằng 2.

2) Tìm $A,B\in d_1$ và $C,D\in d_2$ sao cho ABCD là tứ diện đều.

Lời giải

1) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;2;3)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;-2)$.

d_2 đi qua $M_2(3;1;2)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2}=(2;-1;-1)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(6;6;-3)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})=9\neq 0$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau và

$$d(d_1,d_2)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right|}=1.$$

Gọi H là hình chiếu của P lên MN, ta có: $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}PH.MN$

Mà $MN=4, S_{\Delta MNP}=2\Rightarrow PH=1=d(d_1,d_2)$.

Từ đó ta suy ra được PH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Vì $P\in d_2$ nên $P(3-k;1+2k;2+2k), H\in d_1$ nên $H(1-2t;2+t;3-2t)$

Suy ra $\overrightarrow{PH}=(-2t+k-2;t-2k+1;-2t-2k+1)$

Do $\begin{cases}PH\perp d_1\\PH\perp d_2\end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2(-2t+k-2)+t-2k+1-2(-2t-2k+1)=0\\-(-2t+k-2)+2(t-2k+1)+2(-2t-2k+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9t+3=0\\-9k+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{3}\\k=\frac{2}{3}\end{cases}. \text{ Vậy } P(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}).$$

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta chứng minh được MN là đườngvuông góc chung của d_1 và d_2.

Suy ra $M\equiv H, N\equiv P$ nên $N(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3})$, $M(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{11}{3})$ và $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Gọi a là độ dài các cạnh của tứ diện ABCD, ta có:

$$AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AM=\frac{a}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

$$A\in d_1\Rightarrow A(1-2t;2+t;3-2t)\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\left(-2t-\frac{2}{3};t+\frac{1}{3};-2t-\frac{2}{3}\right)$$

Suy ra $MA^2=9\left(t+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{6}$.

$$A\left(\frac{5-\sqrt{2}}{3};\frac{10+\sqrt{2}}{6};\frac{11-\sqrt{2}}{3}\right) \text{ và } B\left(\frac{5+\sqrt{2}}{3};\frac{10-\sqrt{2}}{6};\frac{11+\sqrt{2}}{3}\right).$$

Tương tự: $C(3-k;1+2k;2+2k)$ và $CN=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta có:

$$9\left(k-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{4\pm\sqrt{2}}{6}$$

Suy ra $C\left(\frac{14-\sqrt{2}}{6};\frac{7+\sqrt{2}}{3};\frac{10+\sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\frac{14+\sqrt{2}}{6};\frac{7-\sqrt{2}}{3};\frac{10-\sqrt{2}}{3}\right)$.

Thử lại ta thấy $AB=AC=AD=BC=BD=CD=\sqrt{2}$; hay tứ diện ABCD là tứ diện đều.

Vậy $A\left(\frac{5-\sqrt{2}}{3};\frac{10+\sqrt{2}}{6};\frac{11-\sqrt{2}}{3}\right)$; $B\left(\frac{5+\sqrt{2}}{3};\frac{10-\sqrt{2}}{6};\frac{11+\sqrt{2}}{3}\right)$;

$C\left(\frac{14-\sqrt{2}}{6};\frac{7+\sqrt{2}}{3};\frac{10+\sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\frac{14+\sqrt{2}}{6};\frac{7-\sqrt{2}}{3};\frac{10-\sqrt{2}}{3}\right)$.

Trong đó A, B và C, D có thể hoán vị cho nhau.

Ví dụ 3.3.26. Trong không gian Oxyz bốn điểm $A(3;2;1)$, $B(5;-2;3)$, $C(2;1;0)$, $D(-4;5;2)$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các đường thẳng AB, CD sao cho $AM=CN$. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.

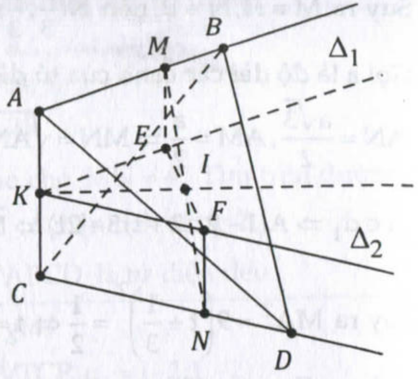
Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-1;-1)$, $\overrightarrow{CD}=(-6;4;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(6;0;-6)$, $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{CD}=-48\neq 0$

Do đó AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Hơn nữa $\begin{cases}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$ nên AC là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.



Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AC, suy ra $K\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; Δ_1 là đường thẳng đi qua K và song song với AB; Δ_2 là đường thẳng đi qua K và song song với CD.

Gọi E là hình chiếu của M lên Δ_1, F là hình chiếu của N lên Δ_2.

Khi đó MENF là hình bình hành nên I là trung điểm của EF.

Đồng thời KE = AM = CN = KF nên KI là đường phân giác Δ của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Mà Δ cố định nên I luôn nằm trên đường thẳng cố định Δ.

Đặt $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{CD}\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Vì Δ là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên ta có hai trường hợp sau:

- $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{14}};-\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

  Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)t\\ y=\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{14}}\right)t\\ z=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)t\end{cases}$.

- $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{14}};-\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

  Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)t\\ y=\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)t\\ z=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)t\end{cases}$.

- **Bài tập vận dụng**

Bài 3.3.1. Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(1;1;2), B(3;2;−1), đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-3}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-1=0$.

Lập phương trình đường thẳng Δ, biết

1. Δ đi qua A, B.
2. Δ đi qua B, song song với (P) và vuông góc với d.
3. Δ đi qua A, cắt đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc φ sao cho $\cos\varphi=\sqrt{\frac{17}{19}}$.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d đi qua M(1;0;−1) và có $\vec{u}=(1;2;-3)$ là VTCP.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(2;-2;1)$ là VTPT.

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng Δ.

   Phương trình $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-3}$.

2. Vì Δ song song với (P) và vuông góc với d nên Δ nhận vecto $\overrightarrow{u_1}=\vec{u}\wedge\vec{n}=(-4;-7;-6)$ làm VTCP.

   Phương trình đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{6}$.

3. Gọi C là giao điểm của d và Δ, suy ra $C(1+t;2t;-1-3t)$

   Do đó $\overrightarrow{AC}=(t;2t-1;-3t-3)$ là VTCP của Δ

   Nên $\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\overrightarrow{AC}}=\frac{\left|2t-2(2t-1)-3t-3\right|}{3\sqrt{t^2+(2t-1)^2+(3t+3)^2}}=\frac{\left|5t+1\right|}{3\sqrt{t^2+(2t-1)^2+(3t+3)^2}}$.

   Mà $\cos\varphi=\sqrt{\frac{17}{19}}$ nên $\sin\varphi=\sqrt{\frac{2}{19}}$

   $\Leftrightarrow\sqrt{19}\left|5t+1\right|=3\sqrt{2}\sqrt{14t^2+14t+10}$

   $\Leftrightarrow 19\left(25t^2+10t+1\right)=18\left(14t^2+14t+10\right)$

   $\Leftrightarrow 223t^2-62t-161=0\Leftrightarrow t=1, t=-\frac{161}{223}$.

   Với $t=1\Rightarrow\overrightarrow{AC}=(1;1;-6)$. Phương trình $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-6}$.

- Với $t=-\frac{161}{223}\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\left(-\frac{161}{223};-\frac{545}{223};-\frac{186}{223}\right)$

Phương trình $\Delta:\frac{x-1}{161}=\frac{y-1}{545}=\frac{z-2}{186}$.

Bài 3.3.2. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng

$$(P):2x-2y+z-1=0,\ (Q):x+y+z-3=0$$

Viết phương trình đường thẳng d biết.

1. d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).
2. d đi O và song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).

Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;1)$ là VTPT.

(Q) có $n_2=(1;1;1)$ là VTPT.

Suy ra $\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=(-3;-1;4)$.

1. Xét hệ phương trình $\begin{cases}2x-2y+z-1=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}$

Cách 1. Cho $x=1$ ta có hệ: $\begin{cases}-2y+z=-1\\ y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow y=z=1\Rightarrow M(1;1;1)\in d$

Vì d là giao tuyến của (P) và (Q) nên $\vec{u}=(3;1;-4)$ là VTCP của d.

Phương trình $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-4}$.

Cách 2. Chọn $x=t$, ta có hệ: $\begin{cases}2y-z=2t-1\\ y+z=3-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\\ z=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}t\end{cases}$

Suy ra phương trình $d:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\\ z=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}t\end{cases}$.

2. Vì d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $\vec{u}=(3;1;-4)$ là VTCP của đường thẳng d.

Phương trình $d:\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-4}$.

Bài 3.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1},\ d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ, biết

1. Δ đi qua O và vuông góc với cả hai đường thẳng d_1,d_2.
2. Δ đi qua $A(0;6;6)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2.
3. Δ đi qua $B(-12;10;8)$ và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2.
4. Δ nằm trong mặt phẳng $(P):5x+10y-8z-16=0$ và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;-1;0)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;-1)$ là VTCP.

d_2 đi qua $M_2(-2;0;-1)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(2;-2;1)$ là VTCP.

1. Vì Δ vuông góc với cả hai đường thẳng d_1,d_2 nên $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-4;-3;2)$ là VTCP của đường thẳng Δ.

Phương trình $\Delta:\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$.

2. **Cách 1.** Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với d_1.

Suy ra $M(1+t;-1-2t;-t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(t+1;-2t-7;-t-6)$

Vì $\Delta\perp d_2$ nên $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow 2(t+1)-2(-2t-7)+(-t-6)=0\Leftrightarrow t=-2$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(-1;-3;-4)$.

Phương trình $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-6}{4}$.

Cách 2.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và d_1, suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{AM_1}=(5;5;-5)$

Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d_2

Suy ra $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{u_2}=(2;-2;1)$

Vì Δ đi qua A, cắt d_1 và vuông góc với d_1 nên Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-5;-15;-20)$.

Phương trình $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-6}{4}$.

3. **Cách 1:** Gọi E, F lần lượt là giao điểm Δ với d_1, d_2

Suy ra $E(1+a;-1-2a;-a)$, $F(-2+2b;-2b;-1+b)$.

Nên $\overrightarrow{BE}=(a+13;-2a-11;-a-8)$, $\overrightarrow{BF}=(2b+10;-2b-10;b-9)$.

Vì E, B, F thẳng hàng nên $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BF}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ \ 13=2kb+10k\\-2a-11=-2kb-10k\\-a-8=kb-9k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2kb-10k=-13\\2a-2kb-10k=-11\\a+kb-9k=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\kb=b=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{BE}=(15;-15;-10)$.

Phương trình $\Delta:\dfrac{x+12}{3}=\dfrac{y-10}{-3}=\dfrac{z-8}{-2}$.

Cách 2. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa B và d_1 và (R) là mặt phẳng chứa B và d_2.

Khi đó Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R).

Từ đó ta tìm được phương trình $\Delta:\dfrac{x+12}{3}=\dfrac{y-10}{-3}=\dfrac{z-8}{-2}$.

4. Gọi E, F lần lượt là giao điểm Δ với d_1, d_2

Suy ra $E(1+a;-1-2a;-a)$, $F(-2+2b;-2b;-1+b)$

Vì $\Delta\subset(P)$ nên $\begin{cases}E\in(P)\\F\in(P)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(1+a)+10(-1-2a)+8a-16=0\\5(-2+2b)-20b-8(-1+b)-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-1\end{cases}$$

Suy ra $E(-2;5;3)$, $F(-4;2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{EF}=(-2;-3;-5)$

Phương trình $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-3}{5}$.

Bài 3.3.4. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+y+2z-11=0$.

1) Lập phương trình hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α).

2) Viết phương trình đường thẳng Δ_1 nằm trong (α) đồng thời cắt và vuông góc với Δ.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (α), cắt Δ và tạo với đường thẳng Δ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{7\sqrt{3}}{18}$.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng Δ đi qua M(1;2;1) có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;2)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;1;2)$.

1) **Cách 1 :** Ta thấy hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=1+2t\\2x+y+2z-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}$

Suy ra $\Delta\cap(P)=I(2;1;3)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên (α), suy ra phương trình MH : $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=1+2t\end{cases}$

Suy ra $H(1+2t;2+t;1+2t)$.

Do $H\in(\alpha)$ nên ta có : $2(1+2t)+2+t+2(1+2t)-11=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{9}$,

hay $H\left(\dfrac{19}{9};\dfrac{23}{9};\dfrac{19}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{14}{9};-\dfrac{8}{9}\right)$

Hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α) chính là IH

Phương trình IH : $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{14}=\dfrac{z-3}{-8}$.

Cách 2. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (α)

Suy ra $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}=(4;-2;-3)$.

Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α), ta có $\Delta'=(\alpha)\cap(\beta)$

Suy ra $\overrightarrow{u_{\Delta'}}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(1;14;-8)$ và $I\in\Delta'$ nên phương trình Δ' là :

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{14}=\frac{z-3}{-8}.$$

2) Gọi $J=\Delta_1\cap\Delta\Rightarrow J=\Delta\cap(\alpha)\Rightarrow J\equiv I$

Vì $\begin{cases}\Delta_1\cap(\alpha)\\\Delta_1\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}=(4;-2;-3)$.

Phương trình $\Delta_1:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

3) Vì Δ_2 nằm trong mặt phẳng (α) và cắt Δ nên Δ_2 đi qua I.

Gọi $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(a;b;c)$, ta có : $\vec{u}_{\Delta_2}.\vec{n}_\alpha=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0\Leftrightarrow b=-2a-2c$

Mặt khác : $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}.\overrightarrow{u_\Delta}|}{|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}|.|\overrightarrow{u_\Delta}|} = \frac{|a-b+2c|}{\sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{|3a+4c|}{\sqrt{6(5a^2+8ac+5c^2)}}$

Do đó $\cos\varphi = \frac{7\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow \frac{|3a+4c|}{\sqrt{6(5a^2+8ac+5c^2)}} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}|3a+4c| = 7\sqrt{5a^2+8ac+5c^2} \Leftrightarrow 18(3a+4c)^2 = 49(5a^2+8ac+5c^2)$

$\Leftrightarrow 83a^2 - 40ac - 43c^2 = 0 \Leftrightarrow a = c, a = -\frac{43}{83}c$.

- Nếu $a = c \Rightarrow b = -4a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -4, c = 1$.

  Phương trình $\Delta_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

- Nếu $a = -\frac{43}{83}c$, chọn $a = 43 \Rightarrow b = 80, c = -83$.

  Phương trình $\Delta_2 : \frac{x-2}{43} = \frac{y-1}{80} = \frac{z-3}{-83}$.

Bài 3.3.1. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết

1) Δ đi qua hai điểm $A(1;2;1), B(3;-2;-1)$.

2) Δ đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y - z = 0$.

3) Δ đi qua A và song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

4) Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng
$(\alpha_1): x + y + z - 3 = 0$ và $(\alpha_2): 3x - 2y + z - 2 = 0$.

5) Δ đi qua B, vuông góc với Ox và đường thẳng d (ở ý 3).

Hướng dẫn giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-4;-2)$, phương trình $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

2) Ta có $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2;-3;-1)$, phương trình $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$

3) Ta có $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{u_d} = (1;2;-3)$, phương trình $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

4) Ta có: $u_\Delta = n_{\alpha_1} \wedge n_{\alpha_2} = (3;2;-5)$. Ta thấy $M(1;1;1) \in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$

Phương trình $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}$.

5) Trên Ox có véc tơ đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$

Vì Δ cùng vuông góc với Ox và d nên $\overrightarrow{u_\Delta} = \vec{i} \wedge \overrightarrow{u_d} = (0;3;2)$

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Bài 3.3.2. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } \Delta_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-1}{4}$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(2;-10;-3)$ và cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua $B(3;0;5)$, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2.

4) Viết phương trình đường thẳng d cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại E,F thỏa $EF = 4\sqrt{2}$ và d song song với mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(1;1;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;1)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(2;-6;1)$, VTCP $\overrightarrow{u_2} = (2;-3;4)$.

Suy ra $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (-1;-2;-1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;-7;1)$

$\Rightarrow (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{M_1M_2} = 12 \neq 0$, do đó hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(1+m;1-m;m)$, $N \in \Delta_2 \Rightarrow N(2+2n;-6-3n;1+4n)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2n - m + 1; -3n + m - 7; 4n - m + 1)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - m + 1 + 3n - m + 7 + 4n - m + 1 = 0 \\ 2(2n - m + 1) + 3(3n - m + 7) + 4(4n - m + 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3n - m + 3 = 0 \\ 29n - 9m + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

Suy ra $N(2;-6;1)$, $\overrightarrow{MN} = (-2;-4;-2)$.

Phương trình $MN: \frac{x-2}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{1}$.

2) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và Δ_1.

Ta có: $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \overrightarrow{u_1} = (14;4;-10)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và Δ_2.

Ta có: $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{AM_2} \wedge \overrightarrow{u_2} = (28;8;-8)$

Từ giả thiết ta suy ra được Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = (48;\,-168;\,0)$.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 7t \\ z = -3 \end{cases}$.

3) Gọi $C = \Delta' \cap \Delta_1 \Rightarrow C(1+t;1-t;t) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (t-2;-t+1;t-5)$.

Vì $\Delta' \perp \Delta_2$ nên ta suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow 2(t-2) - 3(-t+1) + 4(t-5) = 0$

$\Leftrightarrow 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (1;-2;-2)$.

Phương trình $\Delta': \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-5}{-2}$.

4) Ta có $E \in \Delta_1 \Rightarrow E(1+m;1-m;m)$, $F \in \Delta_2 \Rightarrow F(2+2n;-6-3n;1+4n)$

Suy ra $\overrightarrow{EF} = (2n-m+1;-3n+m-7;4n-m+1)$

Ta có: $\begin{cases} EF^2 = 32 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2n-m+1)^2 + (3n-m+7)^2 + (4n-m+1)^2 = 32 \\ (2n-m+1) + (3n-m+7) + (4n-m+1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3n + 3 = m \\ (n-2)^2 + 16 + (n+2)^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} n = -2 \\ m = -3 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} n = 2 \\ m = 9 \end{cases}$, ta có: $F(6;-12;9), \overrightarrow{EF} = (-4;-4;0)$

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -12 + t \\ z = 9 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} n = -2 \\ m = -3 \end{cases}$, ta có: $F(-2;0;-7), \overrightarrow{EF} = (0;-4;-4)$

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 \\ y = t \\ z = -7 + t \end{cases}$.

Bài 3.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1},\quad d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

và mặt phẳng $(P): 2x + 3y - 2z + 4 = 0$.

1) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ' nằm trong (P), cắt d_1 và vuông góc với d_2.

3) Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P), cắt d_2 và tạo với d_1 một góc φ thỏa $\cos\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải.

1) Giả sử Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B.

Suy ra $A(1-a;a;-a)$, $B(-1+2b;-1-b;1+2b)$

Vì $\Delta \subset (P)$ nên ta có $A, B \in (P)$.

Do đó: $\begin{cases} 2(1-a) + 3a - 2(-a) + 4 = 0 \\ 2(-1+2b) + 3(-1-b) - 2(1+2b) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$

Suy ra $A(3;-2;2)$, $\overrightarrow{AB} = (-6;2;-3)$.

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-3}{-6} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

2) Ta có Δ' đi qua $A(3;-2;2)$ và $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{u_{d_2}} = (4;-8;-8)$

Phương trình $\Delta': \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{-2}$.

3) Ta có d đi qua $B(-3;0;-1)$. Gọi $\overrightarrow{u_d} = (a;b;c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow 2a + 3b - 2c = 0 \Rightarrow b = \dfrac{2}{3}(c-a)$ (1)

Mặt khác: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|} = \dfrac{|a-b+c|}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|5a+c|}{\sqrt{13a^2 - 8ac + 13c^2}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 9(5a+c)^2 = 13a^2 - 8ac + 13c^2$

$\Leftrightarrow 212a^2 + 98ac - 4c^2 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{53}c,\ a = -\dfrac{1}{2}c$.

- $a=\frac{2}{53}c$, chọn $c=53,\ a=2,\ b=34$.

Phương trình $d:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{34}=\frac{z+1}{53}$.

- $a=-\frac{1}{2}c$, chọn $c=-2,\ a=1,\ b=-2$.

Phương trình $d:\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}$.

Bài 3.3.4. Lập phương trình đường thẳng Δ biết:

1) Δ đi qua $A(1;2;1)$ và $B(-1;0;0)$.

2) Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha): x+y-z+3=0$ và $(\beta): 2x-y+5z-4=0$.

3) Δ đi qua $M(1;0;-1)$ và vuông góc với hai đường thẳng .

$d_1:\frac{x}{-5}=\frac{y+2}{8}=\frac{z-1}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=t\\ y=-1-2t\\ z=0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

1) Vì Δ đi qua A và B nên Δ nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)$ là VTCP

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=2-2t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}$.

2) Để lập phương trình đường thẳng Δ ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $M(-1;-1;1),\ N(-5;6;4)$ là hai điểm chung của (α) và (β)

Suy ra $M,N\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-4;7;3)$ là một VTCP của Δ

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=-1-4t\\ y=-1+7t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1+3t\end{cases}$.

Cách 2: Ta có có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;-1),\ \overrightarrow{n_\beta}=(2;-1;5)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β).

Vì Δ là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{u}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(4;-7;-3)$ là VTPT của Δ.

Và điểm $M\in\Delta$ nên phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-1+4t\\ y=-1-7t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-3t\end{cases}$.

Cách 3: Ta có $M(x;y;z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(\alpha)\\ M\in(\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+3=0\\ 2x-y+5z-4=0\end{cases}$.

Đặt $z=t$ ta được: $\begin{cases}x+y=-3+t\\ 2x-y=4-5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\\ y=-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}t\end{cases}$.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\\ y=-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$.

3) Ta có: d_1 có $\overrightarrow{u_1}=(5;-8;-3)$ là VTCP; d_2 có $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;0)$ là VTCP

Cách 1: Giả sử $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của Δ.

Vì Δ vuông góc với d_1 và d_2 nên ta có :

$$\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a-8b-3c=0\\ a-2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\ c=\frac{2}{3}b\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\frac{b}{3}.(6;3;2)$$

Phương trình Δ là: $\begin{cases}x=1+6t\\ y=3t\\ z=-1+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Vì Δ vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 nên véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-6;-3;-2)$ là VTPT của đường thẳng Δ.

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-6t\\ y=-3t\\ z=-1-2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Bài 3.3.5. Lập phương trình đường thẳng Δ, biết

1) Δ nằm trong $(P): y+2z=0$ và cắt hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=4t\end{cases}$; $d_1:\begin{cases}x=2-t'\\ y=4+2t'\\ z=1\end{cases}$.

2) Δ đi qua $M(-4;-5;3)$ và cắt hai đường thẳng

$d_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

3) Δ đi qua $M(0;1;1)$, vuông góc với $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt đường thẳng

$$d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải.

1) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (P) với d_1, d_2

Thay phương trình d_1 vào phương trình (P) ta có :

$t + 8t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(1;0;0)$.

Thay phương trình d_2 vào phương trình (P) ta có :

$2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow B(6;-2;1)$.

Vì Δ nằm trong (P) đồng thời Δ cắt d_1, d_2 nên Δ đi qua A, B

Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{AB} = (5;-2;1)$ làm VTCP.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Ta có d_1 đi qua $M_1(-1;-3;2)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (3;-2;-1)$ là VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(2;-1;1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (2;3;-5)$ là VTCP.

Gọi (P) là mp đi qua M và chứa đường thẳng d_1.

Khi đó (P) có $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{MM_1} \wedge \overrightarrow{u_1} = (-4;0;-12)$ là VTPT.

Tương tự gọi (Q) là mp đi qua M và đường thẳng d_2, suy ra $\overrightarrow{n_Q} = (7;-13;-5)$ là VTPT của (Q).

Vì Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 nên Δ là giao tuyến của (P) và (Q).

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = -52(3;2;-1)$ là VTCP của Δ.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) **Cách 1 :** Đường thẳng d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ và có $\overrightarrow{u_2} = (0;1;1)$ là VTCP.

Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1} = (3;1;1)$ là VTCP.

Gọi (P) là mp đi qua M vuông góc với đường thẳng d_1, suy ra $\overrightarrow{n_P} = (3;1;1)$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi (Q) là mp đi qua M và cắt đường thẳng d_2.

Suy ra $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{MA} = (1;-1;1)$ là VTPT của mặt phẳng (Q).

Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên suy ra

$\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = 2(1;-1;-2)$ là VTCP của Δ.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Cách 2 : Gọi $N = \Delta \cap d_2 \Rightarrow N(-1;t;t+1) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1;t-1;t)$

Vì Δ vuông góc với $d_1 \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1;1;2)$

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bài 3.3.6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối D – 2011).

Hướng dẫn giải.

Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với Ox

Suy ra $M(m;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (m-1;-2;-3)$, đường thẳng Δ có $\vec{a} = (2;1;-2)$ là VTCP.

Vì $AM \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{a} \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2;-2;-3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$

Bài 3.3.7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối D – 2009)

Hướng dẫn giải.

Tọa độ điểm I của Δ với (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}\\ x+2y-3z+4=0\end{cases}\Rightarrow I(-3;1;1).$$

Ta có $\vec{n}=(1;2;-3)$ là VTPT của (P); $\vec{u}=(1;1;-1)$ là VTCP của Δ.

Đường thẳng d cần tìm qua I và có $\vec{v}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(1;-2;-1)$ là VTCP.

Phương trình $d:\begin{cases}x=-3+t\\ y=1-2t\\ z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Bài 3.3.8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2};\quad d_2:\begin{cases}x=-1-2t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.

Tìm tọa độ các điểm $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(P):x-y+z=0$ và độ dài $MN=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

d_1 đi qua $O(0;0;0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;1;2)$, d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;1)$.

Vì $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{OB}=4\neq 0\Rightarrow d_1,d_2$ chéo nhau.

$M\in d_1\Rightarrow M(t;t;2t), N\in d_2\Rightarrow N(-1-2s;s;1+s)$

Ta có: $\begin{cases}MN//(P)\\ MN=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_p}=0\\ MN=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-s\\ \sqrt{(t-s)^2+4t^2+(1-3t)^2}=\sqrt{2}\end{cases}$

Giải hệ và kiểm tra điều kiện song song ta được:

$M\left(\dfrac{4}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{8}{7}\right), N\left(\dfrac{1}{7};-\dfrac{4}{7};\dfrac{3}{7}\right)$ thỏa mãn.

Bài 3.3.9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(-1;-1;2)$, đường cao BH và trung tuyến CM lần lượt nằm trên hai đường thẳng: $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{4};\ d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

Phương trình tham số của các đường thẳng (d_1) và (d_2) là:

$$(d_1):\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+3t\\ z=4+4t\end{cases},\quad (d_2):\begin{cases}x=1+2s\\ y=-2-3t\\ z=5+s\end{cases}\ (t,s\in\mathbb{R}).$$

Vì $B\in(d_1)\Rightarrow B(2t-1;3t+1;4t+4)$, $C\in(d_2)\Rightarrow C(2s+1;-3s-2;s+5)$

Ta có $\overrightarrow{AC}=(2s+2;-3s-1;s+3)$, tọa độ trung điểm M của AB là $M\left(t-1;\dfrac{3t-2}{2};2t+3\right)$.

VTCP của $(d_1):\overrightarrow{u_{BH}}=(2;3;4)$,

vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_{BH}}=0\Rightarrow 2(2s+2)+3(-3s-1)+4(s+3)=0$

$\Leftrightarrow -s+13=0\Leftrightarrow s=13\Rightarrow C(27;-41;18)$.

Vì $M\in(d_2)\Rightarrow\begin{cases}t-1=2s+1\\ 3t-2=2(-3s-2)\\ 2t+3=s+5\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow B\left(\dfrac{1}{3};3;\dfrac{20}{3}\right)$.

Do đó phương trình $AB:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{9}=\dfrac{z-2}{7}$, $AC:\dfrac{x+1}{13}=\dfrac{y+3}{-19}=\dfrac{z-2}{8}$.

Bài 3.3.10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-2+2t\\ z=-t\end{cases}$. Gọi $A=d\cap(P)$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, nằm trong (P) sao cho góc tạo bởi Δ và d bằng 45^0.

Hướng dẫn giải.

Ta có $A(1;0;-1)$, VTCP của $(d):\vec{u}=(1;2;-1)$, VTPT của $(P):\vec{n}=(2;1;1)$

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)\ (a^2+b^2+c^2>0)$ là VTCP của (Δ).

Vì $(\Delta)\subset mp(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=0\Rightarrow 2a+b+c=0$ (1)

Góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^0 suy ra

$$\cos 45^0=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{6}}\Leftrightarrow|a+2b-c|=\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\quad(2)$$

Từ (1),(2) suy ra

$$3|a+b| = \sqrt{3\left(a^2+b^2+(2a+b)^2\right)} \Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2 = 5a^2+4ab+2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-2ab-b^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}a\right)^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow b=-a\pm\sqrt{3}a.$$

* Với $b=-a+a\sqrt{3}$, chọn $a=1 \Rightarrow b=\sqrt{3}-1 \Rightarrow c=-1-\sqrt{3}$.

* Với $b=-a-a\sqrt{3}$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-\sqrt{3}-1 \Rightarrow c=\sqrt{3}-1$

Từ đó ta có hai đường thẳng thỏa mãn có phương trình là :

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{\sqrt{3}-1}=\frac{z+1}{-\sqrt{3}-1} \text{ và } \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1-\sqrt{3}}=\frac{z+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Bài 3.3.11. Cho $A(1;2;-1)$, $(d):\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z+1=0$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với (P).

Hướng dẫn giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và (Q)//(P).

Suy ra phương trình $(Q):2x+y-z-5=0$.

Gọi $B=(d)\cap(Q)$ thì tọa độ của B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}\\ 2x+y-z-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{3}\\ y=-1\\ z=-\frac{8}{3}\end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3};-1;-\frac{8}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{2}{3};-3;-\frac{5}{3}\right)$

Đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB.

Vậy phương trình $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-9}=\frac{z+1}{-5}$

Bài 3.3.12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;2;3) và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{x-3}{1}$; $d_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

Hướng dẫn giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A(1;2;3) và vuông góc với d_1 có phương trình

$2(x-1)-(y-2)+(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-3=0$.

Vì Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 nên Δ đi qua giao điểm B của d_2 và (α).

Tọa độ giao điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}\\ 2x-y+z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-1\\ z=-2\end{cases} \Rightarrow B(2;-1;-2).$$

Véc tơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;-3;-5)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$.

Bài 3.3.13. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và hai điểm $A(1;2;4), B(-1;2;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=4-t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$.

Tọa độ giao điểm M của đường thẳng AB với mp(P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=4-t\\ y=t\\ z=0\\ 3x+2y-z+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-12\\ x=16\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow M(-12;16;0).$$

Điểm I(2;2;0) là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Phương trình đường thẳng d đi qua I vuông góc với mp(P) : $\begin{cases}x=2+3t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases}$.

Điểm $K(2+3t;2+2t;-t)\in d$. Ta có $OK=d(K,(P))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+3t)^2+(2+2t)^2+t^2}=\frac{|3(2+3t)+2(2+2t)+t+4|}{\sqrt{3^2+2^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 14\left(14t^2+20t+8\right)=14^2\left(t^2+2t+1\right) \Leftrightarrow 8t+6=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{4}.$$

Vậy $K\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Bài 3.3.14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}, d_2:\frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$. Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với Ox đồng thời cắt cả d_1, d_2.

Hướng dẫn giải.

* Ta có d_1 đi qua $M(0;3;-1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$, d_2 đi qua $N(4;0;3)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;1;2)$, $\overrightarrow{MN}=(4;-3;4)$.

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{MN}=-23\neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

* Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1, d_2.

$A\in d_1\Rightarrow A(-t;3+2t;-1+3t), B\in d_2\Rightarrow B(4+s;s;3+2s), t,s\in\mathbb{R}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(s+t+4;s-2t-3;2s-3t+1)$.

Ta có $\Delta//Ox$

nên $\begin{cases}s-2t-3=0\\2s-3t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=-11\\t=-7\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-14;0;0), A(7;-11;-22)$.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=7+t\\y=-11\\z=-22\end{cases}$.

Bài 3.3.15. Trong hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Tìm giao điểm M của (d) và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua nằm trong (P) vuông góc với (d) sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

Hướng dẫn giải.

Giao điểm M của d, mp(P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}\\x+y+z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(1;-3;0).$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d vuông góc với mp(P). Theo giả thiết ta có $d=(P)\cap(Q)$, với (Q) là mặt phẳng vuông góc với mp(α), mp(P) và khoảng cách từ M đến (Q) bằng $\sqrt{42}$.

Ta có $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$; $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$ lần lượt là các véc tơ chỉ phương, pháp tuyến của d, mp(P).

Véc tơ pháp tuyến của mp(α): $\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_p}]=(2;-3;1)$.

Véc tơ pháp tyến của mp(Q): $\overrightarrow{n_q}=[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_p}]=(4;1;-5)$.

Phương trình mp(Q): $4x+y-5z+a=0$.

Theo giả thiết ta có: $d(M,(Q))=\sqrt{42}\Leftrightarrow\frac{|4.1-1.3+a|}{\sqrt{4^2+1+5^2}}=\sqrt{42}$

$\Leftrightarrow|1+a|=42\Leftrightarrow a=41;a=-43$.

* Với $a=41\Rightarrow(Q):4x+y-5z+41=0$

Phương trình đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-13+2t\\y=11-3t\\z=t\end{cases}$.

* Với $a=-43\Rightarrow(Q):4x+y-5z-43=0$

Phương trình đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=15+2t\\y=-17-3t\\z=t\end{cases}$.

Bài 3.3.16. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1} \text{ và } \Delta_2:\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-4}{-1}.$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
2) Cho A, B là hai điểm di động trên Δ_1 thỏa $AB=4$. Viết phương trình đường thẳng đi qua O và cắt Δ_2 tại C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.
3) Có tồn tại hay không một tứ diện đều có hai đỉnh thuộc Δ_1 và hai đỉnh thuộc Δ_2. Nếu có hãy tìm tọa độ các đỉnh đó.
4) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $P(1;4;5)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại K, H sao cho $PH=2PK$.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(0;1;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;1)$.

Δ_2 đi qua $M_2(-3;-5;4)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;-6;4)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(2;4;2)\Rightarrow(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{M_1M_2}=-26\neq 0$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 với $M \in \Delta_1$, $N \in \Delta_2$.

Suy ra $M(m;1-m;m)$, $N(-4+3n;-5-n;4-n)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3n-m-4;-n+m-6;-n-m+4)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-m+2=0 \\ 11n-3m-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ m=4 \end{cases}$.

Suy ra $M(4;-3;4)$, $N(2;-7;2)$, $\overrightarrow{MN} = (-2;-4;-2)$.

Phương trình $MN: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$.

2) Gọi H là hình chiếu của C lên AB, suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}CH.AB = 2CH$

Ta có $CH \ge MN$ nên $S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $C \equiv N$ hay $C(2;-7;2)$.

3) Giả sử tồn tại tứ diện đều EFIJ với $E, F \in \Delta_1$ và $I, J \in \Delta_2$

Đặt $EF = 2x$. Ta có M, N lần lượt là trung điểm của EF và IJ.

Trong tam giác EMN ta có: $EN^2 - EM^2 = MN^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x^2 = 24 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.

Gọi $E(t;1-t;t) \Rightarrow \overrightarrow{ME} = (t-4;4-t;t-4)$.

Do đó $ME = x \Leftrightarrow 3(t-4)^2 = 12 \Leftrightarrow x = 6, x = 2$

Suy ra $E(6;-5;6)$, $F(2;-1;2)$.

Tương tự: $I(-4+3t';-5-t';4-t') \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (3t'-6;-t'+2;-t'+2)$.

Do đó $NI = x \Leftrightarrow 11(t'-2)^2 = 12 \Leftrightarrow t' = 2 \pm \dfrac{2\sqrt{33}}{11}$

Suy ra $I\left(2+\dfrac{6\sqrt{33}}{11};-7-\dfrac{2\sqrt{33}}{11};2-\dfrac{2\sqrt{33}}{11}\right)$, $J\left(2-\dfrac{6\sqrt{33}}{11};-7+\dfrac{2\sqrt{33}}{11};2+\dfrac{2\sqrt{33}}{11}\right)$.

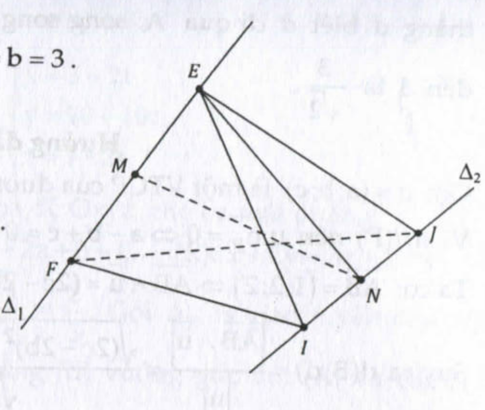
Ta có: $IF = 2\sqrt{12+\dfrac{6\sqrt{33}}{11}} \ne EF = 4\sqrt{3}$.

Vậy không tồn tại tự diện đều EFIJ.

4) Ta có: $K(a;1-a;a)$, $H(-4+3b;-5-b;4-b)$

Suy ra $\overrightarrow{PK} = (a-1;-a-3;a-5)$, $\overrightarrow{PH} = (3b-5;-b-9;-b-1)$

Vì P, H, K nằm trên một đường thẳng và $PH = 2PK$ nên ta có các trường hợp sau



- $\overrightarrow{PH} = 2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = 2a-2 \\ -b-9 = -2a-6 \\ -b-1 = 2a-10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3$.

Suy ra $\overrightarrow{PK} = (2;-6;-2)$.

Phương trình $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-5}{-1}$.

- $\overrightarrow{PH} = -2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = -2a+2 \\ -b-9 = 2a+6 \\ -b-1 = -2a+10 \end{cases}$

hệ vô nghiệm.

Bài 3.3.17. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1},\ \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2},\ \Delta_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1-3t \\ z = 4t \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ cắt ba đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho B là trung điểm của AC.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $A(a;1+2a;-1-a)$, $B(1+2b;-1+b;-2b)$, $C(3;1-3c;4c)$

Vì B là trung điểm của AC nên ta có:

$$\begin{cases} a+3 = 2+4b \\ 2a-3c+2 = -2+2b \\ -a+4c-1 = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b = -1 \\ 2a-2b-3c = -4 \\ a-4b-4c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{6} \\ b = \dfrac{1}{24} \\ c = \dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Suy ra $A\left(-\dfrac{5}{6};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{23}{6};-\dfrac{7}{12};\dfrac{19}{6}\right)$.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} + 46t \\ y = -\dfrac{2}{3} - 7t \\ z = -\dfrac{1}{6} + 38t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Bài 3.3.18. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-y+z-5=0$ và các điểm $A(1;2;1)$; $B(2;4;3)$. Viết phương trình đường thẳng d biết d đi qua A, song song với (P) đồng thời khoảng cách từ B đến d là $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải.

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của đường thẳng d.

Vì d//(P) nên $\vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow a-b+c=0 \Rightarrow b=a+c$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=(2c-2b;2a-c;b-2a)$

Suy ra $d(B,d)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{(2c-2b)^2+(2a-c)^2+(b-2a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\left[4a^2+(2a-c)^2+(a-c)^2\right]=9\left[a^2+(a+c)^2+c^2\right]$

$\Leftrightarrow 7c^2+15ac=0 \Leftrightarrow c=0, c=-\frac{15}{7}a$.

- Với $c=0$, suy ra $a=b=1$. Phương trình d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1 \end{cases}$.
- Với $c=-\frac{15}{7}a$, ta chọn $a=7 \Rightarrow c=-15, b=-8$.

Phương trình $\Delta: \frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-1}{-15}$.

Bài 3.3.19. Cho hai đường thẳng có phương trình:

$$d_1: \frac{x-2}{3}=y+1=\frac{z+3}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=3+t \\ y=7-2t \\ z=1-t \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng cắt d_1 và d_2 đồng thời đi qua điểm $M(3;10;1)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là d và đường thẳng d cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại điểm $A(2+3a;-1+a;-3+2a)$ và $B(3+b;7-2b;1-b)$.

Do đường thẳng d đi qua $M(3;10;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$.

Mà $\overrightarrow{MA}=(3a-1;a-11;-4+2a), \overrightarrow{MB}=(b;-2b-3;-b)$

Suy ra $\begin{cases} 3a-1=kb \\ a-11=-2kb-3k \\ -4+2a=-kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-kb=1 \\ a+3k+2kb=11 \\ 2a+kb=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \\ b=1 \end{cases}$.

Do đó $\overrightarrow{MA}=(2;-10;-2)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=10-10t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Bài 3.3.20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba mặt phẳng:

(P): $2x-y+z+1=0$, (Q): $x-y+2z+3=0$, (R): $x+2y-3z+1=0$

và đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$. Gọi Δ_2 là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với (R) và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Hướng dẫn giải.

Ta có: Δ_1 có phương trình tham số $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=3t \end{cases}$.

Δ_2 có phương trình tham số $\begin{cases} x=2+s \\ y=5+3s \\ z=s \end{cases}$.

Giả sử $d\cap\Delta_1=A; d\cap\Delta_2=B$. Suy ra $A(2-2t;-1+t;3t)$, $B(2+s;5+3s;s)$.

$\overrightarrow{AB}=(s+2t;3s-t+6;s-3t)$. Mặt phẳng (R) có $\vec{n}=(1;2;-3)$ là vtpt.

Ta có: $d\perp(R) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \frac{s+2t}{1}=\frac{3s-t+6}{2}=\frac{s-3t}{-3} \Rightarrow t=\frac{23}{24}$

Đường thẳng d đi qua $A\left(\frac{1}{12};\frac{1}{12};\frac{23}{8}\right)$ và có vtcp $\vec{n}=(1;2;-3)$

Vậy d có phương trình $\frac{x-\frac{1}{12}}{1}=\frac{y-\frac{1}{12}}{2}=\frac{z-\frac{23}{8}}{-3}$.

Bài 3.3.21. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng (d): $\frac{x+3}{2}=y+1=z-3$, điểm $A(-2;3;4)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trên (P) đi qua giao điểm của (d) và (P) đồng thời vuông góc với d. Tìm trên Δ điểm M sao cho khoảng cách AM ngắn nhất.

Hướng dẫn giải.

Chuyển phương trình d về dạng tham số ta được: $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$.

Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(2t - 3; t - 1; t + 3)$.

Do $I \in (P) \Rightarrow 2t - 3 + 2(t - 1) - (t - 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1; 0; 4)$.

d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}(2;1;1)$, mp(P) có $\vec{n}(1;2;-1)$ là VTPT

Suy ra $\left[\vec{a}, \vec{n}\right] = (-3;3;3) \Rightarrow \vec{u}(-1;1;1)$ là một VTCP của Δ.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = 4 + u \end{cases}$.

Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-1 - u; u; 4 + u)$, $\Rightarrow \overrightarrow{AM}(1 - u; u - 3; u)$

AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp \Delta$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1 - u) + 1(u - 3) + 1.u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{4}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{-7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

Bài 3.3.22. Trong không gian Oxyz cho điểm A(3;2;3) và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Chứng minh đường thẳng d_1, d_2 và điểm A cùng nằm trong một mặt phẳng. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác ABC biết d_1 chứa đường cao BH và d_2 chứa đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

d_1 qua $M_0(2;3;3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;1;-2)$.

d_2 qua $M_1(1;4;3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1;-2;1)$.

Ta có $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \neq \vec{0}$ va $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\overrightarrow{M_0M_1} = 0$.

Phương trình mặt phẳng $(d_1, d_2): x + y + z - 8 = 0$ và $A \in (d_1, d_2)$

$$B(2 + t; 3 + t; 3 - 2t);\ M\left(\frac{t+5}{2}; \frac{t+5}{2}; 3 - t\right) \in d_2$$

Suy ra $t = -1 \Rightarrow B(3;4;1)$.

$C(1 + t; 4 - 2t; 3 + t): \overrightarrow{AC} \perp \vec{a} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow C(1;4;2)$.

Bài 3.3.23. Trong không gian Oxyz có 2 mặt phẳng (P): $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, (Q): $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ và 2 đường thẳng:

$$d_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3};\ d_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q), và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (1;4;-1)$ là VTPT.

(Q) có $\vec{n}_Q = (3;-4;9)$ là VTPT.

Đường thẳng d_1 có $\vec{u}_1 = (2;-4;3)$ là VTCP.

d_2 có $\vec{u}_2 = (-2;3;4)$ là VTCP.

Gọi: $\begin{cases} (\Delta') = (P) \cap (Q) \\ (P')//(P),\ (Q')//(Q) \\ (d_1) \subset (P'),\ (d_2) \subset (Q') \\ \vec{u} = \vec{u}_{\Delta'} \end{cases}$

Suy ra Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P′) và (Q′), và $\Delta // \Delta'$.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (32; -12; -16) = 4(8; -3; -4) = 4\overrightarrow{u'}$,

với $\overrightarrow{u'} = (8; -3; -4)$.

mp (P') có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{u'}$ nên có pháp vectơ:

$\vec{n}_{P'} = [\vec{u}_1; \overrightarrow{u'}] = (25; 32; 26)$.

Phương trình mp (P') chứa (d_1) đi qua điểm $A(-5; 3; -1) \in (d_1)$ với $\vec{n}_{P'}$ là:

$25(x + 5) + 32(y - 3) + 26(z + 1) = 0 \Leftrightarrow (P'): 25x + 32y + 26z + 55 = 0$.

mp (Q') có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{u'}$ nên có pháp vectơ:

$\vec{n}_{Q'} = [\vec{u}_2; \overrightarrow{u'}] = (0; 24; -18)$.

Phương trình mp (Q') chứa (d_2) đi qua điểm $B(3; -1; 2) \in (d_2)$ với $\vec{n}_{Q'}$ là:

$0(x - 3) + 24(y + 1) - 18(z - 2) = 0 \Leftrightarrow (Q'): 4y - 3x + 10 = 0$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 25x + 32y + 26z + 55 = 0 \\ 4y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$

Cho $z = 2 \Rightarrow y = -1, x = -3 \Rightarrow A(-3;-1;2) \in \Delta$.

Vậy, phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-4}$.

Bài 3.3.24. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};\ \Delta_2: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}.$$

1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ_3 đối xứng với Δ_2 qua Δ_1.
2. Xét mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+3=0$. Viết phương trình hình chiếu của Δ_2 theo phương Δ_1 lên mặt phẳng (α).

Hướng dẫn giải.

1. Đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x=3-7t_1 \\ y=1+2t_1 \\ z=1+3t_1 \end{cases}$ có $\vec{u_1}=(-7;\ 2;\ 3)$ là VTCP

$(\Delta_2): \begin{cases} x=7+7t_2 \\ y=3+2t_2 \\ z=9-t_2 \end{cases}$ đi qua A(7;3;9), B(8;5;8) và có $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-1)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A trên Δ_1.

$H \in (\Delta_1) \Rightarrow H(3-7t_1;\ 1+2t_1;\ 1+3t_1) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-4-7t_1;\ -2+2t_1;\ -8+3t_1)$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u_1} \Leftrightarrow -7(-4-7t_1)+2(-2+2t_1)+3(-8+3t_1)=0 \Leftrightarrow t_1=0 \Rightarrow H(3;\ 1;\ 1)$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua H suy ra A'(−1;−1;−7).

Gọi K là hình chiếu của B trên Δ_1 và B′ là điểm đối xứng của B qua K.

Tương tự như trên ta tìm được:

$$K\left(\frac{114}{31};\frac{25}{31};\frac{22}{31}\right) \Rightarrow B'\left(-\frac{20}{31};-\frac{105}{31};-\frac{204}{31}\right)$$

$$\overrightarrow{A'B'}=\left(\frac{11}{31};-\frac{74}{31};-\frac{13}{31}\right)=\frac{1}{31}(11;-74;13)=\frac{1}{31}.\vec{a},\ \text{với } \vec{a}=(11;-74;13).$$

Phương trình đường thẳng Δ_3 đối xứng với Δ_2 qua Δ_1 chính là phương trình đường thẳng A'B' qua A' với vectơ chỉ phương $\vec{a}$.

Vậy, phương trình chính tắc $\Delta_3: \dfrac{x+1}{11}=\dfrac{y+1}{-74}=\dfrac{z+7}{13}$

2. Mặt phẳng (β) chứa Δ_2 và $(\beta)//\Delta_1$

Suy ra $[\vec{u}_1;\ \vec{u}_2]=(-8;\ -4;\ -16)=-4(2;\ 1;\ 4)=-4\vec{n}_\beta$, với $\vec{n}_\beta=(2;\ 1;\ 4)$

Phương trình mp (β) qua $A(7;\ 3;\ 9) \in (\Delta_2)$ với pháp tuyến $\vec{n}_\beta$:

$$2x+y+4z-53=0.$$

Ta có: $(\alpha)\cap(\beta)=(\Delta_2')$ là hình chiếu của Δ_2 lên (α) theo phương Δ_1.

Vậy, phương trình hình chiếu $\Delta_2': \begin{cases} x=56-3t \\ y=-59+2t,\ t\in\mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Để lập phương trình mặt cầu (S) ta có các cách sau :

Cách 1 : Tìm tâm I(a;b;c) và bán kính R. Khi đó phương trình của (S) là : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Cách 2 : Giả sử phương trình của (S) có dạng :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Dựa vào giả thiết để bài ta tìm được a,b,c,d. Khi đó mặt cầu (S) có tâm I(a;b;c), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Khi tìm tâm và bán kính ta cần chú ý :

1) Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α).
- (S) và (α) tiếp xúc với nhau và chỉ khi $d(I,(\alpha))=R$.
- (S) và (α) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn khi và chỉ khi $d(I,(\alpha))<R$. Khi đó tâm của đường tròn giao tuyến là hình chiếu của I lên (α) và bán kính đường tròn là $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\alpha))}$.

2) Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ
- (S) và Δ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R$.
- (S) và Δ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $d(I,\Delta)<R$, khi đó hình chiếu H của I lên Δ là trung điểm của AB và $R^2=AH^2+IH^2$ hay là $R^2=\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I,\Delta)$.

Ví dụ 3.4.1. Trong không gian Oxyz cho điểm A(1;2;1). Lập phương trình mặt cầu (S), biết :

1. (S) đi qua A và các hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ.
2. (S) đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+1=0$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.
3. (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(\beta): x+y-z-2=0$ tại A và có tâm nằm trên mặt phẳng $(P): 2x+y-z+9=0$.

Lời giải.

1. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx. Suy ra $A_1(1;2;0)$, $A_2(0;2;1)$, $A_3(1;0;1)$.

Giả sử phương trình của (S) có dạng : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Vì (S) đi qua A, A_1, A_2, A_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a+4b+2c-d=6 \\ 2a+4b-d=5 \\ 4b+2c-d=5 \\ 2a+2c-d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c=\dfrac{1}{2} \\ b=1, d=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-x-2y-z=0$.

2. Gọi I là tâm của (S), do $I \in \Delta$ nên suy ra $I(1+t;2-2t;2+t)$

Vì (S) đi qua A và tiếp xúc với (α) nên ta có : $d(I,(\alpha)) = IA$

Hay $\dfrac{|1+t-2(2-2t)+2(2+t)+1|}{3} = \sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2} = R$

$\Leftrightarrow (7t+2)^2 = 9\left(6t^2+2t+1\right) \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$

Suy ra $I(2;0;3)$, $R=3$.

Phương trình $(S):(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=9$.

3. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (β)

Suy ra phương trình $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Vì (S) tiếp xúc với (β) tại A nên $IA \perp (\beta) \Rightarrow I \in d$

Suy ra $I(1+t;2+t;1-t)$.

Mặt khác $I \in (P)$ nên : $2(1+t)+2+t-(1-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-3$

Suy ra $I(-2;-1;4)$, $R = d(I,(\beta)) = 3\sqrt{3}$.

Phương trình $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=27$.

Ví dụ 3.4.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+6=0$

Lập phương trình mặt cầu (S) biết :

1. (S) đi qua $A(1;4;-3)$ có tâm nằm trên đường $\Delta: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{5}$, đồng thời (S) cắt (α) theo một đường tròn có diện tích bằng 16π
2. (S) có tâm nằm trên (α), đi qua hai điểm $B(1;0;-2)$, $C(1;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-10=0$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của mặt cầu (S).

1. Vì $I \in \Delta$ nên $I(2-t;3-2t;-4+5t)$

Ta có bán kính của đường tròn là giao tuyến của (S) và (α) là : $r=4$

Suy ra $IA^2 = r^2 + d^2(I,(\alpha))$

$\Leftrightarrow (1-t)^2+(2t+1)^2+(5t-1)^2 = 16+\dfrac{(10t-1)^2}{9}$

$\Leftrightarrow 9\left(30t^2-8t+3\right) = 144+100t^2-20t+1$

$\Leftrightarrow 170t^2-52t-118=0 \Leftrightarrow t=1, t=\dfrac{59}{85}$.

- Với $t=1 \Rightarrow I(1;1;1)$, $R=IA=5$.

Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$

- Với $t=-\dfrac{59}{85} \Rightarrow I\left(\dfrac{229}{85};\dfrac{373}{85};-\dfrac{127}{17}\right)$, $R=IA=\dfrac{\sqrt{6649}}{17}$.

Phương trình mặt cầu $(S): \left(x-\dfrac{229}{85}\right)^2+\left(y-\dfrac{373}{85}\right)^2+\left(z+\dfrac{127}{17}\right)^2=\dfrac{6649}{289}$.

2. Gọi $I(a;b;c)$, suy ra $2a-b+2c=-6$ (1)

Lại có $IB=IC \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2+(c+2)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$

$\Leftrightarrow b+3c=-2$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{-5c-7}{2} \\ b=-3c-1 \end{cases}$.

Vì (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I,(P)) = IC$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2a+2b+c-10|}{3} = \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4(10c+19)^2 = 9\left(65c^2+130c+101\right)$

$\Leftrightarrow 37c^2-70c-107=0 \Leftrightarrow c=-1, c=\dfrac{107}{37}$.

- Với $c=-1 \Rightarrow a=-1, b=2, R=d(I,(P))=3$.

Phương trình $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

- Với $c=\dfrac{107}{37} \Rightarrow a=-\dfrac{397}{37}, b=-\dfrac{358}{37}$, $R=\dfrac{1403}{111}$.

Phương trình $(S):\left(x+\dfrac{397}{37}\right)^2+\left(y+\dfrac{358}{37}\right)^2+\left(z-\dfrac{107}{37}\right)^2=\left(\dfrac{1403}{111}\right)^2$.

Ví dụ 3.4.3. Lập phương trình mặt cầu $S(I;R)$ biết

1) Mặt cầu có tâm $I(-2;3;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}.$$

2) Mặt cầu có tâm $I(-2;3;5)$ và cắt $\Delta': \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4$.

3) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, đi qua $M(2;3;20)$ và tiếp xúc với $d': \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z+19}{-2}$.

Lời giải.

1) Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;-2)$, VTCP $\vec{u}=(1;1;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(-3;4;1)$, $\overrightarrow{AI}\wedge\vec{u}=(-9;-5;-7)$

Vì mặt cầu tiếp xúc với Δ nên ta có:

$$R=d(I,\Delta)=\frac{\left|\overrightarrow{AI}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{930}}{6}.$$

Phương trình mặt cầu: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{930}{36}$.

2) Đường thẳng Δ' đi qua $B(-2;3;1)$, VTCP $\vec{u'}=(1;-1;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{BI}=(0;0;4)$, $\overrightarrow{BI}\wedge\vec{u'}=(4;4;0)$

$$\text{Do đó } h=d(I,\Delta')=\frac{\left|\overrightarrow{BI}\wedge\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u'}\right|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Gọi H là trung điểm AB, ta có $IH=h$, $AH=2$

Suy ra $R=\sqrt{h^2+AH^2}=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$.

Phương trình mặt cầu: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=\dfrac{44}{3}$.

3) Đường thẳng d' qua điểm $N(-4;-6;-19)$ và có $\vec{u}_{d'}(3;2;-2)$.

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;3+t;-1+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{MI}(t;t;21+2t)$, $\overrightarrow{NI}(6+t;9+t;18+2t)$ nên

$\overrightarrow{NI}\wedge\overrightarrow{u_{d'}}=(6t+54;-8t-66;t+15)$.

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\dfrac{\left|\overrightarrow{NI}\wedge u_{d'}\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{t^2+t^2+(21+t)^2}=\frac{\sqrt{(6t+54)^2+(-8t-66)^2+(t+15)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 17(3t^2+42t+441)=101t^2+1734t+7497\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\dfrac{102}{5}\end{array}\right..$$

- Với $t=0$ thì $I(2;\ 3;\ -1), R=21$ nên phương trình mặt cầu $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=441$.
- Với $t=-\dfrac{102}{5}$ thì $I\left(-\dfrac{92}{5};-\dfrac{87}{5};-\dfrac{209}{5}\right), R=\dfrac{\sqrt{20817}}{5}$ nên phương trình mặt cầu $\left(x+\dfrac{92}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{87}{5}\right)^2+\left(z+\dfrac{209}{5}\right)^2=\dfrac{20817}{25}$.

Ví dụ 3.4.4. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) biết

1. (S) có tâm $I(2;1;3)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+10=0$ theo một đường tròn có bán kính bằng 4.
2. (S) đi qua hai điểm $A(2;1;0), B(-2;3;2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$.
3. (S) có tâm $I(0;0;3)$ và cắt đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác AIB vuông tại I.

Lời giải.

1. Gọi R là bán kính mặt cầu

Ta có: $d(I,(P))=\dfrac{\left|2.2+1-2.3+10\right|}{3}=3$

Nên $R^2=4^2+3^2=25$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

2. Ta gọi I là tâm của mặt cầu cần tìm.

Theo giả thiết ta có $I\in d\Rightarrow I(1+2t;t;-2t)$

Mặt khác ta có : $\overrightarrow{IA}=(1-2t;1-t;2t)$; $\overrightarrow{IB}=(-3-2t;3-t;2+2t)$

Theo giả thiết mặt cầu cần tìm đi qua hai điểm A, B nên ta có :

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (1-2t)^2+(1-t)^2+(2t)^2 = (-3-2t)^2+(3-t)^2+(2+2t)^2$$

$$\Leftrightarrow 20t+20=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

Từ đây ta có : $I(-1;-1;2)$. Mặt khác bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{17}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là : $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=17$.

3. Gọi H là hình chiếu của tâm I xuống đường thẳng. Khi đó tọa độ của H có dạng $H(-1+t,\ 2t,\ 2+t)$.

Ta có $\overrightarrow{IH}=(-1+t,\ 2t,\ -1+t)$ và vector chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1,\ 2,\ 1)$.

Do $IH \perp d$ nên $\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_d=0$, tức $(-1+t)\cdot 1+2t\cdot 2+(-1+t)\cdot 1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Như vậy, ta tìm được tọa độ của H là $H\left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$.

Suy ra : $IH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vì tam giác IAB cân tại I nên nó vuông cân tại I, suy ra tam giác IHA cũng vuông cân tại H. Do đó,

$R=IA=\sqrt{2}IH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (ở đây R là bán kính của mặt cầu (S)).

Vậy phương trình của mặt cầu (S) cần tìm là $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{8}{3}$.

Ví dụ 3.4.5. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=-2+2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

1) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng Δ_2, tiếp xúc với đường thẳng Δ_1 và (α).
2) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_1, tiếp xúc với (α) và cắt đường thẳng Δ_2 tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{30}$.
3) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_2, tiếp xúc với Δ_1 và cắt (α) theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{13}$.

Lời giải.

1) Gọi I là tâm mặt cầu, R là bán kính. Do $I\in\Delta_2$ nên ta có: $I(3+t;-t;5+t)$.

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(-1;-2;-2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1I}=(t+4;-t+2;t+7)$, $\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}=(-3t-3;6;3t)$.

Do đó: $d(I,\Delta_1)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\sqrt{(t+1)^2+4+t^2}=\sqrt{2t^2+2t+5}$

Vì (S) tiếp xúc với Δ_1 và (α) nên ta có: $d(I,(\alpha))=d(I,\Delta_1)=R$.

$\Leftrightarrow |t+5|=\sqrt{2t^2+2t+5}\Leftrightarrow t^2-8t-20=0\Leftrightarrow t=10, t=-2$

- Với $t=-2$, suy ra $I(1;2;3)$, $R=3$.

Phương trình $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

- Với $t=10$, suy ra $I(13;-10;15)$, $R=15$.

Phương trình $(S): (x-13)^2+(y+10)^2+(z-15)^2=225$.

2) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-1+2t;-2+t;-2+2t)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(3;0;5)$, có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;1)$

Suy ra $\overrightarrow{M_2I}=(2t-4;t-2;2t-7)$, $\overrightarrow{M_2I}\wedge\overrightarrow{u_2}=(3t-9;-3;-3t+6)$,

nên $d(I,\Delta_2)=\sqrt{3\left[(t-3)^2+1+(t-2)^2\right]}=\sqrt{3(2t^2-10t+14)}$

Vì mặt cầu tiếp xúc với (α) nên $R=d(I,(\alpha))=|3t-3|$

Từ đẳng thức $R^2=\frac{MN^2}{4}+d^2(I,\Delta_2)$ ta có:

$(3t-3)^2=30+3(2t^2-10t+14)\Leftrightarrow t^2+4t-21=0\Leftrightarrow t=-7, t=3$

- Với $t=3$, suy ra $I(5;1;4)$, $R=6$.

Phương trình $(S): (x-5)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=36$

- Với $t=-7$, suy ra $I(-15;-9;-16)$, $R=24$.

Phương trình $(S): (x+15)^2+(y+9)^2+(z+16)^2=576$.

3) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(3+t;-t;5+t)$.

Ta có: $R=d(I,\Delta_1)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\sqrt{2t^2+2t+5}$.

Vì (S) cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{13}$ nên ta có:

$R^2=r^2+d^2(I,(\alpha))\Leftrightarrow 2t^2+2t+5=13+(t+5)^2$

$\Leftrightarrow t^2-8t-33=0\Leftrightarrow t=-3, t=11$.

- Với $t=-3$, suy ra $I(0;3;2)$, $R=\sqrt{17}$

  Phương trình $(S): x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=17$.

- Với $t=11$, suy ra $I(14;-11;16)$, $R=\sqrt{269}$

  Phương trình $(S): (x-14)^2+(y+11)^2+(z-16)^2=269$.

Ví dụ 3.4.6. Trong không gian Oxyz, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$.

1) Chứng minh rằng khi a, b, c thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định.
2) Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R.
3) Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

   Chứng minh rằng: $\frac{1}{4}<r\le\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Lời giải.

1) Sử dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(ABC) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Mặt khác $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2\Leftrightarrow\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}=1$

Suy ra mặt phẳng (P) luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

2) Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp OABC có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0.$$

Thay tọa độ các điểm A,B,C,O vào ta có:

$$\begin{cases}a^2-2ma+q=0\\b^2-2nb+q=0\\c^2-2cp+q=0\\p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{a}{2};\ n=\dfrac{b}{2}\\p=\dfrac{c}{2};\ q=0\end{cases}$$

Suy ra tâm của mặt cầu (S) là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$

và bán kính $R=IO=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^2+\frac{27}{8a}+\frac{27}{8a}\ge\frac{27}{4}\Leftrightarrow a^2+\frac{27}{4a}\ge\frac{27}{4}$.

Ta cũng có hai BĐT tương tự : $b^2+\frac{27}{4b}\ge\frac{27}{4}$; $c^2+\frac{27}{4c}\ge\frac{27}{4}$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{27}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{81}{4}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{27}{4}\Rightarrow R\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2}$. Vậy $\min R=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3) Ta có thể tích của tứ diện OABC là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện: $S_{tp}=\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$

Suy ra $r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

Từ giả thiết, suy ra $ab+bc+ca=2abc$.

Mà $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$ nên $r\le\frac{abc}{2abc+\frac{2}{\sqrt{3}}abc}=\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Mặt khác: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2<(ab+bc+ca)^2=(2abc)^2\Rightarrow r>\frac{abc}{4abc}=\frac{1}{4}$.

* **Bài tập vận dụng**

Bài 3.4.1. Lập phương trình mặt cầu (S) biết

1) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$
2) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên Ox và đi qua $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$
3) Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $mp(P): 2x-y+2z+4=0$.
4) Mặt cầu (S) đi qua $C(2;-4;3)$ và các hình chiếu của C lên ba trục tọa độ.
5) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên mp(Oxy) và đi qua $M(1;0;2), N(-2;1;1)$, và $P(-1;-1;1)$.

Hướng dẫn giải

1) Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$
2) Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in Ox\Rightarrow I(x;0;0)$

   Ta có $IA^2=IB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+2^2+1^2=(x-3)^2+1^2+(-2)^2\Leftrightarrow x=2$

Suy ra tâm I(2;0;0) và bán kính $R^2 = IB^2 = 6$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 6$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm I(3;−2;4) và tiếp xúc với mp(P)

Suy ra $R = d(I,(P)) = \dfrac{|2.3+2+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{20}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \dfrac{400}{9}$.

4) Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là hình chiếu của C lên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz

Suy ra $C_1(2;0;0)$, $C_2(0;-4;0)$, $C_3(0;0;3)$.

Giả sử $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do (S) đi qua C, C_1, C_2, C_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -4a+8b-6c+d=-29 \\ -4a+d=-4 \\ 8b+d=-16 \\ -6c+d=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{d+4}{4} \\ b=-\dfrac{d+16}{8} \\ c=\dfrac{d+9}{6} \\ -2d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=\dfrac{3}{2} \\ d=0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z = 0$.

5) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oxy) nên I(x;y;0)

Ta có: $\begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IN^2 = IP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y=1 \\ 2x-4y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{10} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Và $R^2 = IM^2 = \dfrac{109}{20}$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): \left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2 + \left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2 + z^2 = \dfrac{109}{20}$.

Bài 3.4.2. Lập phương trình mặt cầu S(I,R) biết

1) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1): 3x+2y+z-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha_2): 2x+3y+z=0$

2) Mặt cầu có tâm I(1;3;5) và cắt $\Delta': \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho AB = 12

3) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$, đi qua M(1;1;4) và tiếp xúc với $d': \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{-4}$

Hướng dẫn giải

1) Vì tâm $I \in \Delta$ nên $I(-2+t;\ 1+2t;\ -1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên :

$d(I, (\alpha_1)) = d(I, (\alpha_2)) = R$

Suy ra $\dfrac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow |6t-11| = |7t-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6t-11=7t-2 \\ 6t-11=2-7t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-9 \\ t=1 \end{array}\right.$

- Nếu t = 1 thì $I(-1;\ 3;\ -3), R = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{25}{14}$.

- Nếu t = −9 thì $I(-11;\ -17;\ 17), R = \dfrac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $(x+11)^2 + (y+17)^2 + (z-17)^2 = \dfrac{4225}{14}$.

2) Đường thẳng Δ' qua điểm M(2; −3; 0) và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;\ 1;\ 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}(1;\ 6;\ 5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta}\right] = (1;\ -4;\ 5)$, do đó

$$d(I, \Delta') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|} = \frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \sqrt{14}$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A,B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : $R^2 = d^2(I, \Delta') + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 14 + 36 = 50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 50$.

3) Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;-t;3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(t+1;-t-1;2t-1)$, $\overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t)$ nên

$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2)$.

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$,

hay $\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2}=\dfrac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$

$$\Leftrightarrow 18(6t^2+3)=44t^2+160t+278\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1),R=9$ nên phương trình mặt cầu

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

- Với $t=\dfrac{7}{2}$ thì $I\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2};10\right),R=\dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+(z-10)^2=\frac{153}{2}.$$

Bài 3.4.3. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0.$$

Tìm m sao cho:

1) Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$.

2) Mặt cầu cắt mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+1=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 4π.

3) Mặt cầu cắt đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB vuông (I là tâm mặt cầu).

Hướng dẫn giải

Điều kiện tồn tại mặt cầu $14-m>0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{14-m}$.

1) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là

$$d(I;(P))=\frac{|-1-2.2+2.(-3)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=4$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên $R=4\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-2$.

2) Ta có $d(I;(Q))=\dfrac{|-2-2+6+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$.

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là 4π nên có bán kính $r=2$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$R^2=r^2+d^2(I,(Q))\Leftrightarrow R^2=5\Leftrightarrow 14-m=5\Leftrightarrow m=9$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m=9$.

3) Gọi $H(-1-t;2t;2-t)$ là hình chiếu của $I(-1;2;-3)$ trên Δ.

Ta có $\overrightarrow{IH}(-t;2t-2;5-t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}(-1;2;-2)$ nên

$IH\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t+4t-4-10+2t=0\Leftrightarrow t=2$

Vậy $\overrightarrow{IH}(-2;2;3)\Rightarrow IH=\sqrt{17}$.

Do tam giác IAB cân tại I nên vuông cân tại I, do đó tam giác IHA cũng vuông cân tại H, vì thế $R=IA=\sqrt{2}.IH=\sqrt{34}\Rightarrow\sqrt{14-m}=\sqrt{34}\Rightarrow m=-20$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-20$.

Bài 3.4.4. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y+z+7=0$.

1) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó.

2) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=5$.

1) Ta có $d(I,(\alpha))=\dfrac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=4<R$, suy ra (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\alpha))}=3$.

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α), suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \\ 2x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\dfrac{5}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy tâm $H\left(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;6;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Vì $IA < R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{25 - d^2(I,(P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có $IH \le IK$ nên suy ra $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$.

Do $H \in AB \Rightarrow H(1 + t; -1 + 3t; 2 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (t; 3t - 2; 1 - 2t)$

Vì $IH \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t + 3(3t - 2) - 2(1 - 2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\frac{4}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$

Vậy phương trình $(\alpha): 4x - 2y - z - 4 = 0$.

Bài 3.4.5. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{n_1} = (2;-2;-1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1;2;-2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra $\vec{u} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2;1;2)$ là VTCP của đường thẳng d.

Hơn nữa điểm $A(6;4;5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A \in d$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ với $m < 13$.

$\overrightarrow{IA} = (8;1;5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right] = (-3;-6;6) \Rightarrow d(I,d) = 3$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 4$ và $IH = 3$.

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2 = IH^2 + AH^2 \Leftrightarrow R^2 = 9 + 16$
$\Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$.

Vậy $m = -12$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.4.6. Trong không gian với hệ truch tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Với m vừa tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I, vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)

$$\Leftrightarrow d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|m^2 + 3m - 1\right|}{3} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \ \text{VN} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -5, m = 2$$

Khi đó $(P): 2x + 2y + z - 10 = 0$. Tọa độ tiếp điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 2x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được $x = 3, y = 1, z = 2 \Rightarrow A(3;1;2)$.

Bài 3.4.7. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$.

1) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) với mp(P) là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π.

2) Chứng minh rằng mặt cầu (S) nói trong phần 1 tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 2x - 2 = y + 3 = z$.

3) Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

Hướng dẫn giải

1) Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C).

Ta có: $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$ và $d(I,(P)) = 3$ nên $R = \sqrt{r^2 + d^2(I,(P))} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

2) Đường thẳng Δ có $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;2)$ là VTCP và đi qua $A(1;-3;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(0;5;-2)\Rightarrow[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]=(-14;2;5)\Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=5$.

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Cách 2.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\\z=2t\end{cases}$, thay vào phương trình mặt cầu (S), ta được: $t^2+(2t-5)^2+(2t+2)^2=25\Leftrightarrow(3t-2)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra mặt cầu (S) và Δ giao nhau tại một điểm $M(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3})$.

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M.

3) Vì mp(Q) chứa Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) nên M là tiếp điểm của mp(Q) và mặt cầu (S).

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{11}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):2x-11y+10z-35=0$.

Bài 3.4.8. Lập phương trình mặt cầu (S), biết (S):

1) Có tâm $I(1;1;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+2y+2z+1=0$.

2) Có bán kính $R=3$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x+2y+2z+3=0$ tại điểm $A(1;1;-3)$.

3) Có tâm nằm trên đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-2=0$ và $(Q):x+2y-2z+4=0$.

4) Đi qua bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$, $C(-2;2;2)$ và $D(1;-1;2)$.

5) Có tâm thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-2=0$ và đi qua ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có, bán kính mặt cầu $R=d(I,(P))=\dfrac{|1+2+4+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{8}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\dfrac{64}{9}$.

2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Suy ra phương trình của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=-3+2t\end{cases}$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại A nên tâm $I\in\Delta\Rightarrow I(1+t;1+2t;-3+2t)$

Và $d(I,(P))=R=3\Leftrightarrow\dfrac{|9t|}{3}=3\Leftrightarrow t=\pm1$.

- Với $t=1\Rightarrow I(2;3;-1)\Rightarrow(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$.
- Với $t=-1\Rightarrow I(0;-1;-5)\Rightarrow(S):x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm $I\in d\Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $d(I,(P))=d(I,(Q))=R$

$\Leftrightarrow\dfrac{|3t|}{3}=\dfrac{|6-3t|}{3}\Leftrightarrow3t=-6+3t\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(-1;3;3)$ và $R=1$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$.

4) Giả sử phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

$$\text{Vì } A,B,C,D\in(S)\Rightarrow\begin{cases}-2b+d+1=0\\-4a-6b-2c+d+14=0\\4a-4b-4c+d+12=0\\-2a+2b-4c+d+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2b-1\\-4a-4b-2c+13=0\\4a-2b-4c+11=0\\-2a+4b-4c+5=0\end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2},c=\dfrac{5}{2},d=2$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-x-3y-5z+2=0$.

5) Giả sử phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

$$\text{Vì }\begin{cases}A,B,C\in(S)\\I\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c-2=0\\-4a-2c+d+5=0\\-2a+d+1=0\\-2a-2b-2c+d+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ -2a - 2c + 4 = 0 \\ a + b + c - 2 = 0 \\ -2b - 2c + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Bài 3.4.9. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 12 = 0$.

1) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O và cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn có bán kính bằng 3.

2) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(2;0;3)$, có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ và tiếp xúc với (α).

3) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(\beta): x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

1) Gọi R là bán kính mặt cầu (S), $h = d(O,(\alpha)) = 4$ và $r = 3$ là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và (α).

Ta có: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = 5$.

Phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

2) Gọi I là tâm của mặt cầu, $I \in \Delta$ nên suy ra $I(2-t;-3+2t;3-t)$.

Theo đề bài ta có: $d(I,(\alpha)) = IA = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+5|}{3} = \sqrt{6t^2 - 12t + 9} \Leftrightarrow (2t+5)^2 = 9(6t^2 - 12t + 9)$$

$$\Leftrightarrow 25t^2 - 64t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = \frac{14}{25}.$$

- Với $t = 2 \Rightarrow I(0;1;1), R = 3$.

  Phương trình $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

- Với $t = \dfrac{14}{25}$, suy ra $I\left(\dfrac{36}{25};-\dfrac{47}{25};\dfrac{61}{25}\right)$ và $R = \dfrac{51}{25}$.

  Phương trình $(S): \left(x - \dfrac{36}{25}\right)^2 + \left(y + \dfrac{47}{25}\right)^2 + \left(z - \dfrac{61}{25}\right)^2 = \left(\dfrac{51}{25}\right)^2$.

3) Gọi I là tâm mặt cầu, ta có $I(t;1-t;2t)$

Do (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên ta có

$$R = d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta)) \Leftrightarrow \frac{|5t-11|}{3} = \frac{|t+1|}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

- Với $t = 3 \Rightarrow I(3;-2;6)$, bán kính $R = \dfrac{4}{3}$.

  Phương trình $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = \dfrac{16}{9}$.

- Với $t = \dfrac{5}{3} \Rightarrow I\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$, bán kính $R = \dfrac{8}{9}$.

  Phương trình $(S): \left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \dfrac{10}{3}\right)^2 = \dfrac{64}{81}$.

Bài 3.4.10. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$.

1) Tìm m để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(3;2;1)$.

2) Tìm m để mặt cầu (S) cắt mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

3) Tìm m để mặt cầu (S) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm M, N sao cho MN = 8.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{17 - m}$ với $m < 17$.

1) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua Δ và A.

Ta có Δ đi qua $B(1;-1;3)$, có VTCP $\vec{u} = (2;2;1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-2;-3;2)$, $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = (-7;6;2)$.

Phương trình $(P): 7x - 6y - 2z - 7 = 0$.

Do đó (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi

$$d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \sqrt{17 - m} = \frac{32}{\sqrt{89}} \Leftrightarrow m = \frac{489}{89}.$$

2) Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (S) với (β)

Ta có: $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$, $d(I,(\beta)) = 2$.

Vì $R^2 = r^2 + d^2(I,(\beta))$ nên ta có: $17 - m = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow m = -3$.

3) Ta có $\overrightarrow{IB} = (2;-3;0) \Rightarrow \overrightarrow{IB} \wedge \vec{u} = (-3;-2;10)$

Do đó $d(I,\Delta) = \dfrac{\left|\overrightarrow{IB} \wedge \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{113}}{3}$.

Vậy $R^2 = \dfrac{MN^2}{4} + d^2(I,\Delta) \Leftrightarrow 17 - m = 16 + \dfrac{113}{9} \Leftrightarrow m = -\dfrac{104}{9}$.

§ 5. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Phương pháp: Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$.

1) Tìm M sao cho $P = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > 0$

b) Lớn nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 0$

2) Tìm M sao cho $P = \left|\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất, trong đó $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Khi đó :

1) $P = \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right)^2 + \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right)^2 + ... + \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)^2$

$= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)IM^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 IA_i^2$

Do $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 IA_i^2$ không đổi nên:

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

2) $P = \left|\alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right) + ... + \alpha_n\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right|.MI$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Chú ý:

- Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).
- Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S), cắt (S) tại hai điểm A, B $(IA > IB)$ thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ $(M \equiv A)$.

Bài toán 2. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1) MA + MB nhỏ nhất.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất với $d(A, (P)) \neq d(B, (P))$.

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) > 0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1) MA + MB nhỏ nhất.

- *Trường hợp 1:* Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên MA + MB nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- *Trường hợp 2:* Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và MA = MA' nên $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Vậy MA + MB nhỏ nhất bằng A'B khi $M = A'B \cap (P)$.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất.

- *Trường hợp 1:* Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- *Trường hợp 2:* Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và $MA = MA'$ nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$.

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng A'B khi $M \equiv A'B \cap (P)$.

Bài toán 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1) (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \notin \Delta$ đến (P) lớn nhất.

2) (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

3) (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1) Giả sử đường thẳng $\Delta: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ và $A(x_0; y_0; z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$,

trong đó $Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\frac{bB + cC}{a}$ $(a \ne 0)$ **(1)**

Khi đó $d(A,(P)) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **(2)**

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \frac{B}{C}$, ta đươc $d(A,(P)) = \sqrt{f(t)}$,

trong đó $f(t) = \frac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$. Khảo sát hàm f(t) ta tìm được max f(t). Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B.

2) và 3) làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1) Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P)) = AH \le AK$, mà AK không đổi. Do đó d(A,(P)) lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2) Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow ((P),(Q)) = 90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

- Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó.

Hạ $CH \perp (P)$, $CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$.

Ta có $\sin\widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \ge \frac{BK}{BC}$.

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3) Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$.

Ta có $\cos\widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \ge \frac{KM}{AM}$.

Mà $\frac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

Ví dụ 3.5.1 Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$.

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{-1}$ sao cho $P = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$ sao cho $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

3) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Gọi $D(x;y;z)$ là điểm thỏa $2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} + 3(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - 4(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$ (1)

Mà $\overrightarrow{DA} = (1 - x; 1 - y; 1 - z)$, $\overrightarrow{AC} = (2;-2;1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1)$

Nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 4.2 - 3.(-2) \\ 1 - y = 4.(-2) - 3.1 \\ 1 - z = 4.1 - 3.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 12 \\ z = -6 \end{cases} \Rightarrow D(-13;12;-6)$.

Khi đó:

$$P = 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$= MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC}\right) + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$$

$$= MD^2 + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$$

Do $2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$ không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi MD nhỏ nhất.

Mà M thuộc Δ nên MD nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của D lên Δ.

Ta có: $M(1+2t;t;-1-t) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = (2t+14;t-12;-t+5)$

Vì $DM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t+14) + (t-12) - (-t+5) = 0$

$$\Leftrightarrow 6t + 11 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{11}{6} \Rightarrow M\left(-\frac{8}{3};-\frac{11}{6};\frac{5}{6}\right).$$

Vậy $M\left(-\frac{8}{3};-\frac{11}{6};\frac{5}{6}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Gọi $F(x;y;z)$ là điểm thỏa điều kiện :

$$3\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} - 7\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB}.$$

Từ đây ta tìm được $F(-23;20;-11)$

Khi đó: $P = \left|3\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}\right) + 5\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FB}\right) - 7\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC}\right)\right| = MF$

Do đó P nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của F lên (α)

Suy ra phương trình $MF: \begin{cases} x = -23 + 2t \\ y = 20 - t \\ z = -11 + 2t \end{cases} \Rightarrow M(-23+2t;20-t;-11+2t)$

Mà $M \in (\alpha)$ nên ta có: $2(2t-23) - (20-t) + 2(2t-11) + 7 = 0 \Leftrightarrow t = 9$

Vậy $M(-5;11;7)$ là điểm cần tìm.

3) Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KA} - 7\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, suy ra $K(-21;16;10)$

Khi đó: $P = -MK^2 + 2KA^2 - 7KB^2 + 4KC^2$

Suy ra P nhỏ nhất khi và chỉ khi MK lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, suy ra $\overrightarrow{KI} = (22;-16;-11)$

Phương trình $KI: \begin{cases} x = 1 + 22t \\ y = -16t \\ z = -1 - 11t \end{cases}$

Thay phương trình của KI vào phương trình (S) ta có:

$(22t)^2 + (-16t)^2 + (-11t)^2 = 861 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Suy ra KI cắt (S) tại hai điểm $K_1(23;-16;-12)$, $K_2 = (-21;16;10)$

Vì $KK_1 > KK_2$ nên MK lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Vậy $M(23;-16;-12)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 8 = 0$ và ba điểm $A(1;1;-1)$, $B(-3;5;5)$, $C(7;-4;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (α) sao cho:

1) $MA + MB$ nhỏ nhất

2) $|MA - MC|$ lớn nhất.

Lời giải.

Với $M(x;y;z)$, ta đặt $f(M) = 2x - y + 2z - 8$

Ta có $f(A).f(B) > 0$, $f(A).f(C) < 0$ nên A, B ở về cùng một phía so với (α), còn A và C nằm về hai phía so với (α).

1) Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua (α).

Ta có phương trình AA' là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm I của AA' và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \Rightarrow I(3;0;1) \\ z = 1 \end{cases}$$

Vì I là trung điểm của AA′ nên $A'(5;-1;3)$ và A′, B nằm khác phía so với (α)

Khi đó với mọi điểm M thuộc (α), ta luôn có:

$MA + MB = A'M + MB \ge A'B$. Đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (\alpha)$

Ta có: $\overrightarrow{A'B} = (-8;6;2)$, phương trình $A'B: \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow M(1;2;4) \\ z = 4 \end{cases}$.

Vậy $M(1;2;4)$ là điểm cần tìm.

2) Ta có A', C nằm về khác phía so với (α).

Khi đó với mọi điểm M thuộc (α), ta có:

$|MA - MC| = |MA' - MC| \le A'C$. Đẳng thức xảy ra khi $M = A'C \cap (\alpha)$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} = (2;-3;1)$ phương trình A'C: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy M(3;2;2) là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(-3;-2;3)$, $C(5;4;-7)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho: $MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $M \in \Delta$ nên $M(1+t;2t;-1-t)$, suy ra

$\overrightarrow{AM} = (t-2;2t-2;-t)$, $AM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$

$\overrightarrow{BM} = (t+4;2t+2;-t-4)$, $BM = \sqrt{6t^2 + 24t + 36}$

$\overrightarrow{CM} = (t-4;2t-4;-t+6)$, $CM = \sqrt{6t^2 - 36t + 68}$

Ta có $MA + MB = \sqrt{6(t-1)^2 + 2} + \sqrt{6(t+2)^2 + 12}$

$$= 6\left[\sqrt{(1-t)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t+2)^2 + 2}\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Ta có:

$$\sqrt{(1-t)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t+2)^2 + 2} \ge \sqrt{(1-t+2+t)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{34\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}$$

Suy ra $MA + MB \ge 2\sqrt{34\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1-t}{t+2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+1} = \dfrac{8-3\sqrt{6}}{5}$

Hay $M\left(\dfrac{13-3\sqrt{6}}{5}; \dfrac{16-6\sqrt{6}}{5}; \dfrac{-13+3\sqrt{6}}{5}\right)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.4. Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $M(1;2;1)$, $N(-1;0;2)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và cách O một khoảng lớn nhất
2) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (α) một góc nhỏ nhất
3) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, N và tạo với Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua A(1;1;0)

1) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (P) chứa Δ nên phương trình của (P) có dạng:

$a(x-1) + b(y-1) + cz = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ và $a + 2b + 2c = 0$

Khi đó $d(O,(P)) = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|b+2c|}{\sqrt{5b^2 + 8bc + 5c^2}}$

Nếu $c = 0$ ta có $d(O,(P)) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Nếu $c \ne 0$, ta có: $d(O,(P)) = \sqrt{\dfrac{b^2 + 4bc + 4c^2}{5b^2 + 8bc + 5c^2}} = \sqrt{\dfrac{t^2 + 4t + 4}{5t^2 + 8t + 5}}$, $t = \dfrac{b}{c}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 + 4t + 4}{5t^2 + 8t + 5}$, ta có:

$f'(t) = \dfrac{-12t^2 - 30t - 12}{(5t^2 + 8t + 5)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = -\dfrac{1}{2}$

Do $f(-2) = 0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{10}$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = \dfrac{1}{5}$ nên ta có $\max f(t) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Suy ra $d(O,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{b}{c} = -\dfrac{1}{2}$

Ta chọn $b = 1$, $c = -2 \Rightarrow a = 2$.

Vậy phương trình $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học

Gọi K là hình chiếu của O lên Δ, suy ra

$K(1+t;1+2t;2t)$, $\overrightarrow{OK}=(1+t;1+2t;2t)$

Vì $OK\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 1+t+2(1+2t)+2.2t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

Suy ra $K\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{OK}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P), ta có: $d(O,(P))=OH\le OK=1$

Đẳng thức xảy ra khi $H\equiv K$.

Do đó (P) cách O một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi (P) đi qua K và vuông góc với OK. Từ đó ta suy ra phương trình của (P) là: $2x+y-2z-3=0$.

2) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (Q) chứa Δ nên phương trình của (Q) có dạng:

$a(x-1)+b(y-1)+cz=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$ và $a+2b+2c=0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Q) và (α), ta có:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4|b|}{3\sqrt{5b^2+8bc+5c^2}}.$$

Nếu $c=0$, ta có $\cos\varphi=0$

Nếu $c\ne 0$, ta có $\cos\varphi=\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{\sqrt{5t^2+8t+5}}$, với $t=\dfrac{c}{b}$.

Ta có φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow 5t^2+8t+5$ nhỏ nhất.

Mà $5t^2+8t+5=5\left(t+\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{9}{5}\ge\dfrac{9}{5}$. Đẳng thức có khi $t=-\dfrac{4}{5}$.

Do đó, φ nhỏ nhất khi $\dfrac{c}{b}=-\dfrac{4}{5}$, ta chọn $c=4,\ b=-5,\ a=2$

Vậy phương trình $(Q): 2x-5y+4z+3=0$.

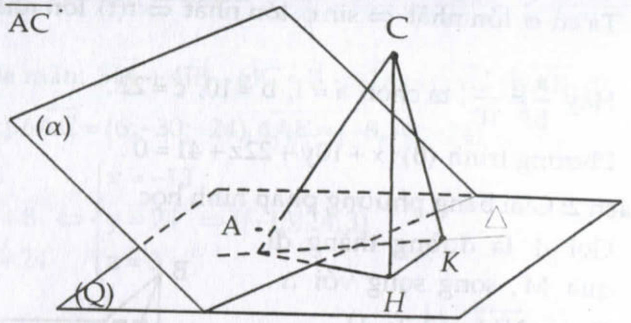
Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)

Ta có phương trình $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2t\end{cases}$, lấy $C(2;-1;2)\in d$, $C\ne A$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (Q) và Δ, khi đó $\varphi=\widehat{BCH}$ và

$\sin\varphi=\sin\widehat{ACH}=\dfrac{AH}{AC}\ge\dfrac{AK}{AC}$.



Mà $\dfrac{AK}{AC}$ không đổi, nên suy ra φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$ hay (α) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (ACK).

Mặt phẳng (ACK) đi qua Δ và vuông góc với (α) nên

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-8;0;4)$ là VTPT của (ACK).

Do (Q) đi qua Δ và vuông góc với (ACK) nên

$\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-8;20;-16)=-4(2;-5;4)$

Vậy phương trình $(Q): 2x-5y+4z+3=0$.

3) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (β) đi qua M nên phương trình (β) có dạng:

$a(x-1)+b(y-2)+c(z-1)=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$

$N\in(\alpha)$ nên suy ra $-2a-2b+c=0\Leftrightarrow c=2a+2b$

Gọi φ là góc giữa Δ và (β), ta có:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=\frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5a+6b|}{3\sqrt{5a^2+8ab+5b^2}}$$

+ Nếu $b=0$, ta có $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

+ Nếu $b\ne 0$, ta có: $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{25a^2+60ab+36b^2}{5a^2+8ab+5b^2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{25t^2+60t+36}{5t^2+8t+5}}$, $t=\dfrac{a}{b}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{25t^2+60t+36}{5t^2+8t+5}$, có $f'(t)=\dfrac{-100t^2-110t+12}{(5t^2+8t+5)^2}$.

Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{10},\ t=-\dfrac{6}{5}$

$\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=5,\ f\left(\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{65}{9},\ f\left(-\dfrac{6}{5}\right)=0$.

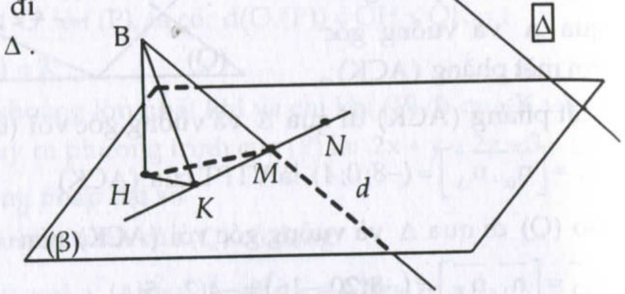
Ta có φ lớn nhất ⇔ sinφ lớn nhất ⇔ f(t) lớn nhất ⇔ $t=\frac{1}{10}$

Hay $\frac{a}{b}=\frac{1}{10}$, ta chọn $a=1,\ b=10,\ c=22$.

Phương trình $(\beta): x+10y+22z+41=0$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học

Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ.



Ta có: $\overrightarrow{NM}=(2;2;-1)$

Suy ra phương trình

$$d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}.$$

Trên d ta lấy điểm B(3;4;0).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (β) và MN,

khi đó: $\widehat{((\alpha),\Delta)}=\widehat{BMH}$.

Ta có: $\cos\widehat{BMH}=\frac{MH}{MB}\geq\frac{MK}{MB}$, mà $\frac{MK}{MB}$ không đổi nên $\widehat{BMH}$ lớn nhất ⇔ H ≡ K

Hay (β) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\gamma)=(MN,d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\gamma}=\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}=(6;-5;2)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-1;-10;-22)$

Vậy phương trình $(\beta): x+10y+22z+41=0$.

* **Bài tập tự luyện**

Bài 3.5.1. Trong không gian cho ba điểm A(1;2;3), B(−1;0;−3), C(2;−3;−1).

1) Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z-1=0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất $S=3MA^2+4MB^2-6MC^2$.

2) Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P=\left|\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$.

3) Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36$ sao cho biểu thức

$F=MA^2-4MB^2+2MC^2$.

Đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) **Cách 1:**

Gọi I(x;y;z) là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=6\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z), 6\overrightarrow{AC}=(6;-30;-24), 4\overrightarrow{AB}=(-8;-8;-24)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=6+8\\ 2-y=-30+8\\ 3-z=-24+24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-13\\ y=24\\ z=3\end{cases}\Rightarrow I(-13;24;3)$.

Khi đó:

$$S=3\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2-6\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$
$$=IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+4IB^2-6IC^2$$
$$=IM^2+3IA^2+4IB^2-6IC^2.$$

Do $3IA^2+4IB^2-6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất ⇔ IM nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu của I lên (α). Ta có $IM\perp(\alpha)\Rightarrow IM:\begin{cases}x=-13+2t\\ y=24+t\\ z=3-2t\end{cases}$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=-13+2t\\ y=24+t\\ z=3-2t\\ 2x+y-2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\ y=25\\ z=1\end{cases}$.

Vậy M(−11;25;1) là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+b-2c-1=0$

Suy ra: $3MA^2=3a^2+3b^2+3c^2-6a-12b-18c+42$;

$4MB^2=4a^2+4b^2+4c^2+8a+24c+40$;

$6MC^2=6a^2+6b^2+6c^2-24a+36b+12c+84$;

Suy ra $S=a^2+b^2+c^2+26a-48b-6c-2$

$=(a+11)^2+(b-25)^2+(c-1)^2+4a+2b-4c-749\geq 2(2a+b-2c-1)-747\geq -747$.

Đẳng thức xảy ra ⇔ a = −11, b = 25, c = 1 hay M(−11;25;1) là điểm cần tìm.

2) **Cách 1:** Gọi I(x;y;z) là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z)$, $-7\overrightarrow{AB}=(14;14;42)$, $5\overrightarrow{AC}=(5;-25;-20)$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=14+5 \\ 2-y=14-25 \\ 3-z=42-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-18 \\ y=13 \\ z=-19 \end{cases} \Rightarrow I(-18;13;-19)$.

Khi đó: $P=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=MI$.

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$M\in\Delta\Rightarrow M(1+2t;-1+3t;1-t)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(2t+19;3t-14;-t+20)$

Vì $IM\perp\Delta\Rightarrow 2(2t+19)+3(3t-14)-(-t+20)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{12}{7}$.

Vậy $M\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{29}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M\in\Delta\Rightarrow M(1+2t;-1+3t;1-t)$

Suy ra $\overrightarrow{MA}=(-2t;3-3t;2+t)$, $-7\overrightarrow{MB}=(14+14t;-7+21t;28-7t)$,
$5\overrightarrow{MC}=(5-10t;-10-15t;-10+5t)$.

Do đó $\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=(2t+19;3t-14;-t+20)$.

Nên $P^2=(2t+19)^2+(3t-14)^2+(t-20)^2=14t^2-48t+957=14\left(t-\dfrac{12}{7}\right)^2+\dfrac{6411}{7}\geq\dfrac{6411}{7}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=\dfrac{12}{7}$. Vậy $M\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{29}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

3) Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA}-4\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

Ta tìm được $E(10;-2;16)$.

Khi đó $F=-EM^2+EA^2-4EB^2+2EC^2$

Vì $EA^2-4EB^2+2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;8)$, $\overrightarrow{IE}=(8;-4;8)\Rightarrow IE:\begin{cases} x=2+8t \\ y=2-4t \\ z=8+8t \end{cases}$.

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=2+8t \\ y=2-4t \\ z=8+8t \\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36 \end{cases}\Rightarrow 8^2t^2+4^2t^2+8^2t^2=36\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}.$$

- Với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M(6;0;12)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(2;-2;4)\Rightarrow MI=2\sqrt{6}$.
- Với $t=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow N(-2;4;4)\Rightarrow\overrightarrow{IN}=(-4;2;4)\Rightarrow NI=6$.

Do $NI>MI$ nên ta có được:

- F lớn nhất khi và chỉ khi $E\equiv M\Rightarrow E(6;0;12)$.
- F nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\equiv N\Rightarrow E(-2;4;4)$.

Bài 3.5.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-6=0$ và hai điểm $A(5;-2;6)$, $B(3;-2;1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1) $MA+MB$ nhỏ nhất.

2) $|MA-MB|$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT.

Thay tọa độ hai điểm A,B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A,B nằm về cùng một phía so với (P).

1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M\in(P)$, ta có $MA=MA'$.

Do đó $\forall M\in(P):MA+MB=A'M+MB\geq A'B$, mà $A'B$ không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M=A'B\cap(P)$, suy ra $MA+MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M=A'B\cap(P)$.

Ta có: $AA'\perp(P)\Rightarrow AA':\begin{cases} x=5+2t \\ y=-2-t \\ z=6+2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=-2-t \\ z=6+2t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=0\Rightarrow H(1;-1;2). \\ z=2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA'\Rightarrow\begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A=-3 \\ y_{A'}=2y_H-y_A=2 \\ z_{A'}=2z_H-z_A=-2 \end{cases}\Rightarrow A'(-3;2;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(6;-4;3)$, phương trình $A'B:\begin{cases} x=-3+6t \\ y=2-4t \\ z=-2+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=-3+6t \\ y=2-4t \\ z=-2+3t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{21}{11} \\ y=-\dfrac{14}{11} \\ z=\dfrac{5}{11} \end{cases}$.

Vậy $M\left(\dfrac{21}{11};-\dfrac{14}{11};\dfrac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M\in(P)$ ta luôn có $|AM-MB|\le AB$, đẳng thức xảy ra khi $M=AB\cap(P)$.

Phương trình $AB:\begin{cases} x=5-2t \\ y=-2 \\ z=6-5t \end{cases}$

Tọa độ $M:\begin{cases} x=5-2t \\ y=-2 \\ z=6-5t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{7} \\ y=-2 \\ z=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{17}{7};-2;-\dfrac{3}{7}\right)$.

Bài 3.5.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ và ba điểm A(3;2;−1), B(1;−2;1), C(2;1;3). Tìm $M\in\Delta$ sao cho:

1) MA + MB nhỏ nhất.
2) MA + MC nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(t;2t;1-t)$, $\overrightarrow{AM}=(t-3;2t-2;-t+2)$,

$\overrightarrow{BM}=(t-1;2t+2;-t)$, $\overrightarrow{CM}=(t-2;2t-1;-t-2)$.

1) Ta có: $MA+MB=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2+6t+5}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}-\sqrt6t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt6t+\frac{\sqrt6}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, ta có:

$$MA+MB\ge\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}-\sqrt6t+\sqrt6t+\frac{\sqrt6}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}=\sqrt{38}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt6}{2}-\sqrt6t=\sqrt6t+\dfrac{\sqrt6}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Ta có: $AM+CM=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2-4t+9}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}-\sqrt6t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt6t+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{5\sqrt3}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96+5\sqrt{42}}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}-t\right)\dfrac{5}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\left(\dfrac{1}{3}+t\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}}$.

Vậy $M\left(\dfrac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}};\dfrac{2\left(45-\sqrt{42}\right)}{10+3\sqrt{42}};\dfrac{4\sqrt{42}-35}{10+3\sqrt{42}}\right)$.

Bài 3.5.4. Trong không gian Oxyz cho điểm A(1;−1;1), đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.
2) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.
3) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm M(1;1;1), N(−1;2;−1) và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT.

Đường thẳng Δ đi qua B(1;0;−1) và có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP.

1) **Cách 1:** Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1)+by+c(z+1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a+c=0$ (1)

Do $\Delta\subset(Q)$ nên $2a+b-c=0\Rightarrow c=2a+b$.

Do đó: $d(A,(Q))=\dfrac{|2c-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|4a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}=\sqrt{\dfrac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}}$

+ Nếu $b=0\Rightarrow d(A,(Q))=\dfrac{4}{\sqrt5}$

+ Nếu $b \neq 0$ thì ta đặt $t = \dfrac{a}{b}$, ta có: $\dfrac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2} = \dfrac{16t^2 + 8t + 1}{5t^2 + 4t + 2} = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$f'(t) = \dfrac{24t^2 + 54t + 12}{(5t^2 + 4t + 2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = -\dfrac{1}{4}$

Suy ra $\max f(t) = f(-2) = \dfrac{7}{2}$, do đó $\max d(A,(Q)) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a = -2b$

Chọn $b = -1$ ta tìm được $a = 2, c = 3$.

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Cách 2: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó

$d(A,(Q)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

Vì $K \in \Delta \Rightarrow K(1 + 2t; t; -1 - t) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = (2t; t + 1; -t - 2)$.

$AK \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4t + t + 1 + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow K\left(0; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right), \overrightarrow{AK} = \left(-1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

2) **Cách 1:** Tương tự như trên ta có $(Q): ax + by + (2a + b)z + a + b = 0$

Gọi $\alpha = ((P),(R))$, $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|2a - b + 2(2a + b)|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2}}$.

+ Nếu $a = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

+ Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \dfrac{b}{a}$ thì ta có: $\dfrac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2} = \dfrac{t^2 + 12t + 36}{2t^2 + 4t + 5} = f(t)$

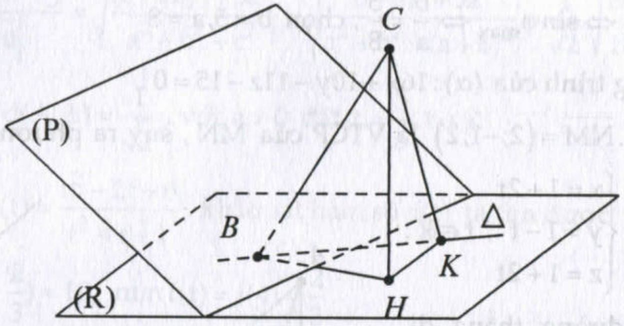
Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t) = f(-\dfrac{7}{10}) = \dfrac{53}{6}$

Suy ra $\max\{\cos\alpha\}$ đạt được khi $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{10}$, chọn $b = -7 \Rightarrow a = 10$

Vậy phương trình $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

Ta có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, lấy $C(3; -1; 1) \in d$, $C \neq B$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ, khi đó $\alpha = \widehat{BCH}$ và

$\sin\alpha = \sin\widehat{BCH} = \dfrac{BH}{BC} \geq \dfrac{BK}{BC}$.

Mà $\dfrac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1; 6; 4)$ là VTPT của (BCK).

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên $\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{n_1}, \vec{u}\right] = (10; -7; 13)$ là VTPT của (R), suy ra phương trình của $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

3) **Cách 1:** Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$

Do $M, N \in (\alpha)$ nên $\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + 2b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{3}{2}b \\ c = -a + \dfrac{1}{2}b \end{cases}$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau:

$2ax + 2by + (b - 2a)z - 3b = 0$

Suy ra $n_\alpha = (2a; 2b; b - 2a)$ là VTPT của (α). Gọi $\varphi = (\widehat{\Delta,(\alpha)})$

Ta có: $\sin\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|.|\vec{u}|} = \dfrac{|4a + 2b - b + 2a|}{\sqrt{6}.\sqrt{4a^2 + 4b^2 + (b - 2a)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{b^2 + 12ab + 36a^2}{5b^2 - 4ab + 8a^2}}$

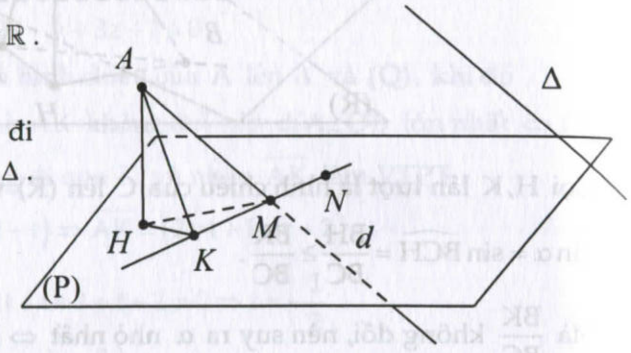
+ Nếu $a=0 \Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, với $a\neq 0$, đặt $t=\dfrac{b}{a}, t\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$, ta tìm được $\max f(t)=f\left(\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{\max} \Leftrightarrow \sin\varphi_{\max} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{8}$, chọn $b=5, a=8$

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x+10y-11z-15=0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM}=(2;-1;2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình đường thẳng $MN: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.



Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ. Suy ra phương trình

$$d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Trên d ta lấy điểm $A(3;2;0)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $\widehat{((\alpha),\Delta)}=\widehat{AMH}$.

Ta có: $\cos\widehat{AMH}=\dfrac{MH}{MA}\geq\dfrac{MK}{MA}$, mà $\dfrac{MK}{MA}$ không đổi nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\equiv(MN,d)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{u}=(-1;6;4)$ là VTPT của (β).

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-16;-10;11)$ là VTPT của (α).

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x+10y-11z-15=0$.

Bài 3.5.5. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và

1) Δ đi qua $M(1;1;1)$ và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất;

2) Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}=(1;1;1)$ là VTPT

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP của Δ, do $\Delta\subset(P)\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow c=-a-b$ (1)

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=(c+2b;2a;-a)$

Do đó:

$$d(A,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\frac{(c+2b)^2+5a^2}{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{(b-a)^2+5a^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{b^2-2ab+6a^2}{b^2+2ab+b^2}}.$$

+ Nếu $a=0\Rightarrow d(A,\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, với $a\neq 0$ đặt $t=\dfrac{b}{a}, t\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t^2+t+1}$, khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được

$\max f(t)=f(-\dfrac{2}{3})=10,\ \min f(t)=f(4)=\dfrac{2}{3}$.

- Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{3}$, chọn $b=2\Rightarrow a=3$, $c=-1$, suy ra phương trình đường thẳng: $\Delta: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.
- Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t=4\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=4$, chọn $b=4\Rightarrow a=1$, $c=-5$, suy ra phương trình đường thẳng : $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

2) Đường thẳng d đi qua $N(2;0;0)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ là VTCP.

$\overrightarrow{MN}=(1;-1;-1)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]=(2a+b;-b;2a-b)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}=3b$

Do đó $d(\Delta,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}=\dfrac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2+b^2+(2a-b)^2}}=3\sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2+3b^2}}\leq\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0\Rightarrow c=-b\Rightarrow\vec{u}=b(0;1;-1)$.

Vậy phương trình $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Bài 3.5.6. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;-1;2)$ và cắt đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho:

1) Khoảng cách từ $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

2) Khoảng cách giữa d và $\Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t; t; 2-t), t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM}=(2t-1; t+1; -t)$ là VTCP của đường thẳng d.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2; 2; -1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]=(1-t; 1; 4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B, d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}.$$

Ta có $f(t)=\dfrac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}$ nên $f'(t)=\dfrac{98t(t-2)}{(6t^2-2t+2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f(0)=18$, $\min f(t)=f(2)=\dfrac{1}{11}$.

Do đó:

- $\min d(B, d)=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t=2\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3; 3; -2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm d: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.
- $\max d(B, d)=3\sqrt{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-1;1;-1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm d: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

2) Δ đi qua N(5; 0; 0) và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2; -2; 1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{AM}\right]=(t-1; 4t-1; 6t)$, $\overrightarrow{AN}=(5; 1; -2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2+(4t-1)^2+(6t)^2}}$$

$$=3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}}=3.\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}.$$

Vì $f'(t)=\dfrac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2-10t+2)^2}$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2, t=\dfrac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f\left(\dfrac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM}=-\dfrac{1}{37}(29; -41; 4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là d: $\dfrac{x}{29}=\dfrac{y+1}{-41}=\dfrac{z-2}{4}$.

---

§ 6. GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Để giải một bài toán không gian tổng hợp bằng phương pháp tọa độ, ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Chọn hệ trục tọa Oxyz.*

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều …), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ. Nếu ở bước này chúng ta chọn được hệ trục tọa độ phù hợp thì việc giải quyết bài toán sẽ tính toán đơn giản hơn.

Bước 2: *Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.*

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: *Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.*

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: *Giải quyết bài toán.*

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Trong các bước trên thì bước 1 là bước quan trọng, vì nó quyết định đến việc tính toán cho các bước tiếp theo. Sau đây là một số cách chọn hệ trục cho một số mô hình không gian mà chúng ta thường gặp.

1) **Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật** ABCD.A'B'C'D'

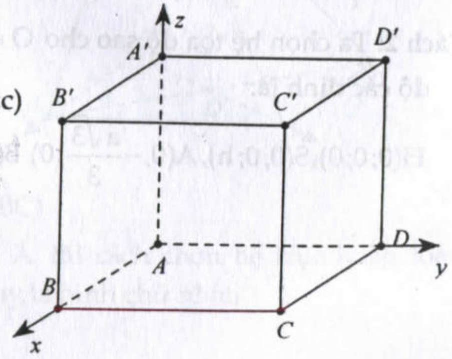
Với hình lập phương: Chọn hệ trục tọa độ sao cho: A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0) A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a).

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0),

A'(0;0;c), B'(a;0;c); C'(a;b;c); D'(0;b;c)



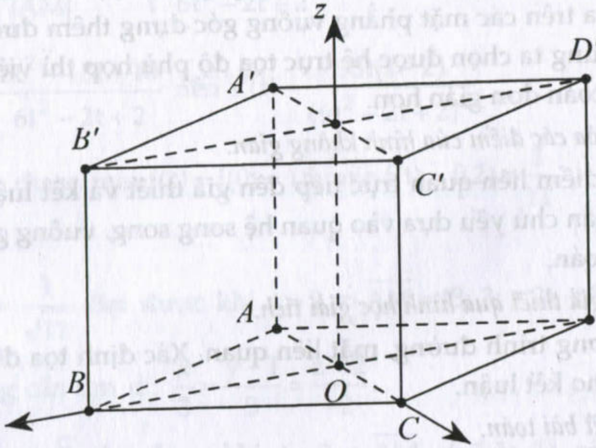
Chú ý: Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

2) **Với hình hộp đứng có đáy là hình thoi ABCD.A'B'C'D'**

Chọn hệ trục tọa độ sao cho : Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi ABCD . Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

Nếu $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì $A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), B\left(\frac{b}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

$D\left(-\frac{b}{2};0;0\right), A'\left(0;-\frac{a}{2};c\right), B'\left(\frac{b}{2};0;c\right), C'\left(0;\frac{a}{2};c\right), D'\left(-\frac{b}{2};0;c\right)$.



Chú ý: Với lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC, $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh AC, A'C'.

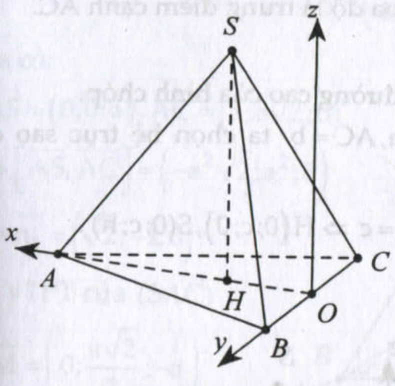
3) **Hình chóp đều**

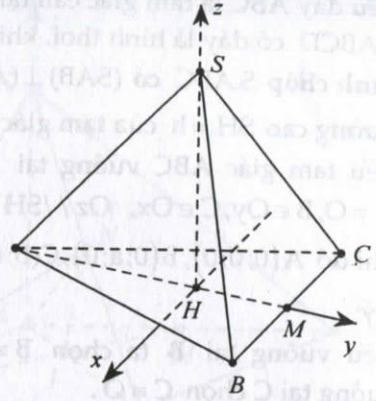
- Hình chóp tam giác đều S.ABC , $AB = a$, $SH = h$,

Cách 1. Ta chọn hệ tọa độ sao cho O là trung điểm BC , $A \in Ox, B \in Oy$. Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a}{2};0\right), C\left(0;-\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$

Cách 2: Ta chọn hệ tọa độ sao cho $O \equiv H$, $Ox//BC$, $A \in Oy, S \in Oz$. Khi đó tọa độ các đỉnh là:

$H(0;0;0), S(0;0;h), A(0;-\frac{a\sqrt{3}}{3};0)$ $B(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0)$, $C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$.





Chú ý: Tùy thuộc vào giả thiết của bài toán mà ta chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

4) **Hình chóp** S.ABCD có $SA \perp (ABCD), SA = h$

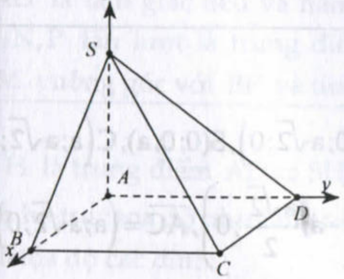
- Nếu đáy là hình chữ nhật có $AB = a, BC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$.

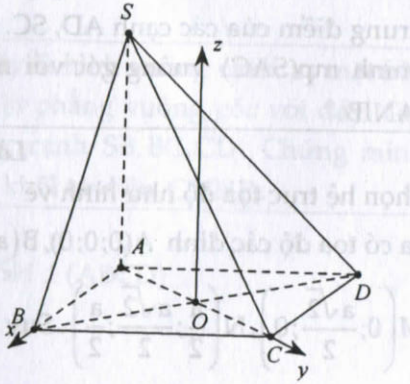
  Khi đó A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; b; 0), D(0; b; 0), S(0; 0; h)

- Nếu đáy là hình thoi có $AC = a, AD = b$, ta chọn hệ trục sao cho O là tâm của đáy, $B \in Ox, C \in Oy$ và $Oz // SA$.

  Khi đó $A\left(0;-\frac{b}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{b}{2};0\right)$

  $D\left(-\frac{a}{2};0;0\right), S\left(0;-\frac{b}{2};h\right)$.





Chú ý: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$

- Nếu đáy ABC là tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục hoàn toàn tương tự như hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật.

- Nếu đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC.

5) **Hình chóp** S.ABC **có** $(SAB)\perp(ABC)$

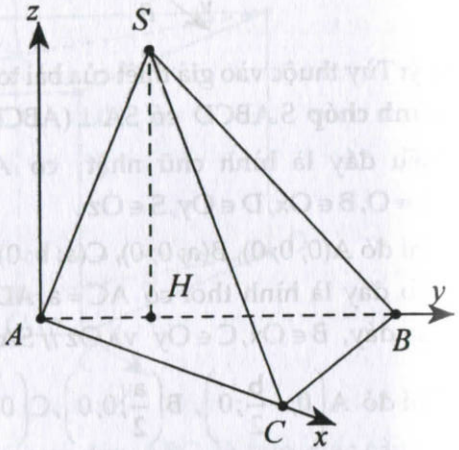
Đường cao $SH = h$ của tam giác SAB là đường cao của hình chóp.

Nếu tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, AC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox,\ Oz // SH$.

Khi đó $A(0;0;0), B(0;a;0), C(b;0;0)$, $AH = c \Rightarrow H(0;c;0), S(0;c;h)$.

Chú ý:

- Nếu vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.
- Nếu tam giác ASB cân tại S, ΔABC cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$.



Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải. Sau đây chúng ta sẽ đi xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.6.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = \sqrt{2}a$, $SA = a$ và vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC. Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Lời giải.

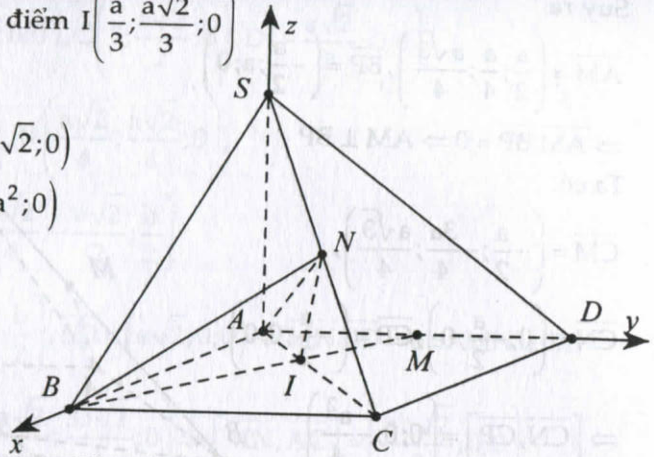
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh $A(0;0;0), B(a;0;0), D\left(0;a\sqrt{2};0\right), S(0;0;a), C\left(a;a\sqrt{2};0\right)$,

$M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BM} = \left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), \overrightarrow{AC} = \left(a;a\sqrt{2};0\right)$

Phương trình BM: $\begin{cases} x = a - 2t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 0 \end{cases}$, phương trình AC: $\begin{cases} x = t' \\ y = \sqrt{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được giao điểm $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$



Ta có:

$\overrightarrow{AS} = (0;0;a), \overrightarrow{AC} = \left(a;a\sqrt{2};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2\sqrt{2};a^2;0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{2};-1;0\right)$

là VTPT của (SAC)

$\overrightarrow{SM} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-a\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2;\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left(1;\sqrt{2};1\right)$

là VTPT của (SMB). Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (SAC)\perp(SMB)$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right), \overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6};\frac{a^2}{6};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Ví dụ 3.6.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh:

$H(0;0;0), A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), D\left(0;\frac{a}{2};0\right), N(a;0;0), B\left(a;-\frac{a}{2};0\right)$

$C\left(a;\frac{a}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{a}{2};a;0\right).$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=0\Rightarrow AM\perp BP$

Ta có:

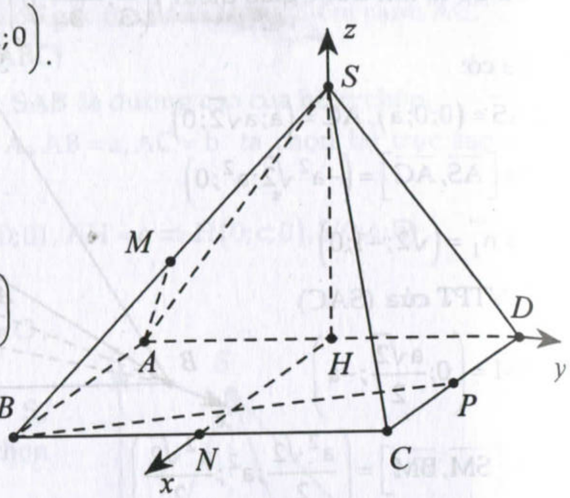
$\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),$

$\overrightarrow{CN}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right]=\left(0;0;-\frac{a^2}{4}\right).$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}=-\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

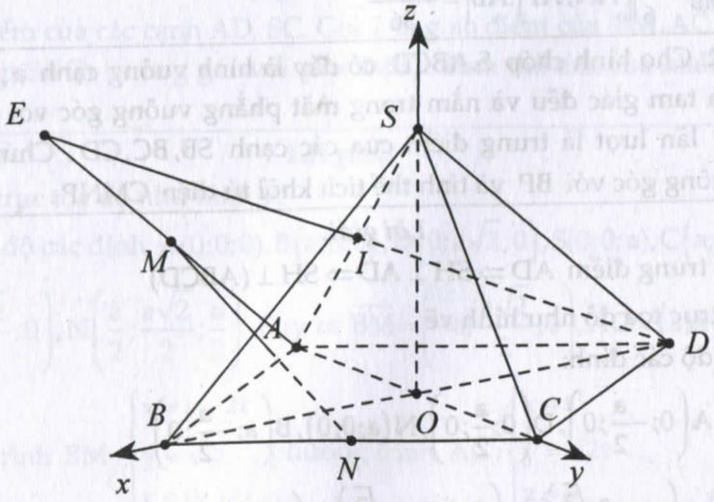
Vậy $V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}\right|=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$



Ví dụ 3.6.3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt SO = h và gọi I là trung điểm SA.



Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$S(0;0;h),I\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right),N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right),$

$E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right),M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{h}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3a\sqrt{2}}{4};-\frac{h}{2}\right),\overrightarrow{BD}=\left(a\sqrt{2};0;0\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow MN\perp BD$

$\overrightarrow{AC}=\left(0;a\sqrt{2};0\right),\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{3a\sqrt{2}}{4};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\frac{ah\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}=\frac{a^2h}{4}$. Vậy $d(MN,AC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

Ví dụ 3.6.4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh:

$A(0;0;0),S\left(0;0;a\sqrt{2}\right),$

$B(a;0;0),D(0;2a;0),C(a;a;0)$

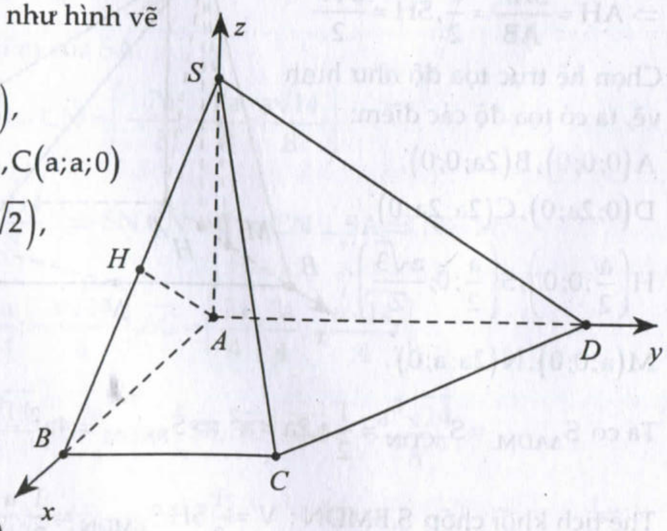
Suy ra $\overrightarrow{SB}=\left(-a;0;a\sqrt{2}\right),$

phương trình

$SB:\begin{cases}x=a-t\\ y=0\\ z=\sqrt{2}t\end{cases}$

$\Rightarrow H\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)$



Mà AH ⊥ SB ⇒ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0 \Leftrightarrow -a+t+2t=0 \Rightarrow t=\frac{a}{3} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{2}\right),\overrightarrow{CD}=\left(a;-a;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow SC\perp CD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(-a^2\sqrt{2};-a^2\sqrt{2};-2a^2\right)\Rightarrow \vec{n}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là VTPT của (SCD)

Phương trình (SCD): $x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

Vậy $d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{\left|\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 3.6.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

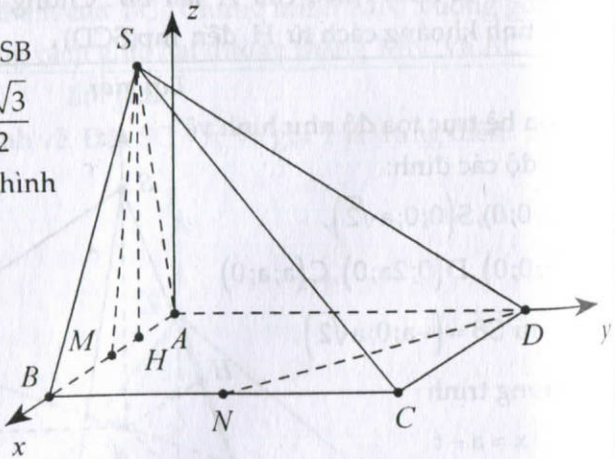
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên AB ⇒ SH ⊥ (ABCD)

Ta có:

$SA^2+SB^2=AB^2 \Rightarrow SA\perp SB$

$\Rightarrow AH=\frac{SA^2}{AB}=\frac{a}{2}, SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:

$A(0;0;0), B(2a;0;0)$,

$D(0;2a;0), C(2a;2a;0)$,

$H\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$M(a;0;0), N(2a;a;0)$.

Ta có $S_{\Delta ADM}=S_{\Delta CDN}=\frac{1}{2}a.2a=a^2 \Rightarrow S_{BNDM}=4a^2-2a^2=2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN: $V=\frac{1}{3}SH.S_{BMDN}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Vì $\overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{DN}=\left(2a;-a;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}=a^2$

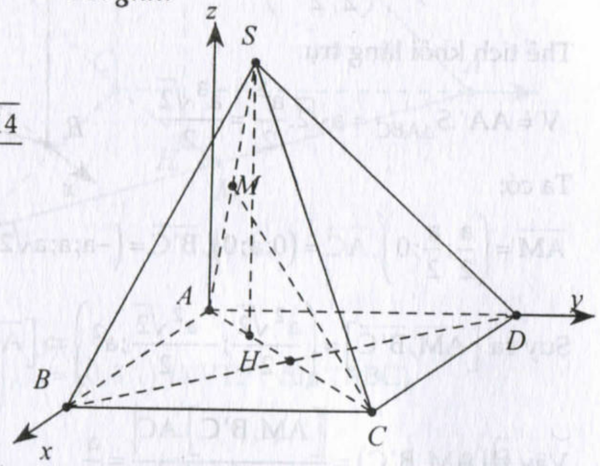
Vậy $\cos\left(SM,DN\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{SM.DN}=\dfrac{a^2}{a.\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3.6.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH=\frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Lời giải.

Ta có $AH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$



Chọn hệ trục như hình vẽ

Tọa độ các điểm

$A(0;0;0), B(a;0;0)$,

$D(0;a;0), C(a;a;0)$,

$H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right), S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

Gọi N là trung điểm của SA

$\Rightarrow N\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)\Rightarrow \overrightarrow{CN}=\left(-\frac{7a}{8};-\frac{7a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$

$\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{a}{8};-\frac{a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)\Rightarrow \overrightarrow{SN}.\overrightarrow{CN}=0\Rightarrow CN\perp SA\Rightarrow N\equiv M$

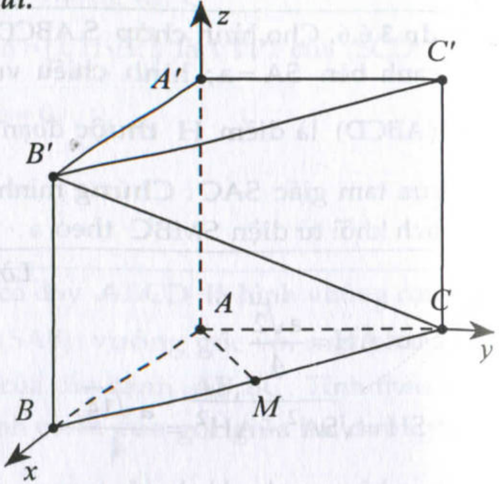
Ta có: $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{3a}{4};-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right),\overrightarrow{SC}=\left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{14}}{4};0;\frac{3a^2}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}=-\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$

Vậy $V_{S.MBC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right|=\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Ví dụ 2.6.7. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các đỉnh là:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0)$,

$A'(0;0;a\sqrt{2}), B'(a;0;a\sqrt{2})$

$C'(0;a;a\sqrt{2}), M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Thể tích khối lăng trụ:

$$V = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), \overrightarrow{AC} = (0;a;0), \overrightarrow{B'C} = (-a;a;a\sqrt{2})$$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(AM,B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{a}{2}$

Ví dụ 3.6.8. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

Lời giải.

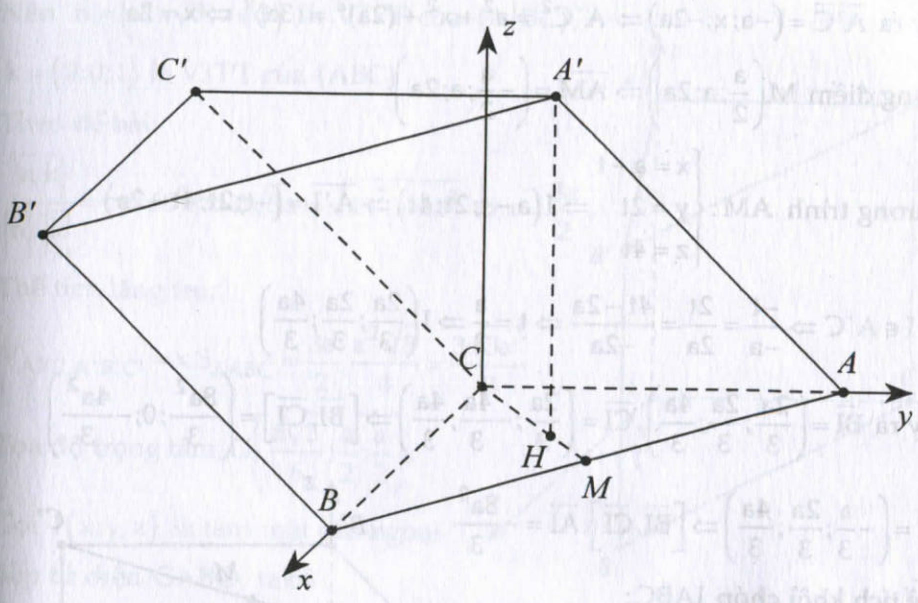
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC

Đặt $BC = x, SH = y; x, y > 0$ suy ra $AC = AB.\cot 60^0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Tọa độ các đỉnh là:

$$C(0;0;0), B(x;0;0), A\left(0;\frac{x}{\sqrt{3}};0\right), H\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};0\right), B'\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$$



Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{2x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} \frac{\left|\overrightarrow{BB'}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \sin 60^0 \\ BB' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a \\ \sqrt{\frac{13}{27}x^2 + y^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \frac{27a^2}{52} \end{cases}$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}x.\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{81a^2}{104\sqrt{3}}$

Vậy thể tích khối chóp A'.ABC là:

$$V_{A'ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}y.\frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{27a^2}{104\sqrt{3}} = \frac{9a^3}{208}.$$

Ví dụ 3.6.9. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Lời giải.

Đặt $BC = x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Tọa độ các điểm là:

$B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;x;0), B'(0;2a;0), A'(a;0;2a), C'(0;x;2a)$

Suy ra $\overrightarrow{A'C}=(-a;x;-2a)\Rightarrow A'C^2=a^2+x^2+(2a)^2=(3a)^2\Rightarrow x=2a$

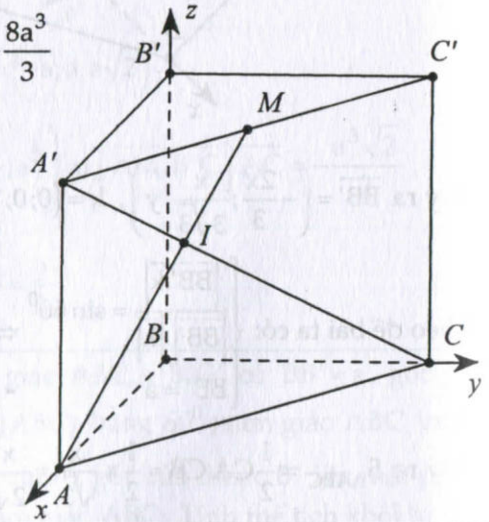
Trung điểm $M\left(\frac{a}{2};a;2a\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(-\frac{a}{2};a;2a\right)$

Phương trình $AM:\begin{cases}x=a-t\\y=2t\\z=4t\end{cases}\Rightarrow I(a-t;2t;4t)\Rightarrow \overrightarrow{A'I}=(-t;2t;4t-2a)$

Vì $I\in A'C\Rightarrow \frac{-t}{-a}=\frac{2t}{2a}=\frac{4t-2a}{-2a}\Rightarrow t=\frac{a}{3}\Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{BI}=\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right), \overrightarrow{CI}=\left(\frac{2a}{3};-\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right)\Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right]=\left(\frac{8a^2}{3};0;-\frac{4a^2}{3}\right)$

$\overrightarrow{AI}=\left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)\Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}=-\frac{8a^3}{3}$



Thể tích khối chóp IABC:

$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}\right|=\frac{4a^3}{9}$

Ta có $\vec{n}=(2;0;-1)$ là VTPT của (IBC), phương trình mặt phẳng $(IBC): 2x-z=0$

Vậy $d(A,(IBC))=\frac{2a}{\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3.6.10. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

Lời giải.

Đặt $AA'=x, x>0$. Chọn hệ trục như hình vẽ

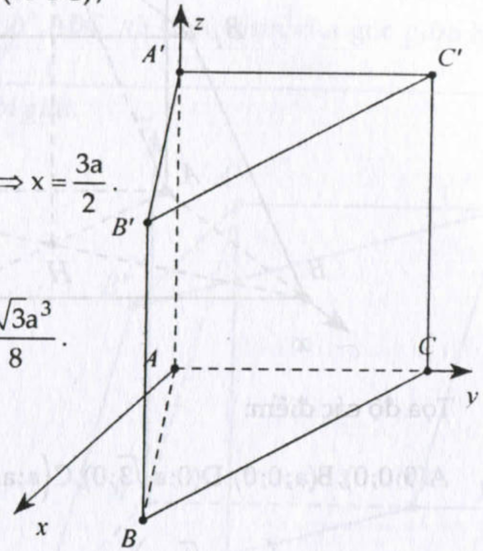
Tọa độ các điểm: $A(0;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;x), C'(0;a;x), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra

$\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{A'C}=(0;a;-x)\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Nên $\vec{n}=(x;x\sqrt{3};a\sqrt{3})$ là VTPT của $(A'BC)$,

$\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của (ABC)



Theo đề bài:

$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0\Rightarrow 2\sqrt{3}a=\sqrt{4x^2+3a^2}\Rightarrow x=\frac{3a}{2}$.

Thể tích lăng trụ:

$V_{ABC.A'B'C'}=x.S_{\Delta ABC}=\frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$, ta có

$$\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\\IA^2=IG^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+(y-a)^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{a\sqrt{3}}{6}\\y=\frac{a}{2}\\z=-\frac{a}{12}\end{cases}.$$

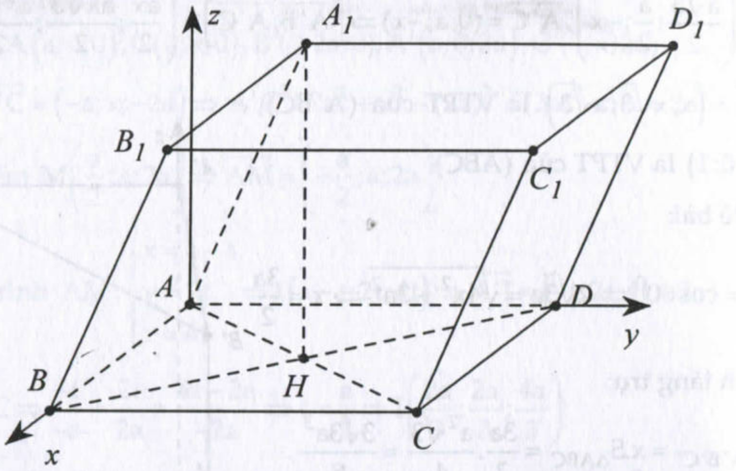
Tâm $I\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};-\frac{a}{12}\right)$, bán kính $R=IA=\frac{7a}{12}$.

Ví dụ 3.6.11. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Lời giải.

Gọi H là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H=x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm:

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a\sqrt{3};0), C\left(a;a\sqrt{3};0\right), H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right), \overrightarrow{AD}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AD}\right]=\left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=(2x;0;a)$ là VTPT của (A_1AD)

Và $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của (ABCD) nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0\Rightarrow 2a=\sqrt{4x^2+a^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ: $V=x.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{3a^3}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right), \overrightarrow{A_1D}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{A_1D}\right]=\left(a\sqrt{3}x;ax;0\right)$

Phương trình $(A_1BD): x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}=0$.

Vì $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy $d\left(B_1,(A_1BD)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3.6.12. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Lời giải.

Chọn hệ trục như hình vẽ.

Gọi M là trung điểm đoạn BC

Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A(0;0;0), B(a;0;0)$,

$C\left(0;a\sqrt{3};0\right), M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

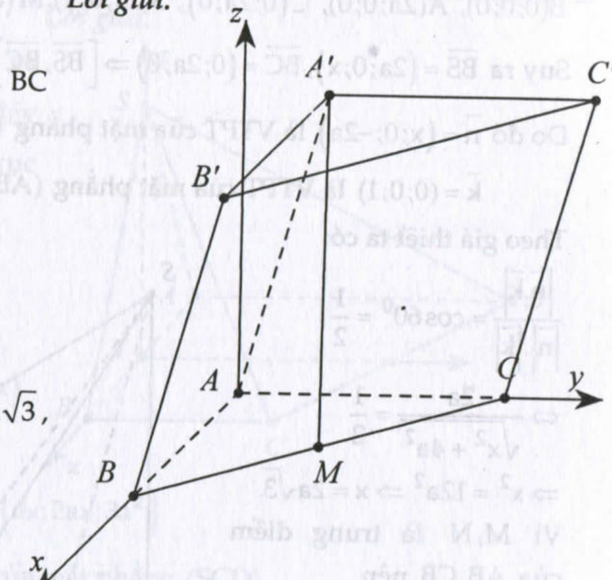
Vì $AM=\frac{1}{2}BC=a$

$\Rightarrow MA'=\sqrt{A'A^2-AM^2}=a\sqrt{3}$,

suy ra $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

Vì $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow B'\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow C'\left(\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$



Thể tích khối chóp A'.ABC: $V=\frac{1}{3}A'M.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{4}$

Vì $\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{B'C'}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)$

nên suy ra $\cos\left(AA',B'C'\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{AA'.B'C'}=\frac{a^2}{2a.2a}=\frac{1}{4}$

Ví dụ 3.6.13. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Lời giải.

Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

Vì $MN // BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $S(2a;0;x)$, $M(a;0;0)$, $N(a;a;0)$

Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a;0;x), \overrightarrow{BC} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(-2ax;0;4a^2\right)$

Do đó $\vec{n} = (x;0;-2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2}$$

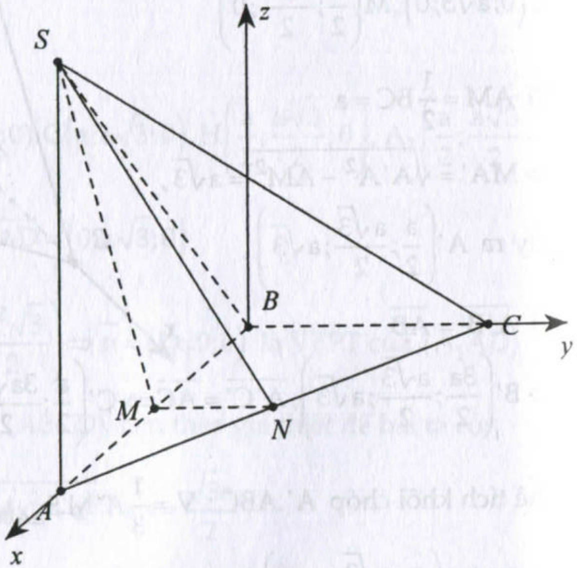
$$\Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$$

$$\Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp S.BMNC là:



$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3} SA.S_{BMNC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2a;0;0), \overrightarrow{SN} = \left(-a;a;2a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BN} = (a;a;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right] = \left(0;-4\sqrt{3}a^2;2a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

$$\text{Vậy } d(AB, SN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right]\right|} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 3.6.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B; $AB = AD = 2a$; $CB = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải.

Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy nên $SI \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đặt $SI = x, x > 0$.

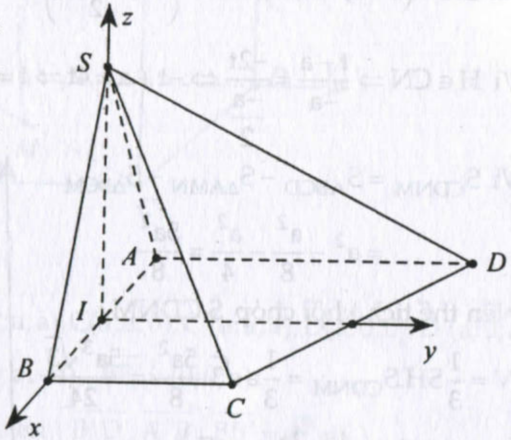
Ta có tọa độ các điểm là:

$I(0;0;0), A(-a;0;0), B(a;0;0),$

$C(a;a;0), D(-a;2a;0), S(0;0;x)$

Suy ra $\overrightarrow{SC} = (a;a;-x)$,

$\overrightarrow{CD} = (-2a;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}\right] = \left(ax;2ax;3a^2\right)$



Nên $\overrightarrow{n_1} = (x;2x;3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD).

Mà $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \dfrac{AB(BC + AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$$

Ví dụ 3.6.15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

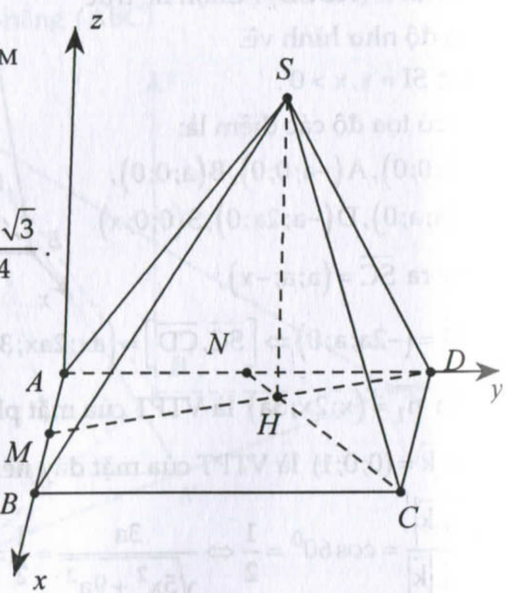
Tọa độ các đỉnh:

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), N\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)$ nên phương trình $DM:\begin{cases}x=t\\ y=a-2t\\ z=0\end{cases}\Rightarrow H(t;a-2t;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}=(t-a;-2t;0), \overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{a}{2};0\right)$

Vì $H\in CN\Rightarrow \frac{t-a}{-a}=\frac{-2t}{\frac{-a}{2}}\Leftrightarrow -t+a=4t\Rightarrow t=\frac{a}{5}\Rightarrow H\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};a\sqrt{3}\right)$



Vì $S_{CDNM}=S_{ABCD}-S_{\Delta AMN}-S_{\Delta BCM}$

$=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}$

Nên thể tích khối chóp S.CDNM :

$V=\frac{1}{3}SH.S_{CDNM}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$.

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5};-a\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{DC}=(a;0;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}=a^3\sqrt{3}$.

Vậy $d(SC,DM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

*** Bài tập vận dụng**

Bài 3.6.1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a .

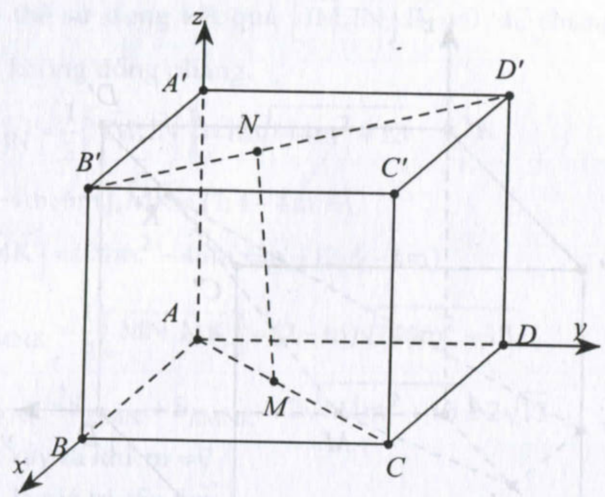
1) Chứng minh hai đường chéo B'D' và A'B của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau B'D' và A'B .

2) M, N là hai điểm di động trên các đoạn thẳng AC, B'D' sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{B'N}{B'C'}$ (M, N không trùng với hai đầu điểm mút của các đoạn thẳng).

Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



1) Ta có:

$A(0;0;0), A'(0;0;a), B(0;a;0), B'(0;a;a), C(a;a;0), C'(a;a;a), D(a;0;0), D'(a;0;a)$

Ta có : $\overrightarrow{B'D'}=(a;-a;0)$, $\overrightarrow{A'B}=(0;a;-a)$, $\overrightarrow{BB'}=(0;0;a)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]=(a^2;a^2;a^2)$ nên $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'}=a^3\neq 0$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng hay B'D' và A'B chéo nhau.

Ta có: $d(B'D',A'B)=\frac{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}]\right|}=\frac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

2) Đặt $\frac{AM}{AC}=\frac{B'N}{B'D'}=k\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B'N}=k\overrightarrow{B'D'}$.

Do đó $M(ka;ka;0)$, $N(ka;a-ka;a)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;a-2ka;a)$

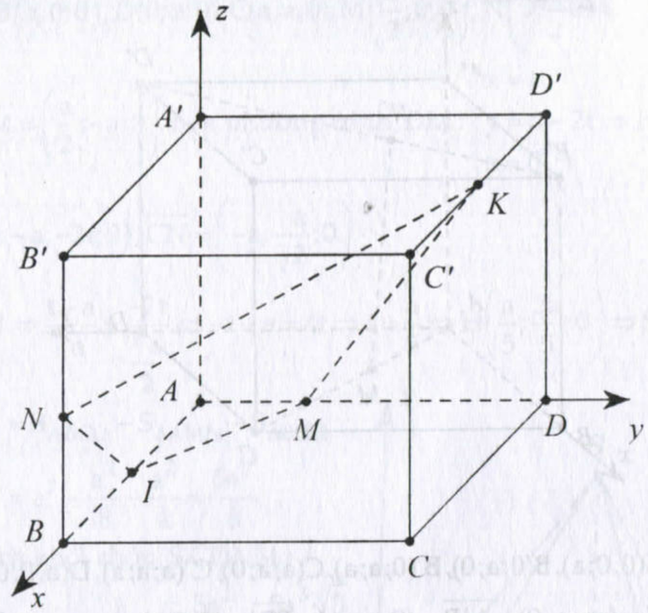
Vì $\overrightarrow{MN}.\vec{i}=0$ nên luôn song song với mặt phẳng (Oyz) cố định. Ta có đpcm.

Bài 3.6.2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=2, AD=4, AA'=6$. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BB'}$ $(0\le m\le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, C'D' .

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến (A'BD).
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính m để diện tích tứ giác MINK lớn nhất, nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó tọa độ các điểm là:

$A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;4;0), C(2;4;0), A'(0;0;6), B'(2;0;6), C'(2;4;6), D'(0;4;6)$

$M(0;4m;0), N(2;0;6m), I(1;0;0), K(1;4;6)$.

1) Ta có $\overrightarrow{A'B}=(2;0;-6), \overrightarrow{BD}=(-2;4;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BD}\right]=(24;12;8)$

Suy ra $\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BD}\right]=(6;3;2)$ là VTPT của mặt phẳng $(A'BD)$

Do đó phương trình $(A'BD)$ là: $6x+3y+2z-12=0$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là:

$$d(A,(A'BD))=\frac{12}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{12}{7}.$$

2) Nếu $m=0$, khi đó M, N, I, K cùng thuộc mặt phẳng (ABK)

Ta xét với $m \neq 0$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(-1;4m;0)$, $\overrightarrow{IN}=(1;0;6m)$, suy ra $\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}\right]=\left(24m^2;6m;-4m\right)$

Do đó $\vec{n}=(12m;3;-2)$ là VTPT của mặt phẳng (IMN)

Suy ra phương trình (IMN) là: $12mx+3y-2z-12m=0$.

Vì tọa độ điểm K thỏa phương trình của mặt phẳng (IMN) nên bốn điểm M, N, I, K đồng phẳng.

Chú ý: ta có thể sử dụng kết quả $\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}\right].\overrightarrow{IK} \neq 0$ để chứng minh bốn điểm M, N, I, K không đồng phẳng.

3) Ta có $S_{\Delta IMN}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}\right]\right|=m\sqrt{144m^2+13}$

$\overrightarrow{MN}=(2;-4m;6m), \overrightarrow{MK}=(1;4-4m;6)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MK}\right]=(24m^2-48m;6m-12;8-4m)$

Suy ra $S_{\Delta MNK}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MK}\right]\right|=(2-m)\sqrt{144m^2+13}$

Do đó $S_{MKNI}=S_{\Delta IMN}+S_{\Delta MNK}=2\sqrt{144m^2+13} \geq 2\sqrt{13}$

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$.

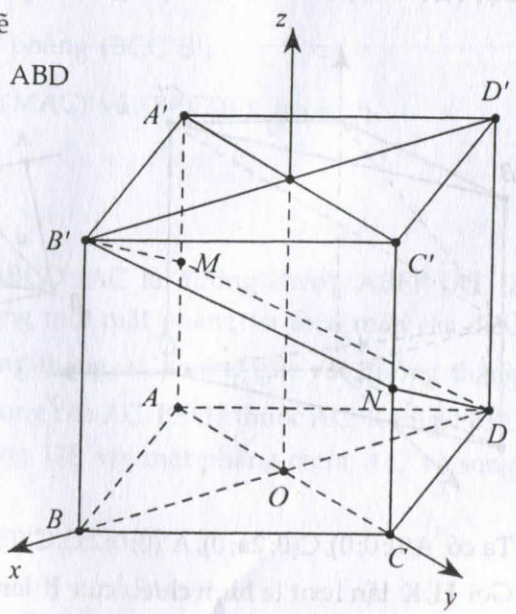
Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.6.3. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các điểm cạnh AA', CC' sao cho $\overline{AM}=x.\overline{AA'}$, $\overline{C'N}=x.\overline{CC'}$ ($0<x<1$).

1. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Đặt $AA'=y$. Tìm x và y theo a để B'MDN là hình vuông.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Vì góc $\widehat{BAD}=60^0$ nên tam giác ABD đều, do đó $BD=a, AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $AA'=y$

Suy ra tọa độ các điểm là:

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$,

$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$,

$A'\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};y\right), B'\left(\frac{a}{2};0;y\right)$,

$C'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};y\right), D'\left(-\frac{a}{2};0;y\right), M\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};xy\right)$ và $N\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};y-xy\right)$.

1) Ta có $\overrightarrow{B'M}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};xy-y\right), \overrightarrow{DN}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};y-xy\right)$

Suy ra $\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{B'M}\Rightarrow DN//B'M$ hay bốn điểm B',M,D,N cùng thuộc một mặt phẳng.

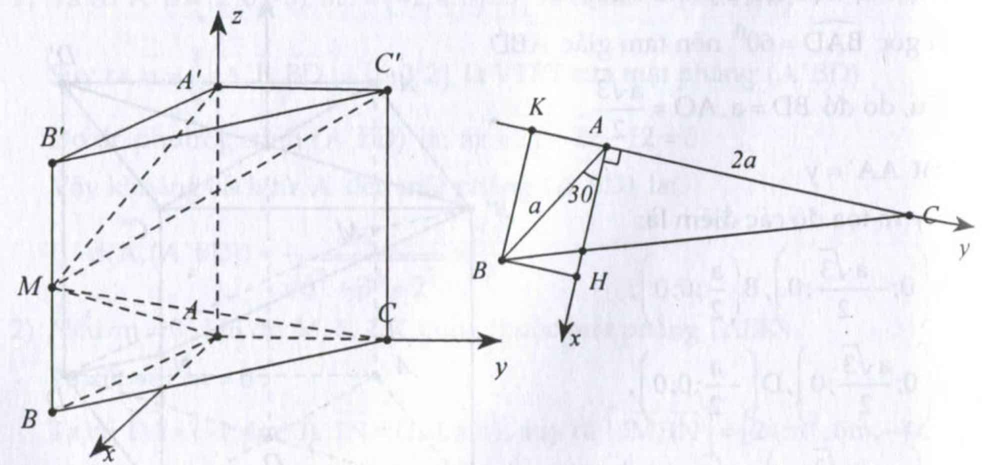
2) Ta có $\overrightarrow{B'N}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-xy\right)$. Theo chứng minh trên thì $DNB'M$ là hình bình hành, nên nó là hình vuông khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{B'M}.\overrightarrow{B'N}=0\\ B'M=B'N\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{a^2}{2}-xy(xy-y)=0\\ (xy-y)^2+a^2=x^2y^2+a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy(y-xy)=\frac{a^2}{2}\\ y^2(2x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y^2=2a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=a\sqrt{2}\end{cases}.$$

Bài 3.6.4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy $AB=a, AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB', biết hai mặt phẳng (MAC) và $(MA'C')$ vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và côsin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$.

Hướng dẫn giải

Đặt $AA'=2x, x>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta có $A(0;0;0), C(0;2a;0), A'(0;0;2x), C'(0;2a;2x)$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục Ox, Oy, suy ra

---

$AH=AB.\cos 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK=BH=AB.\sin 30^0=\frac{a}{2}$

Do đó $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};2x\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right), \overrightarrow{AC}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left(2x;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng (MAC)

$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{A'C'}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\left(2x;0;a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng (MA'C')

Vì $(MAC)\perp(MA'C')$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4x^2-3a^2=0\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$

1) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.2a.\sin 120^0=\frac{3a^3}{2}$$

2) Ta có

$\overrightarrow{CC'}=\left(0;0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{5a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-\frac{5a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{3a^2}{2};0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_3}=\left(5;\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của mặt phẳng (BCC'B')

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và (BCC'B'), ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{28}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

Bài 3.6.5. Cho hai hình chữ nhật ABCD (AC là đường chéo), ABEF (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn các điều kiện $AB=a$, $AD=AF=a\sqrt{2}$, đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC, BF (H thuộc AC, K thuộc BF).

1) Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF. Tính tỷ số $\frac{DI}{DF}$.

2) Tính độ dài đoạn HK.

3) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABHK.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Tọa độ các điểm là

$A \equiv O(0;\,0;\,0), B(0;\,0;\,a), D(0;\,a\sqrt{2};0), C(0;\,a\sqrt{2};\,a)$.

Gọi $F(x;\,y;\,0),\ x>0$. Ta có $AF^2 = x^2+y^2 = 2a^2$.

Mặt khác $AC \perp BF$ và $\overrightarrow{AC}(0;\,a\sqrt{2};\,a), \overrightarrow{BF}(x;\,y;\,-a)$

nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0 \Leftrightarrow y.a\sqrt{2} - a^2 = 0$

Do đó $y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, hay $F\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,0\right), E\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\,a\right)$.

1) Mặt phẳng (α) chứa AC và song song với BF có phương trình

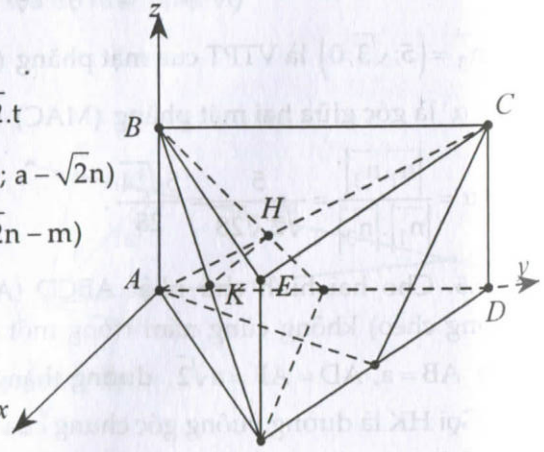
$\sqrt{3}x - y + \sqrt{2}z = 0$. Đường thẳng DF : $\begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = a\sqrt{2} - t\ (t \in R). \\ z = 0 \end{cases}$

Vì thế $DF \cap (\alpha) = I$ nên $I\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4};\,\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};\,0\right)$.

Do đó $\dfrac{DI}{DF} = \dfrac{1}{2}$, hay I là trung điểm của DF.

2) Đường thẳng AC và BF có phương trình là

AC : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2}.t \\ z = t \end{cases}$, BF : $\begin{cases} x = \sqrt{3}.t \\ y = t \\ z = a - \sqrt{2}.t \end{cases}$.



Vì vậy $H(0;\,\sqrt{2}m;\,m), K(\sqrt{3}n;n;\,a-\sqrt{2}n)$

nên $\overrightarrow{HK} = (\sqrt{3}n;\,n-\sqrt{2}m;a-\sqrt{2}n-m)$

Mà HK là đường vuông góc chung nên

$\begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{HK} = 0 \\ \overrightarrow{u_{BF}}.\overrightarrow{HK} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}n - 2m + a - \sqrt{2}n - m = 0 \\ 3n + n - \sqrt{2}m - \sqrt{2}a + 2n + \sqrt{2}m = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có: $m = \dfrac{a}{3}, n = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \overrightarrow{HK}\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6};\,-\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\,\dfrac{a}{3}\right)$

Vậy độ dài đoạn HK là $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3) Ta có $\overrightarrow{AB}(0;0;a), \overrightarrow{AH}\left(0;\,\dfrac{a\sqrt{2}}{3};\,\dfrac{a}{3}\right), \overrightarrow{AK}\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6};\,\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\,\dfrac{2a}{3}\right)$,

$\overrightarrow{HK}\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6};-\dfrac{a\sqrt{2}}{6};\,\dfrac{a}{3}\right),\ \ \overrightarrow{BH}\left(0;\,\dfrac{a\sqrt{2}}{3};-\dfrac{2a}{3}\right)$.

Thể tích khối tứ diện ABHK là: $V_{ABHK} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AK}\right| = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích các mặt

$S_{AHK} = \dfrac{a^2}{6}, S_{BHK} = \dfrac{a^2}{6}, S_{ABH} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}, S_{ABK} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow S_{tp} = \dfrac{a^2(1+\sqrt{2})}{3}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABHK là: $r = \dfrac{3V_{ABHK}}{S_{tp}} = \dfrac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6}$.

Bài 3.6.6. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4cm$; $AB = 3cm$ và $BC = 5cm$.

1) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD). Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên mặt phẳng (BCD).

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BD, BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$

nên ΔABC vuông tại A.

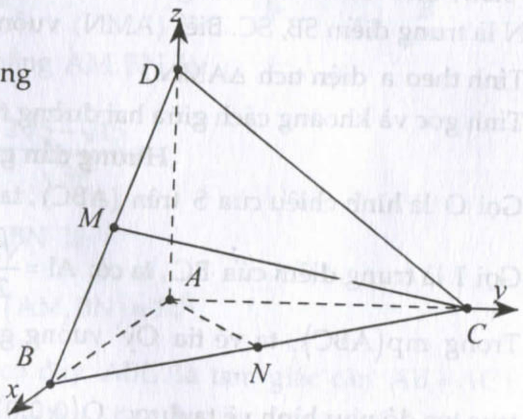
Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc Oxyz như sau hình vẽ

Suy ra $O \equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD):

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$

$\Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$



Do đó: $d\left(A,(BCD)\right) = \dfrac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \dfrac{12}{\sqrt{34}} = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

Ta có $AH \perp (BCD)$ nên phương trình $AH: \begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \Rightarrow H(4t;3t;3t) \\ z = 3t \end{cases}$

Mà $H \in (BCD)$ nên $4.4t + 3.3t + 3.3t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{17}$

Vậy $H\left(\dfrac{24}{17};\dfrac{18}{17};\dfrac{18}{17}\right)$.

2) Ta có $M(0;2;2), N\left(\dfrac{3}{2};2;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{3}{2};2;0\right), \overrightarrow{CM} = (0;-2;2), \overrightarrow{AC}(0;4;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right] = (4;-3;-3), \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC} = -12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$d(AN,CM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|} = \frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Góc giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$\cos(AN,CM) = \frac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}\right|}{AN.CM} = \frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}.\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow (AN,CM) \approx 56^0.$$

Bài 3.6.7. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Biết (AMN) vuông góc với (SBC).

1) Tính theo a diện tích ΔAMN,

2) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BN.

Hướng dẫn giải

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có: $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong $mp(ABC)$, ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt $SO = h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được: $O(0;0;0), A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right), S(0;0;h)$

Suy ra $I\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right), B\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right), C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};0\right)$

$M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right), N\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{h}{2}\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\dfrac{ah}{4};0;\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(6h;0;5a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (AMN).

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left(6h;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (SBC).

Vì $(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{5a^2}{12} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

1) Ta có $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

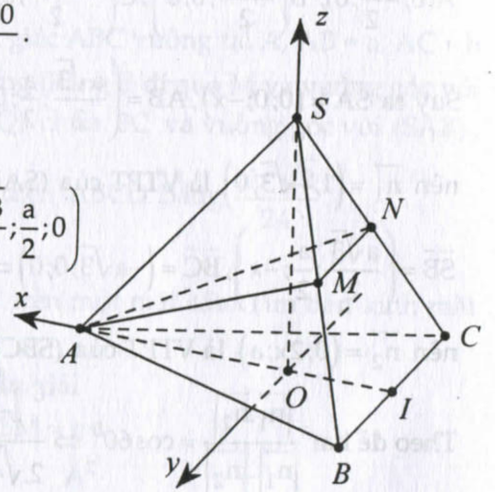
2) Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{5a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{15}}{12}\right)$,

$\overrightarrow{BN} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{15}}{12}\right), \overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

Suy ra

$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{15}}{12};\dfrac{a^2\sqrt{15}}{8};\dfrac{7a^2\sqrt{3}}{24}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB} = \dfrac{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{16}a^3$



Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN là:

$$d(AM,BN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{\sqrt{39}}a$$

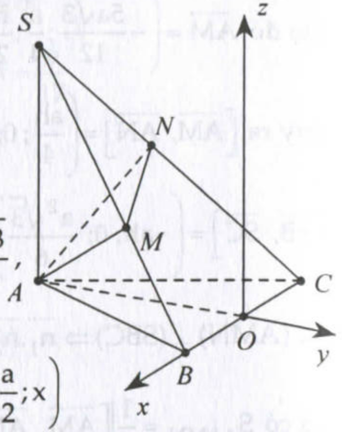
Góc giữa hai đường thẳng AM, BN là:

$$\cos(AM,BN) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}\right|}{AM.BN} = \frac{3}{11} \Rightarrow (AM,BN) \approx 74^0.$$

Bài 3.6.8. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC.

1) Tính thể tích khối chóp S.ABC và S.AMN .
2) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM .

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ O là trung điểm cạnh BC .

1) Vì $\widehat{BAO}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=60^0$

nên $AO=AB\cos 60^0=\frac{a}{2}, BO=AB\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

đặt $SA=x, x>0$. Ta có tọa độ các điểm là:

$A(0;-\frac{a}{2};0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), S\left(0;-\frac{a}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA}=(0;0;-x), \overrightarrow{AB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right]=\left(-\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};0\right)$,

nên $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của (SAB) .

$\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{BC}=\left(-a\sqrt{3};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;ax\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$,

nên $\overrightarrow{n_2}=\left(0;2x;a\right)$ là VTPT của (SBC)

Theo đề bài $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\cos 60^0\Leftrightarrow\frac{\left|-2x\sqrt{3}\right|}{2.\sqrt{4x^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $S\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$.

Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}a.a.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp

S.ABC : $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Ta có: $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$ nên $V_{S.AMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.ABC}=\frac{1}{4}.\frac{a^3\sqrt{6}}{48}=\frac{a^3\sqrt{6}}{192}$.

2) Ta có $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{2}}{8}\right), N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{2}}{8}\right), \overrightarrow{CM}=\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{2}}{8}\right), \overrightarrow{AC}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$,

nên $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{16};\frac{a^2\sqrt{6}}{8}-\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM là:

$$d\left(AN,CM\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{57}}{38}.$$

Góc giữa hai đường thẳng AN và CM là:

$$\cos\left(AN,CM\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}\right|}{AN.CM}=\frac{7}{3\sqrt{57}}\Rightarrow\left(AN,CM\right)\approx 72^0.$$

Bài 3.6.9. Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, AC = b và M là trung điểm của BC. Trên đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P) lấy điểm S $(S\neq M)$. Mặt phẳng (Q) chứa BC và vuông góc với (SAB) , cắt SA tại D, biết thể tích của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{ab^2\sqrt{2}}{24}$.

1) Tính độ dài của đoạn SM.
2) Tìm $E\in SB$ sao cho A, B, C, D, E nằm trên một mặt cầu. Tìm bán kính mặt cầu đó.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt SM = m

Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;b;0)$,

$M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right), S\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};m\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AS}=\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};m\right), \overrightarrow{AB}=(a;0;0)$,

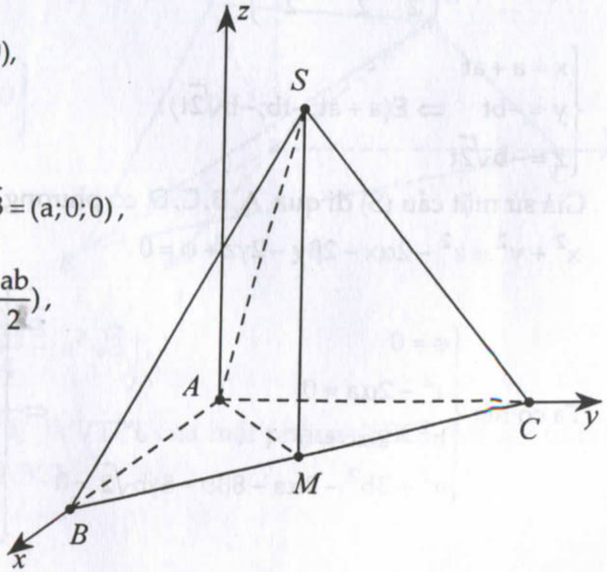
do đó $\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right]=(0;am;-\frac{ab}{2})$,

nên ta có $\overrightarrow{n_1}=(0;2m;-b)$

là VTPT của (SAB) .

$\overrightarrow{BC}=(-a;b;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{BC}\right]=(b^2;ab;2am)$



Vì (Q) đi qua BC và vuông góc với mặt phẳng (SAB) nên (Q) nhận véc tơ $\overrightarrow{n_1}=\left(b^2;ab;2am\right)$ làm VTPT, nên phương trình

$(Q): b^2x+aby+2amz-ab^2=0$.

Phương trình SA : $\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=2mt \end{cases} \Rightarrow D(at;bt;2mt)$

Mà $D\in(Q)$ nên ta có: $ab^2t+ab^2t+4am^2t-ab^2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{b^2}{2b^2+4m^2}$.

1) Mặt khác $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.d(D,(ABC))=\dfrac{1}{6}AB.AC.2mt=\dfrac{abmt}{3}$

Mà $V_{ABCD}=\dfrac{ab^2\sqrt{2}}{24}$ nên suy ra

$mt=\dfrac{b\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \dfrac{mb}{b^2+2m^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow 2m^2-2\sqrt{2}bm+b^2=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}m-b)^2=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $SM=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$.

2) Ta có $m=\dfrac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\dfrac{b^2}{2b^2+4m^2}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow D\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{b}{4};\dfrac{b\sqrt{2}}{4}\right), S\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$ phương trình SB:

$\begin{cases} x=a+at \\ y=-bt \\ z=-b\sqrt{2}t \end{cases} \Rightarrow E(a+at;-tb;-b\sqrt{2}t)$.

Giả sử mặt cầu (S) đi qua A, B, C, D có phương trình:

$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\varphi=0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} \varphi=0 \\ a^2-2\alpha a=0 \\ b^2-2\alpha b=0 \\ a^2+3b^2-8\alpha a-8\beta b-8\gamma b\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{a}{2} \\ \beta=\dfrac{b}{2} \\ \gamma=-\dfrac{3a^2+b^2}{8b\sqrt{2}} \\ \varphi=0 \end{cases}$.

Nên $(S): x^2+y^2+z^2-ax-by+\dfrac{3a^2+b^2}{4b\sqrt{2}}z=0$.

Do đó $E\in(S) \Leftrightarrow (a+at)^2+3b^2t^2-a(a+at)-b(-bt)+\dfrac{3a^2+b^2}{4b\sqrt{2}}(-b\sqrt{2}t)=0$

$\Leftrightarrow at(a+at)+3b^2t^2+b^2t-\dfrac{3a^2+b^2}{2}t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{a^2-b^2}{2(a^2+3b^2)}$.

Vậy $E\left(\dfrac{(3a^2+5b^2)a}{2(a^2+3b^2)};-\dfrac{(a^2-b^2)b}{2(a^2+3b^2)};-\dfrac{(a^2-b^2)b\sqrt{2}}{2(a^2+3b^2)}\right)$.

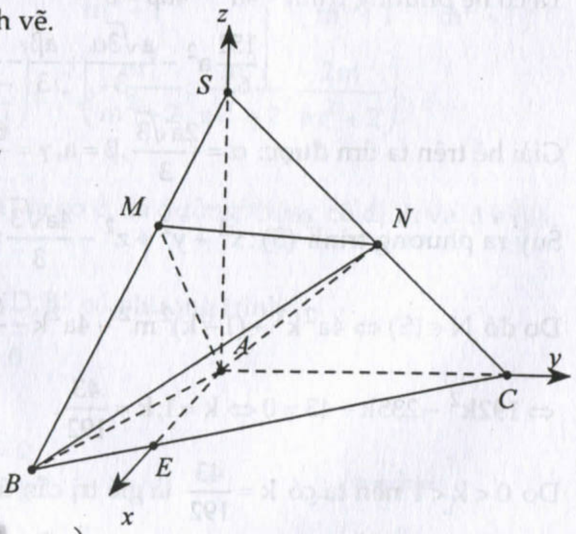
Bài 3.6.10. Cho hình chóp S.ABC có $AB=a, AC=2a, \widehat{BAC}=120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho

$$\frac{SM}{SB}=\frac{1}{3},\ \frac{SN}{SC}=k,\ 0<k<1.$$

1) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

2) Tìm k để tứ giác BCNM nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đặt SA = m

Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A(0;0;0), C(0;2a;0), S(0;0;m)$,

$B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{5a}{2};0\right)$,

$\overrightarrow{BS}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};m\right)$

Nên $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(\dfrac{5am}{4};\dfrac{am\sqrt{3}}{4};a^2\sqrt{3}\right)$,

suy ra $\vec{n}=(5m;m\sqrt{3};4a\sqrt{3})$ là VTPT của mặt phẳng (SBC). Và $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC).

Theo giả thiết đề bài, ta suy ra :

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{28m^2+48a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\frac{6a\sqrt{7}}{7}$$

Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ nên ta có:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{6a\sqrt{7}}{7}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{21}}{7}$$

2) Ta có tứ giác BCNM nội tiếp khi và chỉ khi A, B, C, N, M nằm trên một mặt cầu.

Vì $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}\Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{6};\frac{4a\sqrt{7}}{7}\right)$; $\overrightarrow{SN}=k\overrightarrow{SC}\Rightarrow N\left(0;2ak;(1-k)m\right)$.

Giả sử phương trình mặt cầu (S) đi qua A, B, C, M có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a^2-a\sqrt{3}\alpha+a\beta=0\\4a^2-4a\beta=0\\\frac{151}{63}a^2-\frac{a\sqrt{3}\alpha}{3}+\frac{a\beta}{3}-\frac{8a\sqrt{7}\gamma}{7}=0\end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $\alpha=\frac{2a\sqrt{3}}{3},\beta=a,\gamma=\frac{65a\sqrt{7}}{252}$

Suy ra phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-\frac{4a\sqrt{3}}{3}x-2ay-\frac{65a\sqrt{7}}{126}z=0$.

Do đó $N\in(S)\Leftrightarrow 4a^2k^2+(1-k)^2m^2-4a^2k-\frac{65a\sqrt{7}}{126}(1-k)m=0$

$\Leftrightarrow 192k^2-235k+43=0\Leftrightarrow k=1, k=\frac{43}{192}$.

Do $0<k<1$ nên ta có $k=\frac{43}{192}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.6.11. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông ABCD. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại A, ta lấy điểm S ($S\neq A$). Một mặt phẳng (β) đi qua A, vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

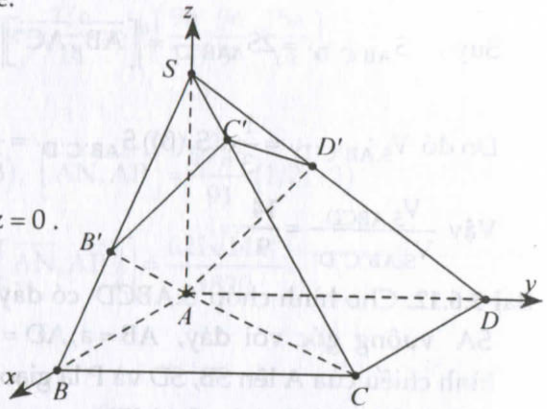
1) Chứng minh rằng khi S thay đổi trên d thì mặt phẳng (β) luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C, C', D, D' luôn nằm trên một mặt cầu cố định.

2) Cho góc giữa SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính tỉ số thể tích giữa hai hình chóp S.ABCD và S.AB'C'D'.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử AB = 1 và đặt SA = m

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Tọa độ các đỉnh là:

A(0;0;0), B(1;0;0),

C(1;1;0), D(0;1;0), S(0;0;m)

Suy ra $\overrightarrow{SC}=(1;1;-m)$

nên phương trình $(\beta): x+y-mz=0$.

$\overrightarrow{SB}=(1;0;-m)$,

phương trình SB:

$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-mt\end{cases}\Rightarrow B'(1+t;0;-mt)$

Mà $B'\in(\beta)$ nên $1+t+m^2t=0\Rightarrow t=\frac{-1}{m^2+1}$. Do đó $B'\left(\frac{m^2}{m^2+1};0;\frac{m}{m^2+1}\right)$

Tương tự: $D'\left(0;\frac{m^2}{m^2+1};\frac{m}{m^2+1}\right)$, $C'\left(\frac{m^2}{m^2+2};\frac{m^2}{m^2+2};\frac{2m}{m^2+2}\right)$.

Xét đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$, ta có Δ là đường thẳng cố định và $\Delta\in(\beta)$.

Giả sử mặt cầu (S) đi qua A, B, D, B' có phương trình

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=0$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}1-2a=0\\1-2b=0\\\frac{m^2}{m^2+1}-\frac{2m^2a}{m^2+1}-2c\frac{m}{m^2+1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{1}{2}\\c=0\end{cases}$

Suy ra $(S): x^2+y^2+z^2-x-y=0$.

Từ đó ta chứng minh được C, C', D' cùng nằm trên (S). Ta có đpcm.

2) Vì SC tạo với đáy một góc 60^0 nên $m=\sqrt{6}$.

Khi đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\sqrt{6}.1=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{6}{7};0;\frac{\sqrt{6}}{7}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(-\frac{3\sqrt{6}}{28};-\frac{3\sqrt{6}}{28};\frac{9}{14}\right)$

Suy $S_{AB'C'D'}=2S_{\Delta AB'C'}=\left|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right]\right|=\frac{3\sqrt{3}}{7}$, $d(S,(\beta))=\frac{m^2}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Do đó $V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}d(S,(\beta)).S_{AB'C'D'}=\frac{1}{3}\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{6}}{14}$.

Vậy $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.AB'C'D'}}=\frac{14}{9}$.

Bài 3.6.12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a, AD=2a$, $SA=3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN)

1) Tính thể tích khối chóp S.AMPN

2) Tính khoảng cách và cô sin của góc giữa DM và CN.

Hướng dẫn giải

1) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;2a;0), S(0;0;3a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=(a;0;-3a), \overrightarrow{SD}=(0;2a;-3a), \overrightarrow{SC}=(a;2a;-3a)$

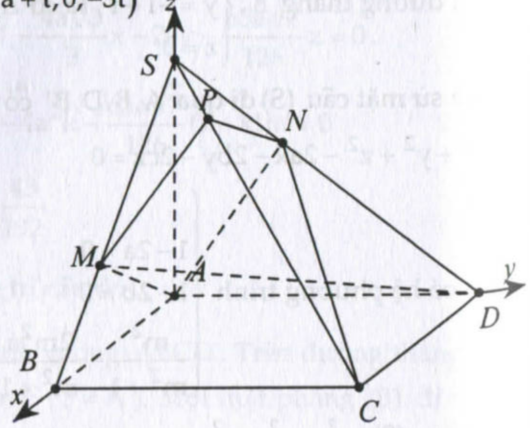
Phương trình SB: $\begin{cases}x=a+t\\y=0\\z=-3t\end{cases}\Rightarrow M(a+t;0;-3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(a+t;0;-3t)$

Mà $AM\perp SB\Rightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB}=0$

$\Leftrightarrow(a+t)+9t=0$

$\Rightarrow t=-\frac{a}{10}\Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$



Tương tự vậy ta tìm được

$N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=-\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x+2y-3z=0$

Phương trình SC: $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\end{cases}$ nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\\x+2y-3z=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9a}{14}, y=\frac{9a}{7}, z=\frac{15a}{14}\Rightarrow P\left(\frac{9a}{14};\frac{9a}{7};\frac{15a}{14}\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]=-\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]=\frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

Suy ra $S_{AMPN}=\frac{1}{2}\left[\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]\right|\right]=\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}$

và $d(S,(AMN))=\frac{9a}{\sqrt{14}}$

Vậy $V_{S.AMPN}=\frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}=\frac{1863a^3}{1820}$.

2) Ta có $\overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{8a}{13};\frac{12a}{13}\right)$, $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{9a}{10};-2a;\frac{3a}{10}\right)$, $\overrightarrow{CD}=(-a;0;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right]=\left(\frac{348a^2}{65};\frac{147a^2}{130};\frac{426a^2}{65}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}=-\frac{348a^3}{65}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng CN, DM là:

$$d(CN,DM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right]\right|}=\frac{2332a}{3\sqrt{15209}},$$

và $\cos(CN,DM)=\frac{\left|\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DM}\right|}{CN.DM}=\frac{133}{\sqrt{154570}}$.

Bài 3.6.13. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a$, $BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

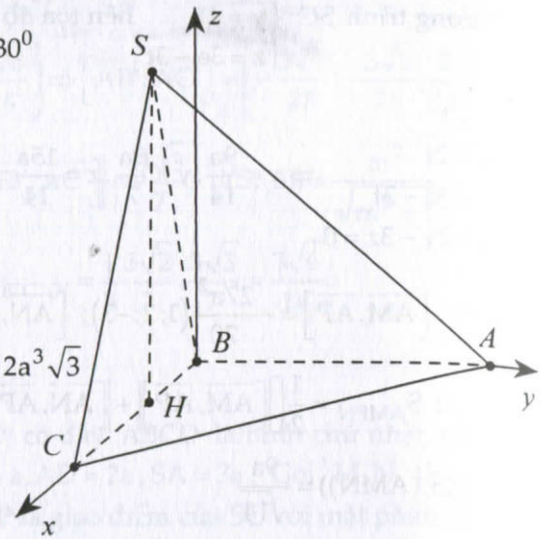
Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S lên $BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Đặt $BH=x, SH=y; x,y>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Tọa độ các đỉnh $B(0;0;0), C(4a;0;0), A(0;3a;0), H(x;0;0), S(x;0;y)$.

Suy ra $\overrightarrow{BS} = (x;0;y), \overrightarrow{BC} = (4a;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC} = 4ax$



Theo đề bài ta có: $\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}}{SB.BC} = \cos 30^0 \\ SB = 2a\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4ax}{2a\sqrt{3}.4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 = 12a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a \\ y = a\sqrt{3} \end{cases}$$

Thể tích khối chóp S.ABC :

$$V = \frac{1}{3}y.\frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{6}.a\sqrt{3}.4a.3a = 2a^3\sqrt{3}$$

Ta có: $\overrightarrow{SA} = \left(-3a;3a;-a\sqrt{3}\right)$,

$\overrightarrow{SC} = \left(a;0;-a\sqrt{3}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-3a^2\sqrt{3};-4a^2\sqrt{3};-3a^2\right)$$

Suy ra $\vec{n} = (3;4;\sqrt{3})$ là VTPT của (SAC), phương trình (SAC) là:

$$3x + 4y + \sqrt{3}z - 12a = 0$$

Vậy $d\left(B,(SAC)\right) = \dfrac{|-12a|}{\sqrt{3^2+4^2+3}} = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 3.6.14. Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASC} = 90^0, \widehat{CSB} = 60^0, \widehat{BSC} = 120^0$ và $SA = SB = SC = a$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).
2) Gọi M, N lần lượt chia đoạn SB, SC theo tỷ số -3. Tính khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AN, CM.

Hướng dẫn giải

Ta có $CA = a\sqrt{2}$, $CB = a$, $AB = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại C.

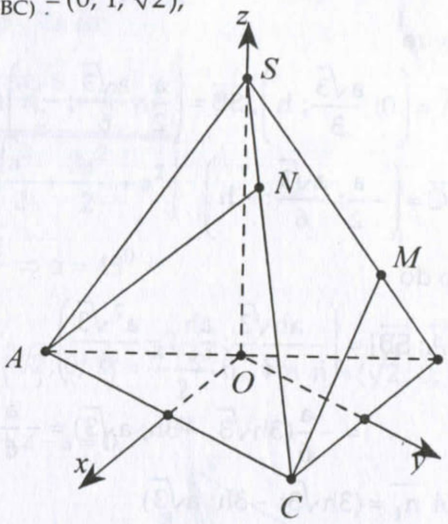
Mặt khác $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của điểm S trên mặt đáy là trung điểm O của AB.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz (hình vẽ), Ox//BC, Oy//AC.

Tọa độ các đỉnh của hình chóp là:

$$S\left(0;0;\frac{a}{2}\right), A\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right).$$

1) Ta có



$$\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(0;-\frac{a^2}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SBC)}} = (0;1;\sqrt{2}),$$

$$\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};\frac{a^2}{2};0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAB)}} = (\sqrt{2};1;0).$$

Gọi $\varphi = \widehat{(SAC),(SBC)}$.

Khi đó

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}_{(SAB)}, \vec{n}_{(SBC)}\right)\right| = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{3}.$$

2) Vì $\overrightarrow{MS} = -3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC} = -3\overrightarrow{NS}$

nên suy ra $M\left(-\dfrac{3a}{8};\dfrac{3a\sqrt{2}}{8};\dfrac{a}{8}\right), N\left(\dfrac{a}{8};\dfrac{a\sqrt{2}}{8};\dfrac{3a}{8}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AN}\left(-\dfrac{3a}{8};\dfrac{5a\sqrt{2}}{8};\dfrac{3a}{8}\right), \overrightarrow{CM}\left(-\dfrac{7a}{8};-\dfrac{a\sqrt{2}}{8};\dfrac{a}{8}\right), \overrightarrow{AC}\left(0;a\sqrt{2};0\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right] = \left(\frac{\sqrt{2}a^2}{8};-\frac{9a^2}{32};\frac{19\sqrt{2}.a^2}{32}\right).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng: $d(AN, CM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}\right]\right|} = 9\sqrt{\dfrac{2}{835}}$.

Góc giữa hai đường thẳng:

$$\cos(\widehat{AN, CM}) = \left|\cos(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM})\right| = \frac{7\sqrt{221}}{1768} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{7\sqrt{221}}{1768}.$$

Bài 3.6.15. Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC$, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là h. Tính h theo a để hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc nhau.

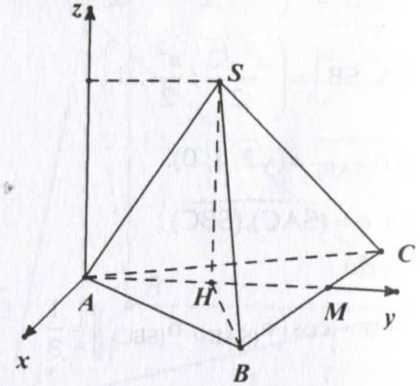
Hướng dẫn giải

Gọi H là tâm của ΔABC và M là trung điểm của BC

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ HA = HB = HC \ (\Delta ABC \text{ đều}) \end{cases}$

Dựng hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Ta có:

$$A(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h\right).$$



Suy ra

$$\overrightarrow{SA}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h\right),\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right),$$

$$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right)$$

Do đó

$$[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}]=\left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};\frac{ah}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$=-\frac{a}{6}(3h\sqrt{3};-3h;a\sqrt{3})=-\frac{a}{6}.\vec{n}_1,$$

với $\overrightarrow{n_1}=(3h\sqrt{3};-3h;a\sqrt{3})$

$$\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right]=\left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};-\frac{ah}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{a}{6}(3h\sqrt{3};3h;-a\sqrt{3})=-\frac{a}{6}.\vec{n}_2,$$

với $\vec{n}_2=(3h\sqrt{3};3h;-a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (SAB) có pháp vecto $\overrightarrow{n_1}$. Mặt phẳng (SAC) có pháp vecto $\overrightarrow{n_2}$

Nên ta có $(SAB)\perp(SAC)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 3h\sqrt{3}.3h\sqrt{3}-3h.3h+a\sqrt{3}(-a\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow 27h^2-9h^2-3a^2=0\Leftrightarrow 18h^2=3a^2\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy: $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài 3.6.16. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với (ABC) và SA = a. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của cạnh AB,BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có:

$A(0;0;0), B(a\sqrt{2};a\sqrt{6};0), C(-a\sqrt{2};a\sqrt{6};0), S(0;0;a),$

$$E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2};0\right),\ F(0;a\sqrt{6};0)\text{ và }M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};a\sqrt{6};0\right).$$

$$\overrightarrow{SE}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2};-a\right),\ \overrightarrow{AF}=(a;a\sqrt{6};0),\ \overrightarrow{SM}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};a\sqrt{6};-a\right).$$

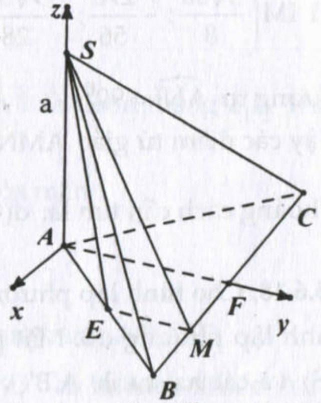
Gọi α là góc nhọn tạo bởi SE và AF. Ta có:

$$\cos\alpha=\left|\cos(\overrightarrow{SE};\overrightarrow{AF})\right|=\left|\frac{0.\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\sqrt{6}.\frac{a\sqrt{6}}{2}+0(-a)}{\sqrt{0+6a^2+0}.\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}+a^2}}\right|$$

$$=\frac{3a^2}{a\sqrt{6}.a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^0$$

$$[\overrightarrow{SE};\overrightarrow{SM}]=\left(\frac{a^2\sqrt{6}}{2};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2};0;1\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\vec{n},\text{ với }\vec{n}=(\sqrt{2};0;1)$$

Phương trình mặt phẳng (SEM): $\sqrt{2}x+z-a=0$.



Khoảng cách từ A đến (SEM):

$$d(A;SEM)=\frac{|0+0-a|}{\sqrt{2+1}}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Vì $AF//EM\Rightarrow AF//(SEM)$

$\Rightarrow d(SE;AF)=d(A;SEM)$.

Vậy $d(SE;AF)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 3.6.17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều ABCD có $AB=BC=CD=a$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Điểm M chia đoạn SB theo tỷ số −3, điểm I chia đoạn DS theo tỷ số $-\frac{4}{3}$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.

1) Chứng minh N là trung điểm của SC.
2) Chứng minh $SD\perp(AMI)$ và AMNI thuộc một đường tròn.
3) Tính khoảng cách từ trung điểm của AD đến mặt phẳng (AMNI).

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, gốc tọa độ là trung điểm của AD, trục Ox là trục đối xứng của hình thang ABCD, trục Oz//SA.

Tọa độ các điểm là:

$$A(0;-a;0),B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right),D(0;a;0),C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right),S\left(0;-a;a\sqrt{3}\right).$$

Vì $\overrightarrow{MS} = -3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ID} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{IS}$ nên $M\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; -\frac{5a}{8}; \frac{\sqrt{3}a}{4}\right), I\left(0; -\frac{a}{7}; \frac{4\sqrt{3}a}{7}\right)$.

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; \frac{3a}{8}; \frac{2\sqrt{3}a}{8}\right), \overrightarrow{AI}\left(0; \frac{6a}{7}; \frac{4\sqrt{3}a}{7}\right)$

Nên mặt phẳng (AMI) có phương trình $2y - \sqrt{3}z + 2a = 0$.

Trung điểm của SC là $N\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}; -\frac{a}{4}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ thuộc mặt phẳng (AMI).

Vậy mặt phẳng (AMI) cắt SC tại trung điểm của SC.

2) Ta có $\overrightarrow{SD}(0; 2a; -a\sqrt{3}), \vec{n}_{(AMI)}(0; 2; -\sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = a.\vec{n}_{(AMI)}$ nên $SD \perp (AMI)$.

Vì $\overrightarrow{IM}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8}; -\frac{27a}{56}; -\frac{9\sqrt{3}a}{28}\right)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM} = 0$, hay $\widehat{AMI} = 90^0$.

Tương tự $\widehat{ANI} = 90^0$.

Vậy các điểm tứ giác AMNI nội tiếp trong đường tròn đường kính AI.

3) Khoảng cách cần tìm là: $d(O, (AMI)) = \frac{|2a|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a$.

Bài 3.6.18. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và mặt cầu (S) nội tiếp trong hình lập phương đó. Mặt phẳng (P) quay quanh A, tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt hai cạnh A'B' và A'D' lần lượt tại M, N. Tìm tập hợp tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AA'MN.

Hướng dẫn giải

Giả sử cạnh của hình lập phương là 1 đơn vị.
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz (hình vẽ).

Tọa độ các đỉnh

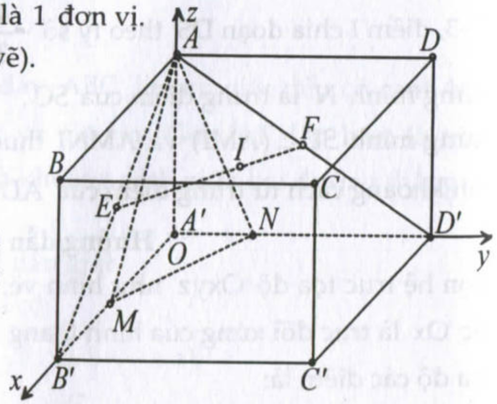
$O \equiv A', B'(1; 0; 0)$,

$D'(0; 1; 0), A(0; 0; 1)$.

Xét hai điểm bất kỳ M, N nằm trong các cạnh A'B', A'D' ta có

$M(m; 0; 0)$,

$N(0; n; 0), \ 0 < m, n < 1$.



Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$.

Mặt cầu nội tiếp hình lập phương có phương trình

$$(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Tứ diện AA'MN có góc tam diện đỉnh A' vuông nên tọa độ tâm mặt cầu ngoại tiếp AA'MN là $I\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Mặt phẳng (AMN) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I, (AMN)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + 1 \Leftrightarrow m + n = 1$$

Tức là $\begin{cases} x_I + y_I = \frac{1}{2} = z_I \\ 0 < x_I, y_I < 1 \end{cases}$ nên quỹ tích của điểm I là đoạn thẳng I_1I_2 trừ hai điểm $I_1; I_2$, với $I_1; I_2$ là các điểm có tọa độ thỏa mãn

$$I_1\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right); I_2\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Các điểm $I_1; I_2$ đó chính là trung điểm các đoạn thẳng AB', AD'.

Bài 3.6.19. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có ba kích thước $AB = a$, $AD = b, AA' = c$ với $0 < a < b < c$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, C'D'. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD}, \ \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BB'}, (0 \le k \le 1)$

1) Tính khoảng cách từ A đến (A'BD).

2) Chứng minh rằng M, N, I, J đồng phẳng và hãy tìm k để MN vuông góc với IJ.

3) Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABDA' và xác định tâm H của đường tròn là giao của (S) và (A'BD).

Hướng dẫn giải

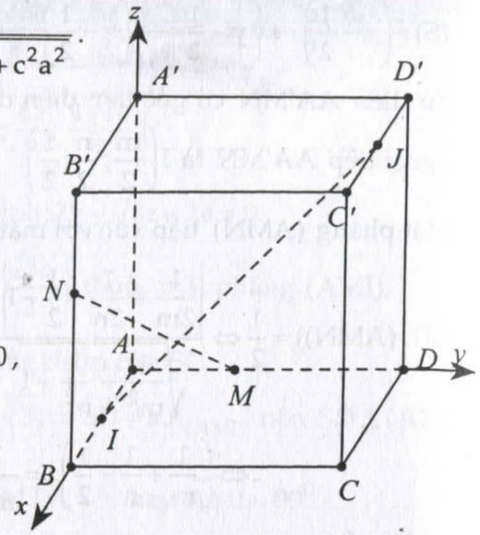
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0), A'(0;0;c), B'(a;0;c), C'(a;b;c), D'(0;b;c)$

Suy ra $I\left(\frac{a}{2};0;0\right), J\left(\frac{a}{2};b;c\right), M(0;kb;0), N(a;0;kc)$.

1) Phương trình mặt phẳng $(A'BD): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + cay + abx - abc = 0$

Suy ra $d(A,(A'BD))=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.



2) Ta có: $\overrightarrow{MN}=(a;-kb;kc),\overrightarrow{IJ}=(0;b;c)$,

$\overrightarrow{IM}=\left(-\dfrac{a}{2};kb;0\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{IJ}\right]=\left(-kbc;-\dfrac{ac}{2};\dfrac{ab}{2}\right)$

Do đó: $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{IJ}\right].\overrightarrow{IM}=\dfrac{kabc}{2}-\dfrac{kabc}{2}=0$,

suy ra M,N,I,J đồng phẳng.

Ta có $MN\perp IJ\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IJ}=0$

$\Leftrightarrow -kb^2+kc^2=0\Leftrightarrow k=0$.

3) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình : $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0$.

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases}a^2-2\alpha a=0\\ b^2-2\beta b=0\\ c^2-2\gamma c=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{a}{2};\beta=\dfrac{b}{2};\gamma=\dfrac{c}{2}$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Gọi H là tâm của đường tròn, là giao của (S) với mặt phẳng (A'BD), suy ra H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (A'BD) nên IH có phương trình

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+bct\\ y=\dfrac{b}{2}+cat\\ z=\dfrac{c}{2}+abt\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{a}{2}+bct;\dfrac{b}{2}+cat;\dfrac{c}{2}+abt\right)$$

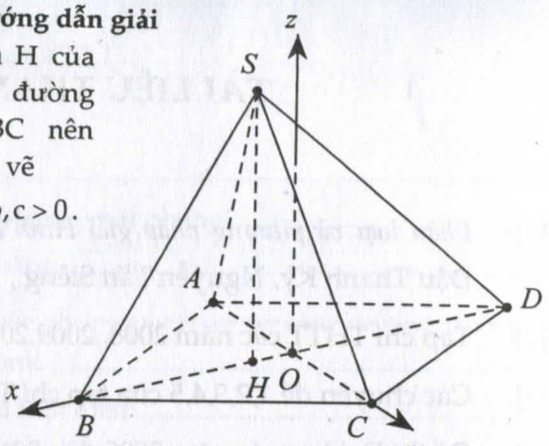
Mà $H\in(A'BD)$ nên ta có:

$$bc\left(\dfrac{a}{2}+bct\right)+ca\left(\dfrac{b}{2}+cat\right)+ab\left(\dfrac{c}{2}+abt\right)-abc=0\Leftrightarrow t=\dfrac{abc}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

Vậy tọa độ điểm H là $\left(\dfrac{a}{2}+bct;\dfrac{b}{2}+cat;\dfrac{c}{2}+abt\right)$ với $t=\dfrac{abc}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$.

Bài 3.6.20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh 1cm, các cạnh bên SA, SB, SC có độ dài cùng bằng 1cm. Tính độ dài cạnh SD sao cho hình chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu H của S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $H\in BD$. Chọn hệ trục như hình vẽ

Giả sử $B(b;0;0),C(0;c;0)$ với $b,c>0$.

Khi đó $A(0;-c;0),D(-b;0;0)$

và $b^2+c^2=1$

Gọi $H(h;0;0)$, ta có:

$HB^2=HA^2\Rightarrow(h-b)^2=h^2+c^2$

$\Rightarrow h=\dfrac{b^2-c^2}{2b}=\dfrac{2b^2-1}{2b}$

Ta có: $SH^2=SA^2-AH^2=1-\dfrac{1}{4b^2}=\dfrac{4b^2-1}{4b^2}\Rightarrow SH=\dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b},\ b>\dfrac{1}{2}$

Do đó $S\left(\dfrac{b^2-c^2}{2b};0;\dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}\right)$

Vì đáy ABCD là hình thoi nên ta có $S_{ABCD}=4S_{\Delta ABO}$, do vậy

$V_{S.ABCD}=4V_{SABO}=4\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|$

Mà $\overrightarrow{OA}=(0;-c;0),\overrightarrow{OB}=(b;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;bc)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}=\dfrac{1}{2}c\sqrt{4b^2-1}$,

nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}c\sqrt{4b^2-1}=\dfrac{1}{6}\sqrt{4c^2(4b^2-1)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\sqrt{4c^2(4b^2-1)}\le\dfrac{4c^2+4b^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}c^2+b^2=1\\ 4c^2=4b^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\\ c=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$.

Khi đó $SD^2=\left(\dfrac{b^2-c^2}{2b}+b\right)^2+\dfrac{4b^2-1}{4b^2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow SD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\max V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{4}$ đạt được khi $SD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$cm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]: *Phân loại và phương pháp giải Hình học 10, 11, 12* của nhóm tác giả: Đậu Thanh Kỳ, Nguyễn Tấn Siêng , NXB ĐHQG Hà nội, 2013.

[2]: Tạp chí THTT các năm 2008, 2009,2010,2011,2012,2013

[3]: Các chuyên đề 1,2,3,4,5 của tạp chí THTT

[4]: Đề thi Đại học các năm 2005 đến 2013 của Bộ giáo dục và Đào tạo.

[5]: Các tài liệu tham khảo từ các diễn đàn Toán như:

www.mathscope.org , www.math.net.vn

MỤC LỤC

Lời giới thiệu 3

Chương 1: Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng 21

§ 1. Viết phương trình đường thẳng 25

§ 2. Phương trính đường tròn 51

§ 3. Phương trình các đường Cônic 82

§ 4. Bài toán xác định tọa độ của một điểm 115

Chương 2: Hình học không gian tổng hợp 160

§ 1. Các bài toán về giao điểm, giao tuyến 167

§ 2. Quan hệ song song 186

§ 3. Quan hệ vuông góc 206

§ 4. Các bài toán về góc 223

§ 5. Khoảng cách 250

§ 6. Thể tích khối đa diện 223

Chương 3: Phương pháp tọa độ trong không gian 366

§ 1. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng 371

§ 2. Lập phương trình mặt phẳng 393

§ 3. Phương trình đường thẳng 432

§ 4. Phương trình mặt cầu 483

§ 5. Các bài toán cực trị 502

§ 6. Giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ 523

KHANGVIET FAHASA

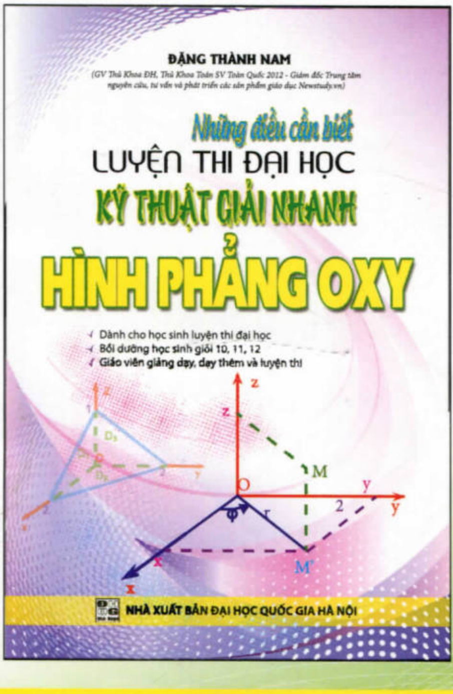
HÀNG VIỆT NAM CHẤT LƯỢNG CAO

Nhà sách Minh Thắng
808 ĐƯỜNG LÁNG - HÀ NỘI
ĐT: 043.7755620 - 043.9997777

QUẢNG LỢI VIET VAN

www.nhasachkhangviet.vn

MỜI BẠN TÌM ĐỌC



ĐẶNG THÀNH NAM

(GV Thủ Khoa ĐH, Thủ Khoa Toán SV Toàn Quốc 2012 - Giám đốc Trung tâm nguyên cứu, tư vấn và phát triển các sản phẩm giáo dục Newstudy.vn)

Những điều cần biết
LUYỆN THI ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT GIẢI NHANH
HÌNH PHẲNG OXY

- Dành cho học sinh luyện thi đại học
- Bồi dưỡng học sinh giỏi 10, 11, 12
- Giáo viên giảng dạy, dạy thêm và luyện thi

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN DVVH KHANG VIỆT

Nhà Sách
KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đa Kao - Quận 1 - Tp. Hồ Chí Minh
Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: (08) 39110880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

8 935092 526980

GIÁ: 123.000 ĐỒNG